

Логика бывает:  
математическая; женская; железная.

Народная мудрость

Но дружбы нет и той меж нами.  
Все предрассудки истребя,  
Мы почитаем всех нулями,  
А единицами — себя.

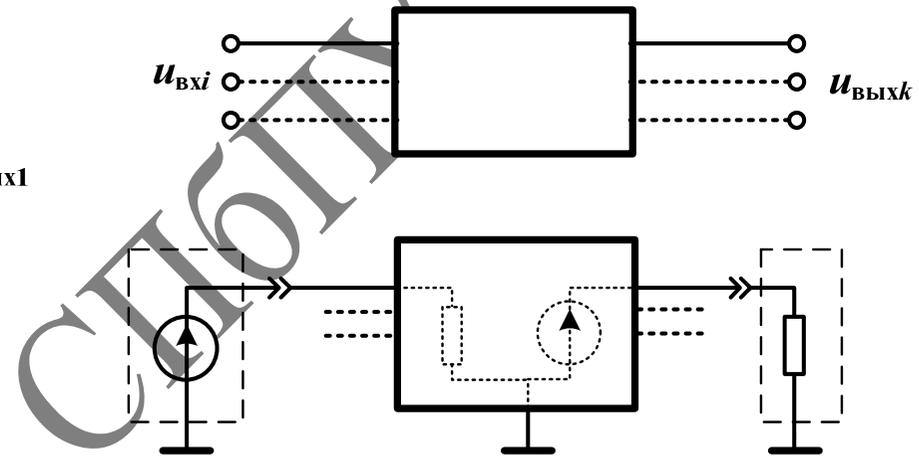
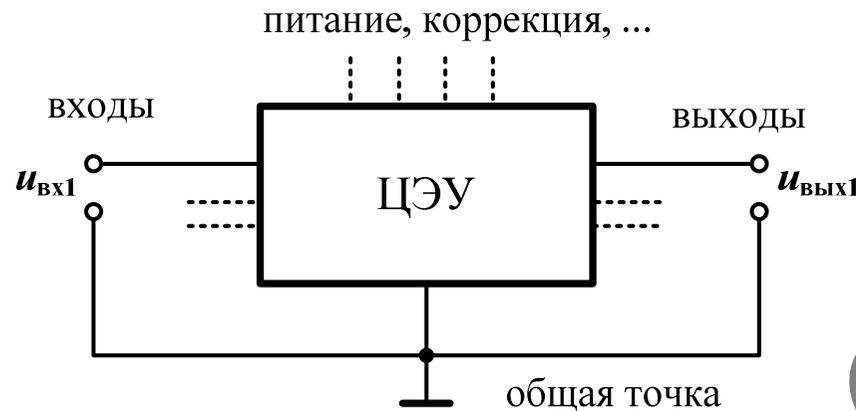
А.С. Пушкин,  
"Евгений Онегин, гл. 2"

## Раздел 2

# АЛГЕБРА ЛОГИКИ И ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

В цифровом электронном устройстве:

- Выводы для входных и выходных информационных сигналов (напряжений).
- Общая точка и вывод для неинформационных сигналов (питание, коррекция и т.п.).



В идеализированном представлении информационные сигналы (напряжения) принимают два значения  $U_1$  и  $U_2$  (прямоугольные импульсы). Для описания связи выходных сигналов с входными необходим математический аппарат связи двухзначных переменных.

Такой математический аппарат есть:

### Логическая алгебра (алгебра Буля)

! Логическая алгебра является частью более общей теории многомерной логики и дискретной математики. Она хорошо развита и имеет большой спектр приложений.

! В данном курсе рассматриваются только некоторые азы логической алгебры, используемые далее при рассмотрении основ цифровой схемотехники.

## 2.1. Логические переменные и элементарные логические операции

---

✓ Объектом АЛ являются

**двоичные (логические) переменные**

они могут принимать только два значения “0” и “1” (в общем случае могут не иметь никакого количественного смысла).

✓ Для логических переменных в АЛ определено

**отношение эквивалентности** (обозначается “ = ”)

для такого отношения выполняются: *рефлексивность* ( $x = x$ ), *симметричность* (если  $x = y$ , то  $y = x$ ), *транзитивность* (если  $x = y$  и  $y = z$ , то  $x = z$ ).

