

*...Нелинейность всепроникающая и вездесущая,
многолика и неисчерпаемо разнообразна. Она
повсюду: в большом и в малом, в явлениях
быстротечных и длящихся эпохи. ...*

Ю.А. Данилов

РАЗДЕЛ 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ СРЕДЫ [ОПТИЧЕСКИЕ]

Лиокумович Л.Б.
ВШ ПФиКТ, ИФНиТ, СПбПУ
2018

2.1. СРЕДА С НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

- Приближение линейной среды $P(E) \approx \varepsilon_0 \chi E$ (или $P(E) = T(E)$)

Полуклассическая модель – колебания заряда в атоме по закону *гармонического осциллятора*.

- Общий случай $P(E) = Y(E)$ нелинейная среда (Y – нелинейный оператор).

Полуклассическая модель – колебания заряда в атоме по закону *ангармонического осциллятора*.

✓ **Полиномиальное представление**

$$P(E) = \varepsilon_0 \chi E + \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 + \dots \quad (2.1)$$

! Упрощенная функциональная связь, изотропная и однородная среда без дисперсии.

! Альтернативные обозначения в литературе:

$$P(E) = a_1 E + \frac{1}{2} a_2 E^2 + \frac{1}{6} a_3 E^3 + \dots; \quad P(E) = \varepsilon_0 \chi E + 2dE^2 + 4\chi^{(3)} E^3 + \dots, \quad \text{и др.}$$

При рассмотрении различных эффектов, связанных с нелинейными свойствами среды могут возникать производные или дополнительные коэффициенты. При описании таких явлений часто константы в уравнениях более просто связаны с альтернативными представлениями $P(E)$.

✓ В связи с симметрией/несимметрией внутренней атомно-молекулярной структуры обычно в среде превалирует нелинейность с четными либо нечетными степенями.

- Среда с нелинейностью второго порядка (без центра симметрии):

$$P(E) = \varepsilon_0 \chi E + \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 \quad (2.2) \quad \text{Для оптических сред } \varepsilon_0 \chi^{(2)} \sim 10^{-24} \div 10^{-22} \text{ [Кл/В}^2\text{]}. \\ \chi^{(2)} \sim 10^{-13} \div 10^{-10} \text{ [м/В]}.$$

- Среда с нелинейностью третьего порядка (с центром симметрии):

$$P(E) = \varepsilon_0 \chi E + \varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 \quad (2.3) \quad \text{Для оптических сред } \varepsilon_0 \chi^{(3)} \sim 10^{-34} \div 10^{-28} \text{ [Кл}\cdot\text{м/В}^3\text{]}. \\ \chi^{(3)} \sim 10^{-23} \div 10^{-20} \text{ [м}^2\text{/В}^2\text{]}.$$

- ✓ При проявлении нелинейности не действуют ключевые свойства анализа ЛС:
 - не действует принцип суперпозиции;
 - монохроматическая волна (гармоническое колебание от t) не является модой (и вообще представление о модах несостоятельно).
- ✓ Сложные эффекты линейных оптических сред (линейной модели сред) сохраняются и действуют в значительно более сложном (с учетом нелинейности) варианте:

• Дисперсия (нелокальность реакции среды [поляризации P] во времени)

Простейшая модель: уравнение ангармонического осциллятора:

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \Delta\omega \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P + \omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_0 b P^2 = \omega_0^2 \cdot \varepsilon_0 \chi_0 E; \quad (2.8) \quad \left(b = \frac{K^{(2)}}{q_e^3 \cdot N^2} \right).$$

Нет общего решения, в общем случае нет точного аналитического решения.

Нельзя представить ИФ или ЧХ!!

Если волна включает устойчивый набор монохроматических компонент, то дисперсию можно описать посредством: $\chi = \chi(\omega)$, но $\chi^{(2)} = \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2), \dots$

• Анизотропия. Теперь описывается системой тензоров высших рангов.

