1.8. Электромагнитные волны

✓ Уравнения Максвелла в свободном пространстве (без зарядов)

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}; \quad \nabla \times H = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}; \quad \nabla \cdot E = 0; \quad \nabla \cdot H = 0. \qquad \textbf{(1.28)}$$

ε_0 – диэлектрическая / μ_0 – магнитная постоянная (проницаемость).

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \text{ [Ф/м]}, \quad \mu_0 = 1{,}256637 \cdot 10^{-6} \text{ [Н/А] или [Гн/м]}.$$

Выполнение УМ соответствует требованию, что $E_{x,y,z}$, $H_{x,y,z}$ удовлетворяют УД

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0; \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

$\nabla \times (\mathrm{I})$ & $\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \cdot (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$ + (II) & + (III)

✓ Уравнения Максвелла в среде без свободных зарядов (непроводящая среда)
[! макроскописеская теория]

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial B}{\partial t};\; \nabla \times H = \varepsilon_0 \frac{\partial D}{\partial t};\; \nabla \cdot D = 0;\; \nabla \cdot B = 0.$$

$D = \varepsilon_0 E + P$ $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ (мат. уравнения) + граничные условия

! Линейная среда без дисперсии: $D = \varepsilon \cdot E$; $B = \mu \cdot H$.

! $P = \varepsilon_0 \chi E \;\rightarrow\; D = \varepsilon E = \varepsilon_0(1+\chi)\cdot E$, $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi)$, $1+\chi=\varepsilon/\varepsilon_0$.

Однородная, изотропная немагнитная ($M = 0$, $\mu= \mu_0$) среда, ВУ для E

$$\boxed{\nabla^2 E - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2};} \quad \textbf{(1.29)}$$

Учет $P = \varepsilon_0 \chi E$ $\rightarrow$ $$\boxed{\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0;} \quad \textbf{(1.30)} \qquad c = \frac{c_0}{n}, \qquad n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} .$$

1.8.1. Гармонические (монохроматические) ЭМВ

$$E_{x,y,z}\left(\vec{r},t\right)=\mathrm{Re}\left[\dot{E}\left(\vec{r}\right)\cdot e^{j2\pi\cdot\nu\cdot t}\right]$$

Уравнения М. для КА: ($\omega = 2\pi\ \nu$):

$$\nabla\times\dot{E}=-j\omega\dot{B};\ \nabla\times\dot{H}=-j\omega\dot{D};$$

$$\nabla\cdot\dot{D}=0;\ \nabla\cdot\dot{B}=0.$$

Линейная, недиспергирующая, однородная, изотропная немагнитная среда:
→ получится такое же (как и в других типах волн) уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{E}+k^2\dot{E}=0 \qquad k = nk_0 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$$

Базовые типы волн традиционные,
но (!) + рассмотрение и учет поляризации.
! В однородной, изотропной, непроводящей среде вектора *E* (как и *H*)
перпендикулярны друг другу и направлению распространения (вектор *k*).

1.8.2. ЭМВ в неоднородной среде

✓ Параметры среды зависят от координат.

Линейность: $P = \varepsilon_0\chi E$ и $D = \varepsilon E$, но зависимость от координат $\chi = \chi(\vec{r})$, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$

$$\boxed{\nabla^2 E + \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon \cdot E\right) - \mu_0\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \approx \nabla^2 E - \frac{1}{c(\vec{r})^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0;} \quad \textbf{(1.31)}$$

! Условие: $\nabla\varepsilon\downarrow 0$, т.е. ε меняется достаточно медленно от координат.

! ВУ, к котором фазовая скорость зависит от координат:

$$\frac{1}{c(\vec{r})} = \frac{n(\vec{r})}{c_0} = \frac{1}{c_0}\sqrt{\frac{\varepsilon(\vec{r})}{\varepsilon_0}}$$

уравнение Гельмгольца то же, но с $k = n(\vec{r})\, k_0$

! Альтернативные задачи. Дифракция на неоднородностях.