Эквивалентность имеет обычный смысл *равенства значений* переменных.

✓ АЛ изучает возможные соотношения и связи двоичных переменных. Важным элементом таких соотношений являются **бинарные** и **унитарные операции** над двоичными переменными (эти понятия унаследованы в АЛ из общей теории алгебраических систем).

- Бинарные операции АЛ ставят в соответствие значениям двух логических переменных (операнды) значения  $\{0;1\}$ ;
- Унитарные операции определяют соответствие значений одного операнда значениям  $\{0;1\}$ .

Обычно для бинарных операций используется "традиционная" форма записи:

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ x_i \quad f_k \quad x_j \quad = \quad y \\ \text{\{первый операнд\}\{символ/обозначение операции\}\{второй операнд\} = \{результат операции\}} \\ \text{-----} \end{array}$$

Дискретное количество комбинаций операндов позволяет задавать операции в виде т.н.

### таблицы истинности

бинарная операция				унитарная операция		
№	$x_1$	$x_2$	$y = x_1 f x_2$	№	$x$	$y = f x$
1	0	0	$y(0, 0)$	1	0	$y(0)$
2	0	1	$y(0, 1)$	2	1	$y(1)$
3	1	0	$y(1, 0)$			
4	1	1	$y(1, 1)$			

✓ Операции в общей теории алгебраических систем (и в АЛ) подчинены ряду аксиом:

• **коммутативности**  $x_i f_k x_j = x_j f_k x_i$ ; **ассоциативности**  $x_q f_k (x_i f_k x_j) = (x_q f_k x_i) f_k x_j$ ;

! Это характерно для арифметических действий "обычной" алгебры (перемена мест операндов, произвольность порядка попарного применения).

• **дистрибутивности**  $x_q f_k (x_i f_m x_j) = (x_q f_k x_i) f_m (x_q f_k x_j)$ ; **идемпотентность**  $x_i f_k x_i = x_i$ ; **поглощение**  $x_i f_k (x_i f_m x_j) = x_i$ ;

! Это не как в "обычной" алгебре.

✓ Ал задается тремя основными (элементарными) операциями:

1) Операция **конъюнкции**: логическое умножение, операция “И”, **conjunction**( $x_i, x_j$ ).

Аналитическая запись (обозначение)

$$y = x_1 \cdot x_2; (y = x_1 \times x_2)$$

$$y = x_1 \wedge x_2;$$

$$y = x_1 \& x_2.$$

Таблица истинности:

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2) Операция **дизъюнкции**: логическое сложение, операция “ИЛИ”, **disjunction**( $x_i, x_j$ ).

Аналитическая запись (обозначение)

$$y = x_1 + x_2;$$

$$y = x_1 \vee x_2 .$$

Таблица истинности:

$x_1$	$x_2$	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

! Эти бинарные операции подчиняются коммутативности и ассоциативности → могут быть "обобщены" и на произвольное число аргументов

$$y = x_i \cdot x_j \cdot x_k \cdot \dots \cdot x_m;$$

$$y = x_i + x_j + x_k + \dots + x_m;$$

Последовательность не важна (скобки не нужны). Сохранение смысла (и, и ... ; или, или ... ).

! Умножение/сложение, обобщенные на несколько операндов, не являются бинарной операцией.

3) Унитарная операция **инверсии, отрицание**, операция “**НЕ**”, **дополнение**,  $\text{not}(x)$ .

Аналитическая запись (обозначение).

$$y = \bar{x}.$$

$$y = \neg x;$$

Таблица истинности:

$x_1$	$y = \bar{x}$
0	1
1	0

! Двойное отрицание  $\bar{\bar{x}} = x$  – значение операнда не меняется.

---

✓ Этимология терминов и символьных обозначений элементарных операций АЛ, мотивы и традиции их применения в тех или иных разделах дискретной математики представляют отдельный интерес, однако для приложения к вопросам цифровой схемотехники не важны.

! При изложении основ АЛ в контексте цифровой электроники в разной литературе встречается применение разных систем терминов и обозначений.