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j + \varepsilon_0 \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \varepsilon_0 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Сложно! ОЧЕНЬ сложно и громоздко при рассмотрении анизотропии с дисперсией.
Но можно, и многое проработано!

✓ Примеры подходов к описанию механизмов нелинейной поляризации:

- Классические модели (осцилляции связанных зарядов как ангармонические осцилляторы, "микроскопический" уровень).
 - Квантово-механические модели вещества (влияние классической волны излучения на вещество).
 - Градиентные модели ("макроскопический" уровень, концентрации частиц).
 - Многофотонные модели взаимодействия излучения с веществом.
- ! Вакуум как нелинейная среда (кв. электродинамика высоких энергий).

✓ Подходы к классификации явлений

Параметрические /непараметрические (параметрические /собственно-нелинейные)

! Встречаются разные смысловые интерпретации «параметрических» явлений.

По степеням нелинейной восприимчивости (НЛ второго/третьего порядка)

По описанию через вещественную/мнимую часть нелинейной восприимчивости

По областям влияния/применения (генерация, связь, обработка, переключение и т.п.).

2.2. УСЛОВИЯ ПРОЯВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ СРЕДЫ

✓ Влияние (проявление) нелинейности зависит от **интенсивности** ЭМ излучения

Рост интенсивность излучения → рост напряженности электрического поля, действующего на подвижные заряды).

Оптика:

- Лазерные источники позволяют получать интенсивности, при которых напряженность электрического поля имеет порядок от единиц до сотен кВ/м (и даже выше).
- Внутриатомные поля имеют порядок 10^7 В/м.

Приближение к уровню внутриатомных полей → рост проявления нелинейности.

✓ Механизмы и инерционность поляризации

- смещение электронных оболочек атомов: $10^{-15} - 10^{-14}$ с.
- взаимное смещение положительных и отрицательных ионов : $10^{-13} - 10^{-11}$ с.
- смещение ориентации дипольных молекул: 10^{-10} с.

Для волн оптического диапазона (включая ближний ИК) основную роль играет **электронная поляризация.**

✓ **Интенсивность** излучения ЭМВ

Интенсивность излучения:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{\langle E \rangle^2}{2} = \frac{\langle E \rangle^2}{2\eta} \quad [\text{Вт/м}^2]; \quad (2.4)$$

$$\eta = \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{n} \quad \text{– импеданс среды [Ом].}$$

! Для свободного пространства: $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377 \text{ [Ом]}$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ [Ф/м]}; \quad \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ [Гн/м] или [Н/м}^2\text{].}$$

! Близко к мощности (часто применяют как эквиваленты), но отличается.

✓ **Оценки относительного уровня нелинейной компоненты** поляризации.

a – порог относительного уровня НЛ компоненты: $P^{(НЛ)} > a \cdot P^{(Л)}$.

• Оценки требуемой **интенсивности** ЭМВ:

$$\varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2 > a \cdot \varepsilon_0 \chi E \Rightarrow E > a \cdot \frac{\chi}{\chi^{(2)}} \Rightarrow I > \frac{a^2}{2\eta} \cdot \left(\frac{\chi}{\chi^{(2)}} \right)^2 \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_0 \chi^{(3)} E^3 > a \cdot \varepsilon_0 \chi E \Rightarrow E^2 > a \cdot \frac{\chi}{\chi^{(3)}} \Rightarrow I > \frac{a}{2\eta} \cdot \frac{\chi}{\chi^{(3)}} \quad (2.6)$$

- Оценки требуемой **мощности** ЭМВ:

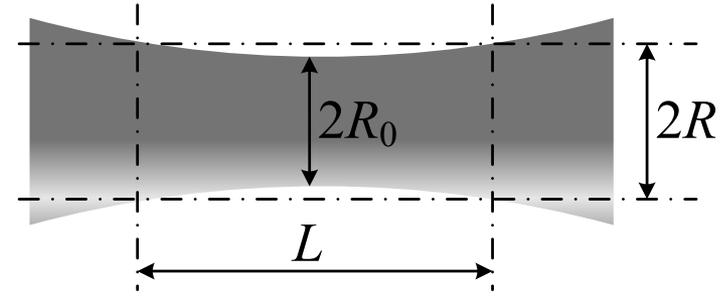
$$W = I \cdot S \leftrightarrow I = W/S.$$

дифракционный предел расходимости:

- угловая расходимость $\psi \sim \lambda/R_0$;
- диаметр пучка $R \sim L \cdot \psi \sim L \cdot \lambda/R_0 \rightarrow$ при $R_0 \sim R$:
- длина эффективного взаимодействия:

$$\boxed{L \sim R^2/\lambda}. \quad (2.7)$$

! дифракционный предел $R_{min} \sim \lambda/2n$



✓ Влияние (проявление) нелинейности зависит от **длины взаимодействия**.

При одном и том же относительном уровне a результат действия нелинейности зависит от протяженности (длительности) влияния нелинейного эффекта на распространение ЭМВ.

Параметр эффективности нелинейного процесса: $I \cdot L = L \cdot W / R^2 \sim W / \lambda$.

- для объемной оптики $I \cdot L \sim W / \lambda$.
- для волноводов (оптическое волокно) оптики $I \cdot L \sim (W_0/2\pi r^2) \cdot L$.

! В оптическом волокне возможно усиление результата на порядки!

Несмотря на слабую нелинейность 3-го порядка в кварце, нелинейные эффекты в протяженных оптических волокнах могут быть значительны как с точки зрения их влияния на распространение света, так и в плане преднамеренного использования.

! Для конкретных проявлений нелинейности (для проявления тех или иных конкретных нелинейных эффектов) могут требоваться дополнительные условия.

2.3. УРАВНЕНИЯ

Значительную часть разнообразных эффектов, имеющих место при распространении ЭМВ в нелинейных средах м.б. объяснено и описано в рамках классического подхода при учете модели нелинейной зависимости $P(E)$.

$P(E) = \varepsilon_0 \chi E + P^{(НЛ)}$, $n^2 = 1 + \chi$, $c = c_0/n \rightarrow$ поправка к ВУ в линейной среде:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P^{(НЛ)}}{\partial t^2}; \quad (2.10)$$

Как правило, для рассмотрения волн (не только для ЭМВ) в более определенных условиях можно свести анализ к рассмотрению более конкретных уравнений.

! Есть группа наиболее часто анализируемых типов уравнений – *эталонные уравнения* для волн в нелинейных средах.

Простейший случай (одномерный, однородный, изотропный, пренебрежение диссипацией и дисперсией) приводит к нелинейному волновому уравнению вида

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c(E)^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0; \quad (2.11)$$

Это нелинейное уравнение! Поиск решений – сложная проблема математической физики (даже в этом простом случае).

! Обычно рассмотрение не может быть ограничено анализом уравнения вида (2.11).

✓ Характерные приемы по получению уравнений для волн в нелинейных средах (т.н. **эталонные уравнения**).