Рассеяние на слабых микронеоднородностях (плотности): $n(\vec{r}) = n + \delta n(\vec{r})$

волна в однородной среде + источник, задаваемый полем и неоднородностью δn

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\left\{\mu_0\left[2\varepsilon_0 n \cdot \delta n(\vec{r})\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}E\right\}; \quad \textbf{(1.32)}$$

1.8.3. ЭМВ в среде с дисперсией

✓ Исходная природа явления: нелокальность реакции во времени (пространстве).

$$P(t) = T[E(t)].$$

Линейная связь между P и E, $T[x(t)]$ линейный оператор → связь P и E – ДУ / ИУ.

Надо подставить ИУ или ДУ в Уравнения Максвелла → модифицированное ВУ?

? Дифференциальные ВУ, компоненты которых связаны другим ДУ. Сложно!

Для гармонических ЭМВ описание упрощается!
P и E – гармонические колебания, КА связаны через ЧХ системы $H(\nu)$ (система задается оператором T), т.е. связь опять через константу, но зависящую от частоты

$$\dot{P} = \varepsilon_0 \chi(\nu) \dot{E}, \quad \rightarrow \quad \text{УГ с } k = \omega\sqrt{\varepsilon(\nu)\mu_0}.$$

Зависимость ε, n, k, c от частоты – дисперсия.
Дисперсионное соотношение $\omega = W(k)$. (Если нет дисперсии – $\omega = c \cdot k$).

! $H(\nu)$ – д.б. комплексной функцией (соотношение Крамерса-Кронинга).
в итоге $k(\nu) = \mathrm{Re}(\nu) + j\mathrm{Im}(\nu) = \beta(\nu) + j\alpha(\nu)/2$.

Дисперсия ↔ Затухание

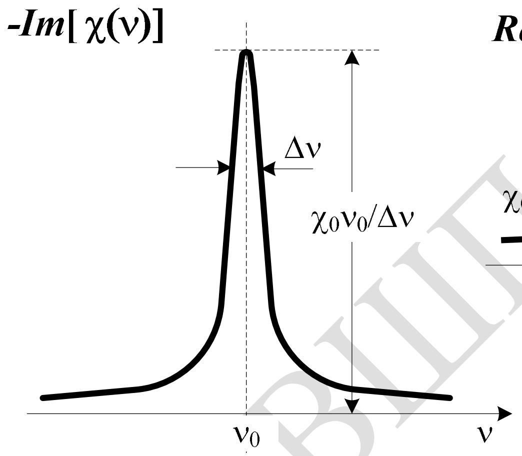
Оператор $P=T[E]$ – взаимодействие ЭМ поля с веществом
(квантовая/полуклассическая/классическая теория)

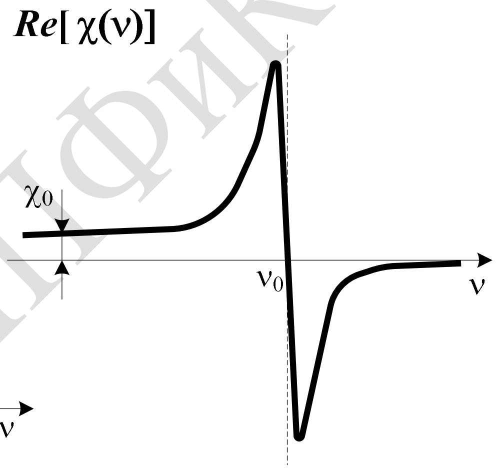
✓ Классическая теория Лоренца. Колеблющиеся заряды в среде (поле E индуцирует смещение заряда подвижных электронов в атоме и дипольный электрический момент), закон гармонического осциллятора.

$$\boxed{\frac{d^2P}{dt^2}+\Delta\omega\frac{dP}{dt}+\omega_0^2P=\omega_0^2\cdot\varepsilon_0\chi_0E} \quad \textbf{(1.33)} \qquad \chi_0=\frac{N\cdot q_e}{m_e\varepsilon_0\omega_0^2}; \quad \omega_0=\sqrt{\frac{K}{m_e}}=2\pi\cdot\nu_0;$$

N, m_e, q_e – число, масса и заряд электронов; K – жесткость, $\Delta\omega$ – затухание.

$$\chi(\nu)=\frac{\chi_0\cdot\nu_0^2}{\nu_0^2-\nu^2+j\Delta\nu\cdot\nu}$$ – резонансная АЧХ с Лоренцевой линией.





$$\alpha(\nu)\approx-\frac{2\pi}{n_0c_0}\cdot\mathrm{Im}[\chi(\nu)]$$ – затухание.

$$n(\nu)=n_0+\frac{\mathrm{Re}[\chi(\nu)]}{2n_0}$$ – фазовая скорость.