Далее, если это не оговорено особо, будем использовать:

- для [логического] сложения – символ "+";
- для [логического] умножения – символ "." (часто опускают, как и в "обычной" алгебре);
- для инверсии (отрицания) – обозначение  $\bar{x}$ .

## 2.2. Логические функции

Обобщением соотношений значений логических переменных являются логические функции.

✓ **Логической функцией**  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называют функцию логических аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , принимающую только два значения либо ("0", либо "1") и подразумевающую правило однозначного соответствия значения функции значениям аргументов.

! В старой литературе ЛФ иногда называют или «**переключательными**».

! Упорядоченную систему аргументов ЛФ иногда называют "**булевым вектором**".

! Рассмотренные выше элементарные логические операции являются простейшими логическими функциями.

! Для функции двух переменных, в общем случае могут не выполняться упомянутые выше аксиомы, которым подчиняются элементарные бинарные операции.

! Как и в "обычной" алгебре типовой выбор обозначений  $x_i$  для операндов и аргументов и обозначения  $y$  (или  $y_k$ ) для значений функций условен, м.б. применены обозначения разными буквами ( $x, y, z, \dots$ ) и т.д. и т.п.

✓ Для  $n$  логических переменных, существует **конечное число**  $N$  возможных различных комбинаций значений этих переменных ( $N = 2^n$ ).

Конкретная комбинация значений аргументов (булева вектора) называется **набором**. У функции от  $n$  аргументов есть  $N = 2^n$  наборов аргументов.

✓ Для того, чтобы определить (задать) логическую функцию достаточно указать значение функции для каждого набора аргументов. Прямая интерпретация такого действия – задание (заполнение) **таблицы истинности функции**.

№	$x_n$	...	$x_2$	$x_1$	$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
1	0	...	0	0	$y(0,0,\dots,0)$
2	...	...	0	1	$y(1,0,\dots,0)$
...	...				
$N$	1	...	1	1	$y(1,1,\dots,1)$

! Порядок следования аргументов (столбцы) и порядок наборов (строки) не принципиален.

✓ Если значение ЛФ указано для всех наборов – ее называют **"детерминированной"** или **"полностью определенной"**.

Если для некоторых наборов значение ЛФ не задано, то ее называют **"недоопределенной"**, **"частично определенной"** или **"не детерминированной"**.

Строго говоря, недоопределенная ЛФ не является функцией и требует доопределения (указания значений для всех наборов), такие ЛФ связаны задачами, где для некоторых наборов значение функции не важно (например, если такие наборы не должны воспроизводиться, возникать).

Применительно к цифровой схемотехнике (исключая специфические системы с т.н. "нечеткой логикой"), связь между выходным и входными информационными уровнями должна быть определенной. Поэтому возникновение ситуаций с недоопределенными функциями означает лишь что при **доопределении** функции есть возможность выбора. Другими словами, в такой ситуации можно использовать разные функции, отличающиеся значениями в наборах, где исходно ЛФ не задана. Можно выбрать итоговую детерминированную функцию исходя из тех или иных критериев оптимальности.

✓ Число различных функций от  $n$  переменных *ограничено* числом  $2^N$  (число возможных неповторяющихся столбцов значений функции в ТИ).

• Например, для  $y = f(x)$ :  $n = 1, N = 2 \rightarrow$  возможны четыре разные функции.

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1
Аналитическая запись:				
	$y = x$	$y = \bar{x}$	$y = 0$	$y = 1$

• Для  $y = f(x_1, x_2)$ :  $n = 2, N = 4 \rightarrow$  возможны  $2^N = 16$  разных функций.

$x_2$	$x_1$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$	...
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
		$y=0$	$y=1$	$y=x_1$	$y=x_2$	$y=\bar{x}_2$	$y=\bar{x}_2$	$x_1 + x_2$ ИЛИ	$\overline{x_1 + x_2}$ ИЛИ-НЕ	$x_1 \cdot x_2$ И	$\overline{x_1 \cdot x_2}$ И-НЕ	$x_1 + \bar{x}_2$	

6 шт.: константы 0 и 1; повторение  $x_1$  либо  $x_2$  (либо инвертированного аргумента);

6 шт.: сложение либо умножение (либо с инверсией); 1 (либо 0) при равнозначности;

4 шт.: 1 (либо 0) только при  $x_1=0$  и  $x_2=1$ ; 1 (либо 0) только при  $x_1=1$  и  $x_2=0$ ;

! ЛФ может формально подразумевать аргументы, от которых она в действительности не зависит.