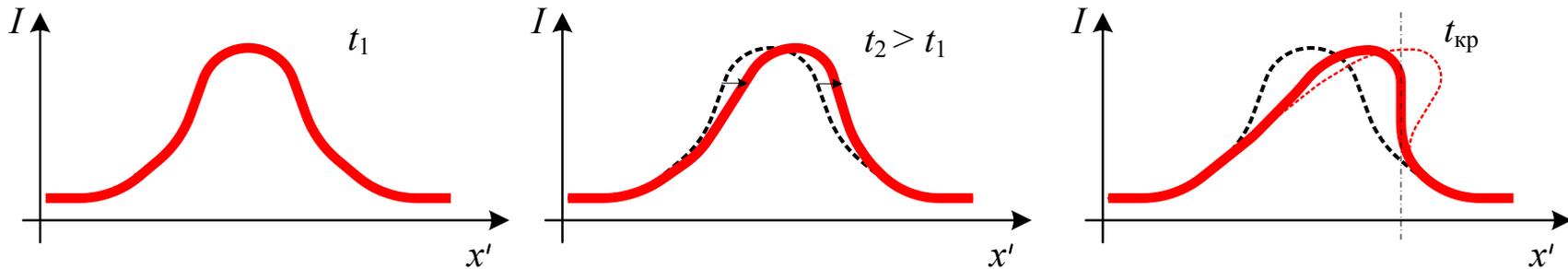
Обычно рассматривают одноволновое уравнение (1.17) с обобщением на нелинейный случай аналогично (2.11)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v(u)} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (2.12) \text{ – т.н. уравнение простой волны.}$$

Далее: $v(u) = v_0 + a \cdot u$ и переход в систему отсчета $x' = x - v_0 \cdot t$, и $U = a \cdot u \rightarrow$ уравнение простой волны в системе координат, движущейся со скоростью v_0

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.13)$$

Укручение фронтов (для решений импульсного вида) \rightarrow Сложные и нефизические свойства решений \rightarrow необходимость учета дисперсии и диссипации.



Учет дисперсии, $\omega = k \cdot v(k)$. При анализе разложения $v(k)$ с учетом требования физичности и отсутствия диссипации получают

$$\omega = v_0 k + \beta k^3, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Уравнение Кортевега - де Фриза (КдФ):
$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0. \quad (2.14)$$

Рассмотрение ситуаций, когда присутствует существенная диссипация без дисперсии приводит к $\omega = v_0 k + i\alpha k^2$ и

Уравнение Бюргерса:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (2.15)$$

Уравнение Кортевега-де Фриза – Бюргерса, уравнение sin-Гордона и др. Сложный характер поведения волновых решений и искажений ВК в ходе распространения. Специфические стационарные решения (солитоны) и т.п. и т.д.

Для ЭМВ СВЧ и оптического диапазона своя специфика. Характерно рассмотрение огибающих квазимонохроматических несущих компонент.

При определенных допущениях получают уравнения для КА или для огибающих. (нелинейное уравнение Шредингера для огибающей в оптическом световоде)

2.4. АНАЛИЗ ЗАДАЧ О РАСПРОТСРАНЕНИИ ВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ (ИЛИ НАБОРА ВОЛН)

Что считать волновым колебанием? $u(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cdot G\left\{v \cdot t - \left[\vec{k}(\vec{r})/k\right] \cdot \vec{r}\right\}$

Идеальная волна:

$A(\vec{r})$ – «медленно» меняющаяся функция,

$G(x)$ – «быстро» осциллирующая функция. $G(x) = G\left(\left[\vec{k}(\vec{r})/k\right] \cdot \vec{r}\right)_{t=0}$, $G(x) = G(t)_{\vec{r}=0}$,

Монохром. ВК: $G(x) = \cos\left[\vec{k}\vec{r} - \omega t\right] = \cos\left[-\omega t + \Phi(\vec{r})\right]$

✓ В линейной среде:

- Монохроматическая ЭМВ (мода в части зависимости от t), $G(x)$ при распространении не меняется (либо меняется медленно по сравнению с λ).

Интересует изменение A и Φ , распределение КА по пространству. Изменение A и Φ вследствие неоднородностей и диссипации.

- Несколько квазимонохроматических волн – суперпозиция (нет влияния друг на друга).

- Волновой пакет: гармоническое заполнение и импульсная огибающая. $G(x)$ медленно меняется (дисперсия). Интересует: изменение огибающей при распространении в пространстве [основное], форма/искажение заполнения [чирп, возможность компенсации дисперсии, сжатия импульсов и т.д.].

✓ **В нелинейной среде:**

- Монохроматическая волна (?)