Реальные оптические среды обычно среды с несколькими резонансами.

$$n^2 = 1 + \chi \;\rightarrow\; n(\nu)^2 = 1 + \sum_i \chi_{0i} \frac{\nu_{0i}^2}{\nu_{0i}^2 - \nu^2} \quad \text{или} \quad n(\lambda)^2 = 1 + \sum_i \chi_{0i} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0i}^2} \qquad \mathbf{(1.34)}$$

(Формула Зельмеера)

Кварц: λ_{01} = 9,986 мкм; λ_{01} = 0,116 мкм и λ_{01} = 0,0684 мкм.

✓ Влияние дисперсии на распространение ЭМВ

1. $\beta = \beta(\omega)$, фазовая скорость монохроматического ВК зависит от частоты.

2. Импульсная огибающая (τ_0) → квазимонохроматическая волна (волновой пакет).

?: *распространение ВП (изменение огибающей)*

Центральная частота ω_0, для нее $c(\omega_0)=\sqrt{\varepsilon(\omega_0)\mu_0}$; $\beta(\omega_0) = \omega_0/c(\omega_0)$, $\Delta\nu \sim 1/\tau_0$

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}\delta\omega + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\delta\omega^2 + \ldots \qquad\qquad n(\lambda) = n(\lambda_0) + \frac{dn}{d\lambda}\delta\lambda + \frac{d^2 n}{d\lambda^2}\delta\lambda^2 + \ldots$$

! Ширина спектра м.б. ограничена не только конечной τ_0, но и спектром источника

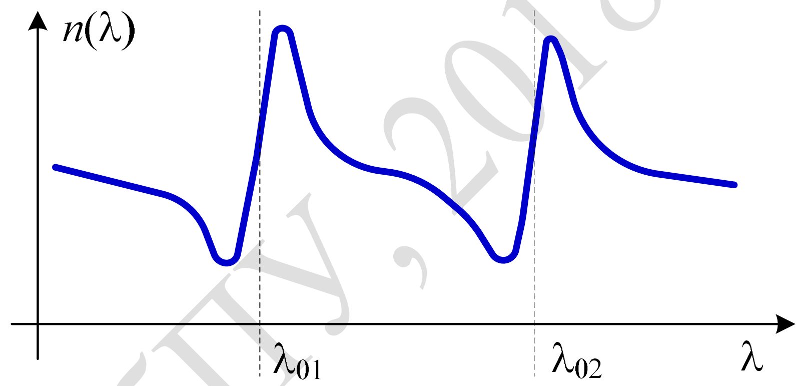
- Слабодиспергирующие среды (только первая производная). Групповая скорость.

$$c_г = \left.\frac{1}{d\beta/d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}; \quad c_г = \frac{c(\omega_0)}{n_г} \quad \mathbf{(1.35)} \;; \qquad n_г = n(\lambda_0) - \lambda_0 \left.\frac{dn(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} \quad \mathbf{(1.36)}$$

! Скорость распространения информации (форма огибающей не меняется)

$c_г < c$ – нормальная дисперсия

$c_г > c$ – аномальная дисперсия (в области резонанса)



• <u>Среды с дисперсией групповых скоростей (ДГС)</u>

$$D_\nu = 2\pi \cdot \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2};\ D_\lambda = -\left(\frac{c_0}{\lambda_0^2}\right)\cdot D_\nu \quad \textbf{(1.37)}$$

$D_\nu > 0$ ($D_\lambda < 0$) – НД (вдали от резонансов), $D_\nu < 0$ ($D_\lambda > 0$) – АД (области резонанса).