- Если ЛФ зависит от всех аргументов ее называют "**невырожденной**". Если ЛФ не зависит от аргумента(тов), ее называют "**вырожденной**" (по данному аргументу(там)).
- Аргумент  $x_i$  называется "**фиктивным**", если ЛФ от него не зависит

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) .$$

- Предельный случай – функции, вырожденные по всем переменным. Это т.н. функции-константы независимые от аргументов (псевдофункции) и тождественно равные константам "0" либо "1":

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$  – функция-константа "0", либо  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1$  – функция-константа "1".

✓ Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  получаемая на основе набора функций  $f_1, \dots, f_k$  посредством последовательности подстановки (переобозначения аргументов) называется **суперпозицией** функций  $f_1, \dots, f_k$ .

! Функции  $f_1, \dots, f_k$  могут иметь произвольное число аргументов меньшее, чем  $n$ .

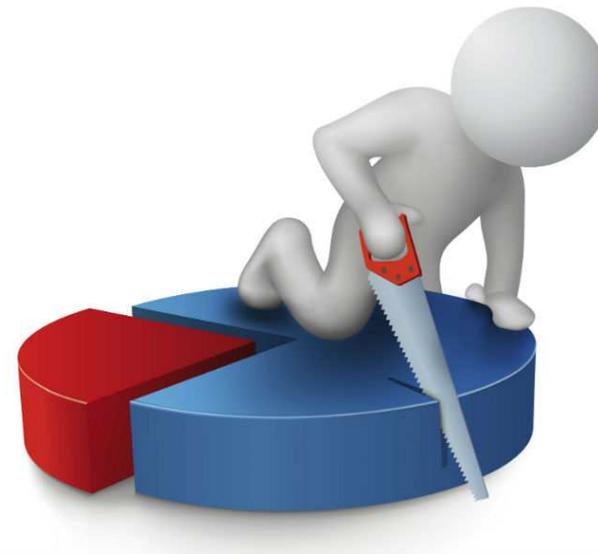
! Если суперпозицией заданной системы ЛФ  $\{f_1, \dots, f_k\}$  может быть представлена произвольная ЛФ, то система  $\{f_1, \dots, f_k\}$  образует "**функционально полный базис**" ("**функциональный базис**" или "**базис АЛ**").

✓ В АЛ широко развит анализ видов ЛФ и их свойств. Рассматриваются самодвойственные, монотонные, линейные ЛФ, изучаются ЛФ, сохраняющие "0" и "1" и т.д.

Теоретически обоснованы возможности представления произвольной ЛФ через суперпозицию конечного числа заданных ЛФ (функциональный базис), разложение ЛФ в виде заданных видов функциональных структур и т.д.

Широко развиты вопросы аналитического описания ЛФ, вопросы решения систем уравнений для логических переменных и т.д. и т.п.

**Для изучения основ цифровой схемотехники обычно достаточно рассмотреть и использовать только некоторые результаты такого анализа, без детального рассмотрения общей теории и общих ее итогов.**



Примеры ЛФ (и ТИ) с наглядным смыслом. **Мажоритарные функции.**

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Три аргумента (маж. ЛФ “два из трех”), 8 наборов. Принимает значение 1 (возвращает 1), когда два или три аргумента равны “1”. Принцип “большинства единиц”. Голосование; решение по информации, переданной по трем независимым каналам и т.п.

! *Симметричность* всех аргументов.

$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

- Четыре аргумента. Принцип большинства единиц, с решающим аргументом при равенстве числа единиц на входах (в примере решающим принят  $x_1$ ). Аргументы  $x_2, x_3, x_4$ , равноправны (симметричны), аргумент  $x_1$  – нет.

## 2.3. Логические выражения и формулы

Используя введенные обозначения для логических операций можно составлять выражения и записывать формулы, описывающие последовательное применение ЛО к логическим переменным непосредственно входящим в выражение (либо косвенно, если операндами в выражении являются ЛФ).