Нелинейные искажения → гармоники. Формирование гармоник.

- Волны с устойчивым дискретным набором спектральных компонент (стационарные).

При нелинейности → возможность устойчивого существования, учет взаимовлияние волн разных частот, с учетом формирования комбинационных частот, и т.п.

- Волновой пакет.

Все те же вопросы, что и в линейных средах + но с учетом особенных эффектов характерных только для нелинейности.

В оптическом (и около-оптическом) диапазоне важна огибающая и ее изменение (форма заполнения важна только в части механизма изменения огибающей).

! Всегда две части:

- Как нелинейность влияет (негативно, позитивно) на традиционные процессы в устройствах и системах использующих распространение ЭМВ?
- Как нелинейные эффекты могут быть использованы для создания нужных технических устройств и систем?

2.5. ПОДХОДЫ К РАССМОТРЕНИЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭМВ В НС

• Приближение первой итерации

Есть основная ЭМВ в линейном приближении \rightarrow нелинейная компонента поляризации (слабая)
как источник дополнительных колебаний

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P^{(нл)}}{\partial t^2};$$

- Можно качественно объяснить ряд явлений (формирование гармоник и комбинационных частот);
- Не учесть влияние компонент исходной волны друг на друга; влияниями доп. излучения на исходную волну и т.п.; влиянием новых компонент друг на друга (при определенных условиях приемлемо, т.к. влияния нет).
- Не дает обоснованных уверенных количественных оценок и расчетов пространственных зависимостей, на практике не выполняются условия 1-й И;



• Метод связанных волн

Известна обоснованная устойчивая структура спектра (набор монохроматических волн) \rightarrow система связанных уравнений Гельмгольца \rightarrow Уравнения связанных волн для КА

- Решение нелинейных ВУ (уравнений для огибающих).
- Квантовые эффекты, фотонные преобразования и т.п. и т.д.

2.6. ЭФФЕКТЫ/ЯВЛЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭМВ В НС

Параметрические взаимодействия

(среда влияет на обмен энергией между компонентами ЭМВ, но среда не поглощает [переизлучает] энергию за счет нелинейных частей поляризации; нет изменения энергетического уровня частиц, взаимодействия с ВК частиц среды)

- Формирование гармоник и комбинационных частот.
- Оптическое детектирование. Электрооптические явления (эффект Погкельса и Кьерра).
- Взаимовлияние квазимонохроматических компонент (трехволновое и четырехволновое смешение).
- Самовоздействие и кроссвоздействие (наведенная ФМ через изменение n).
- Усиление и преобразование оптической частоты.
- Обращение волнового фронта.
- Солитоны.
- Спонтанное параметрическое рассеяние.

Непараметрические взаимодействия

- Нелинейное неупругое рассеяние, вынужденное рассеяние.
 - Многофотонное поглощение (затемнение, просветление и др.)
 - Вынужденное и спонтанное излучение в среде с инверсной населенностью (насыщение при усилении или поглощении).
 - Нелинейная среда + усиление: т.н. суперконтинуум.
 - Нелинейная среда + обратная связь: оптическая бистабильность.
-

✓ **Параметрические явления** могут быть в существенно мере рассмотрены в рамках классических представлений (при заданной модели нелинейной связи $P(E)$).

Могут быть относительно простые или очень сложные ситуации из-за:

- Корректного учета дисперсии и анизотропии.
- Проблема корректного анализа и решения нелинейных уравнений (уточнение уравнений)
- Проблема интерпретации явлений при сложной трансформации параметров ЭМВ.

✓ **Непараметрические явления** могут быть частично рассмотрены в рамках полуклассических представлений, при этом требуются нетривиальные модели для описания взаимодействия ЭМВ и среды.

Более строгое/полное описание на основе привлечения квантовой теории, для описания взаимодействия излучения с частицами среды.

! В данном кратком курсе рассматриваем в основном параметрические явления.