- ✓ Правила для *умножений и сложений* в ЛВ (! как и в обычной алгебре):
  - *Последовательность* применения бинарных операций *указывается скобками* (коммутативность и ассоциативность  $\rightarrow$  в последовательностях "+" либо "." скобки не нужны).
  - *Принято*, что при сочетаниях последовательности умножений и сложений *сначала* выполняется *умножение, потом сложение* (скобки нужны меньше, знак "." опускают).
  - {умножение раньше сложения} + {дистрибутивность}  $\rightarrow$  "обычные" правила вынесения за скобки, внесения в скобки, раскрытия скобок.
- ✓ *Инверсия* указанная верхней чертой применяется к результату выражения под чертой.
- ✓ Разные ЛВ могут дать одинаковый результат для всех наборов переменных прямо или косвенно входящих в выражения. В таком случае используют понятие равносильности ("=") или эквивалентности (" $\leftrightarrow$ ") выражений.
- ✓ Часто понятие логической формулы и логического выражения используют как синонимы. Однако в строгом изложении АЛ "**формулой**" могут называть ЛВ, в которое входят только переменные  $x_i$  (компоненты булева вектора) и элементарные логические операции (т.е. формула образует *суперпозицию элементарных логических операций*).

✓ Логические выражения и формулы используются:

- Для описания (в аналитической форме) закономерностей связей логических переменных.
- Для заданного ЛВ можно найти его результат для любого набора входящих в него (прямо или косвенно) переменных. Поэтому ЛВ является **формой определения (записи) ЛФ**.

! Выше простые выражения и формулы с элементарными ЛО уже использовались в указанных целях.

✓ **Ключевые соотношения АЛ**

Используются для преобразования ЛВ (получения эквивалентных/равносильных выражений).

Можно доказывать последующие приведенные соотношения, используя предыдущие или доказывать соотношения прямой подстановкой всех наборов аргументов.

- Законы "константы"  $x + 0 = x$        $x \cdot 1 = x$   
 $x + 1 = 1$        $x \cdot 0 = 0$   
 $x + x = x$        $x \cdot x = x$       – из акс. идемпотентности
- Закон противоречья  $x + \bar{x} = 1$        $x \cdot \bar{x} = 0$
- Двойное отрицание  $\bar{\bar{x}} = x$
- Переместительный закон  $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ ;       $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$       – из акс. коммутативности
- Закон поглощения  $x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1$ ;       $x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1$       – из акс. поглощения
- Закон склеивания  $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1$ ;       $(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \bar{x}_2) = x_1$

- Сочетательный закон  $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3); (x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$  — акс. ассоциативности
- Распределительный закон  $x_1 + x_2 x_3 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3); x_1(x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3$  — дистрибутивности
- Правило Порецкого  $x_1 + \overline{x_1} \cdot x_2 = x_1 + x_2; x_1 \cdot (\overline{x_1} + x_2) = x_1 \cdot x_2$

• **Правило де Моргана**

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \quad \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

✓ Равносильность выражений сохраняется, если входящий в них аргумент заменить одинаковым логическим выражением.

! Для ряда соотношений это поясняет очевидное обобщение формальных соотношений на произвольное число аргументов или произвольную форму части соотношения.

Например, обобщенные законы константы  $\{ЛВ\} + 1 = 1, \{ЛВ\} \cdot 0 = 0,$  обобщение переместительного закона и др.

**Обобщенное правило де Моргана**

$$\overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \dots \cdot \overline{x_n} \quad \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_n}$$

## 2.4. Представление логических функций логическими формулами

ЛФ можно задать таблицей истинности. Произвольное логическое выражение также задает ЛФ от аргументов, входящих в выражение прямо или косвенно (через функции, входящие в выражение). При этом особый интерес – представление ЛФ формулой (суперпозицией элементарных логических операций над аргументами).

✓ Заданная (записанная) логическая формула определяет логическую функцию.

! По заданной формуле можно заполнить ТИ (расчет формулы для каждого набора).

$$y = \frac{(x_1 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + x_2) + \bar{x}_2}{}$$

$$y = (0 + \bar{0}) \cdot (0 + 0) + \bar{0} = 1$$

$$\dots$$
$$y = (0 + \bar{0}) \cdot (0 + 1) + \bar{1} = 0$$

$$\dots$$
$$y = (0 + \bar{1}) \cdot (0 + 0) + \bar{0} = 1$$

$$\dots$$
$$y = (0 + \bar{1}) \cdot (0 + 1) + \bar{1} = 0$$

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y=f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

! Часто можно получить эквивалентные формулы значительно различающиеся по виду. Т.о. ЛФ может быть представлена существенно разными по виду формулами (но эквивалентными).

✓ Ключевые вопросы о представлении ЛФ логическими формулами:

• Можно ли представить любую ЛФ логической формулой, т.е. суперпозицией элементарных логических операций над аргументами (т.е. образуют ли элементарные ЛО функциональный базис)?

! Ответ известен: ДА.

• Как получить формулу для ЛФ, если задана ТИ?

• Т.к. ЛФ может быть представлена разными (эквивалентными) формулами, каковы м.б. критерии оптимальных вариантов и каковы методы нахождения оптимальных вариантов формул?

---

Для краткого рассмотрения "формульного" (аналитического) представления ЛФ целесообразно кратко представить некоторые объекты и термины аналитических исследований АЛ.

✓ Ключевым объектом логических формул является элемент вида  $x_i$  или  $\overline{x_i}$ . Такой произвольный (есть инверсия либо нет) элемент  $i$ -го аргумента (компонента булева вектора) называют "терм". Формально он часто описывается с помощью дополнительной логической переменной  $\sigma_i$

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 1; \\ \overline{x_i}, & \sigma_i = 0. \end{cases}$$

! Конкретный вариант термина  $i$ -го аргумента задается значением дополнительной переменной  $\sigma_i$ .

✓ Логическое произведение/сложение термов называют "**контерм**", или "**элементарная конъюнкция**" / "**элементарная дизъюнкция**"

$$x_i^{\sigma_i} \cdot x_j^{\sigma_j} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \qquad x_i^{\sigma_i} + x_j^{\sigma_j} + \dots + x_k^{\sigma_k}$$

! Контерм включает конкретную переменную только один раз.

!  $\overline{x_i} \cdot \overline{x_j} \cdot \overline{x_k}$ ,  $x_i \cdot \overline{x_j} \cdot \overline{x_k}$ ,  $\overline{x_i} \cdot x_j \cdot \overline{x_k}$ , ... Конкретный вариант контерма задается значениями  $\sigma_i, \sigma_j, \dots, \sigma_k$ .

! Можно задать  $2^{q+1}$  разных вариантов контермов, содержащих  $q$  конкретных переменных ( $2^q$  элементарных конъюнкций и столько же элементарных дизъюнкций).

---

✓ Формула вида

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}$$

(произведение термов всех аргументов) называется "**минтерм**".

✓ Формула вида

$$x_1^{\sigma_1} + x_2^{\sigma_2} + \dots + x_n^{\sigma_n}$$

(т.е. сумма термов всех аргументов) называется "**макстерм**".

! Конкретный вариант минтерма/макстерма задается набором значений  $\{\sigma_i\}$  для всех  $i$ . Для  $n$  аргументов можно задать  $2^n$  разных (неповторяющихся) вариантов минтермов и столько же макстермов (по числу наборов  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ ).

Примеры (минтермы):

$f(x_1, x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$	
$x_1 \cdot x_2$	$\sigma_{1,2} = 1, 1.$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$\sigma_{1,2,3} = 1, 1, 1.$
$x_1 \cdot \overline{x_2}$	$\sigma_{1,2} = 1, 0.$	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$	$\sigma_{1,2,3} = 1, 0, 1.$
$\overline{x_1} \cdot x_2$	$\sigma_{1,2} = 0, 1.$	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$	$\sigma_{1,2,3} = 0, 1, 1.$
$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	$\sigma_{1,2} = 0, 0.$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$	$\sigma_{1,2,3} = 0, 0, 1.$

✓ Конкретный *минтерм* обращается в 1 только для одного набора аргументов, который равен значениям  $\{\sigma_i\}$  данного минтерма:  $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} = 1$  для  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ ,

Для любого другого набора минтерм возвращает 0.

Пример: минтерм  $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$ . Для  $x_1=1, x_2=0, x_3=1, \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 = 1$ . При смене значения любой переменной будет  $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$ .

✓ Указанные свойства минтермов обуславливают правило формирования формулы произвольной ЛФ в виде *суммы минтермов*, обращаящихся в 1 для наборов, для которых функция обращается в 1.

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}) + (x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n}) + \dots, \text{ где } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1; f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 1; \dots$$

Пример (мажоритарная функция "два из трех")

Выбрать наборы,  
где  $f = 1$ .



Записать минтермы,  
дающие 1 для этих  
наборов



Записать сумму этих  
минтермов.

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1 + x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 + x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Для набора, дающего  $f=1$ , соответствующий минтерм в сумме будет равен 1 и вся сумма будет равна "1". Для всех других наборов минтермы суммы равны 0, и вся сумма будет равна 0.

! Представление ЛФ формулой в виде суммы минтермов является *однозначным* (с точностью до перестановки порядка минтермов или перестановки аргументов внутри минтермов).

✓ Представление ЛФ в виде суммы минтермов называют "**совершенной дизъюнктивной нормальной формой**" или "**первой нормальной формой**". Используют аббревиатуру "СДНФ".

! Число слагаемых СДНФ равно числу наборов (числу строк в ТИ), для которых функция равна 1.

! Возможность представления формулы ЛФ в виде СДНФ доказывает, что *элементарные логические операции образуют функционально полный базис*.

! Если в СДНФ минтермов больше половины от возможного их числа (т.е.  $> 2^{n-1}$ ), то более краткой может быть формула в виде инвертированной суммы минтермов (это уже не СДНФ).

Выбрать наборы с  $f = 0$ .

↓

Записать минтермы, дающие 1 для этих наборов

↓

Записать сумму этих минтермов и проинвертировать.

много "0" мало "1" ↓

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} + \overline{x_3 \cdot x_2 \cdot x_1}$$

! Формула под инверсией – СДНФ от инвертированной функции  $\overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} + \overline{x_3 \cdot x_2 \cdot x_1} = \overline{f}$ .

! Для записи произвольной ЛФ всегда достаточно  $2^{n-1}$  минтермов (и м.б. дополнительно инверсия).

✓ Аналогичным образом можно использовать правило формирования формулы произвольной ЛФ в виде **произведения макстермов**, обращающихся в 0 для наборов, для которых функция обращается в 0.

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{\alpha_1} + \dots + x_n^{\beta_n}) \cdot (x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n}) \cdot \dots, \text{ где } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0; f(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0; \dots$$

*Пример (мажоритарная функция "два из трех")*

Выбрать наборы,  
где  $f = 0$ .



Записать макстермы,  
дающие 0 для этих  
наборов



Записать произведение  
этих макстермов.

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + x_2 + x_1) \cdot (x_3 + x_2 + \bar{x}_1) \cdot (x_3 + \bar{x}_2 + x_1) \cdot (\bar{x}_3 + x_2 + x_1)$$

Для набора, дающего  $f=0$ , соответствующий макстерм в произведении будет равен 0 и все произведение будет равно 0. Для всех других наборов макстермы равны 1, и все произведение будет равно 1.

! Представление ЛФ формулой в виде произведения макстермов является *однозначным* (с точностью до перестановки порядка макстермов или перестановки аргументов внутри макстермов).

Представление ЛФ в виде произведения макстермов называют "**совершенной конъюнктивной нормальной формой**" или "**второй нормальной формой**". Используют аббревиатуру "СКНФ".

! Если в СКНФ макстермов больше половины от возможного их числа (т.е.  $> 2^{n-1}$ ), то более краткой может быть формула в виде инвертированного произведения макстермов (это не СКНФ).

много "0" мало "1"

Выбрать наборы с  $f = 1$ .



Записать ммакстермы, дающие 1 для этих наборов



Записать произведение этих ммакстермов и проинвертировать.

$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot (x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1})$$

! формула под инверсией – СДНФ от инвертированной функции  $\overline{(x_1 + x_2 + x_3)} \cdot (x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1}) = \overline{f}$

! Для записи произвольной ЛФ всегда достаточно  $2^{n-1}$  макстермов (и м.б. дополнительно инверсия).