! Изменение формы огибающей. Уширение импульсов.

при достаточно больших расстояниях: $\tau \sim |D_\nu| \cdot \Delta\nu \cdot z$ **(1.38)**

• <u>Среды/области со сложной дисперсией</u>.
Учет "волноводной" дисперсии. Области нулевой ДГС (в волноводе/среде)
Область резонанса. Метаматериалы.

1.8.4. Состояние поляризации ЭМВ

! Не путать с поляризацией среды *P* под действием поля *E*.

Напряженность эл. поля *E* – вектор → как направлен при ВК?

✓ Можно доказать, что в изотропной среде должен быть ⊥ к векторам *k* и *H*.

✓ Если каждая компонента $E_{x,y,z}$ претерпевает гармонические волновые колебания + сдвиг начальных фаз → можно показать, что в общем случае:

- конец вектора *E* (в фиксированной точке) описывает эллипс (в течение каждого периода);
- конец вектора *E* (в фиксированный момент) описывает вдоль направления распространения волны спиралевидную траекторию с шагом λ (проекция на плоскость ⊥) к направлению распространения – эллипс.

! При фиксированном эллипсе (задается направлением и величиной осей) важно различать направление вращения.

! В однородной изотропной среде состояние поляризации не изменяется вдоль направления распространения волны.

! Важные вырожденные случаи:

- линейная поляризация (эллипс вырожден в отрезок), важно направление отрезка;
- круговая поляризация (эллипс вырожден в круг), важно направление вращения (правое/левое).

✓ Состояние поляризации задается двумя вещественными параметрами (при фиксированном направлении распространения и фиксированной плоскости эллипса):

- отношение осей эллипса;
- угол направления оси (например, большой).

! В вырожденных случаях один параметр становится ненужным (вырождается).

✓ Можно определить т.н. "ортогональные СП" (две ЛинП с $\perp$ направлениями; две КрП с разными направлениями вращения, можно каждой ЭллП сопоставить ортогональную).

! Любое состояние поляризации можно представить суперпозицией двух волн (с одним направлением распространения) с ортогональными состояниями поляризации (базис). Они не интерферируют (интенсивности складываются).
При фиксированных базисных состояниях, достаточно задать соотношение амплитуд и разность фаз базисных ортогональных состояний (опять же два параметра!).

✓ Формализм, описывающий СП и изменение СП после прохождения через линейную оптическую систему – формализм векторов и матриц Джонса.
! Вектор Джонса содержит два в общем случае две комплексных компоненты (так удобнее, содержится доп. информация об амплитуде и начальной фазе ВК, при определенных нормировках вектор содержит только два независимых вещественных параметра и отражает только информацию о СП). Преобразование ВДж описывается матрицами Джонса 2x2.

✓ В общем случае ЭМВ может быть *неполяризована* или *частично поляризована*.
• Идеально монохроматическая волна всегда полностью поляризована.
• Если волна некогерентна (на анализируемом интервале времени), то она может быть как поляризованной по определенному СП, так и неполяризованной – т.е. СП меняется быстро (по отношению к времени анализа) и случайно. Промежуточный вариант – частичная поляризация (смесь поляризованного и неполяризованной компоненты).

1 > степень поляризации > степень когерентности > 0

! Частично поляризованная ЭМВ описывается в формализме векторов и матриц Мюллера.

1.8.5. ЭМВ в анизотропной среде

✓ В анизотропных средах фазовая скорость гармонического ВК зависит от поляризации и от направления распространения! СП может не сохраняться вдоль направления распространения волны.

! Исходная причина анизотропии среды связана с анизотропией внутренней структуры (молекулярной, кристаллической и т.п.) материала.
! М.б. наведенная анизотропия среды (например – деформация среды при сжатии).

✓ Формально учет анизотропных свойств означает то, что связь векторов P и E задается не константой, а тензором!
! Обычно при рассмотрении анизотропии стараются не рассматривать инерционность (дисперсию) и наоборот (в общем случае становится очень сложно).

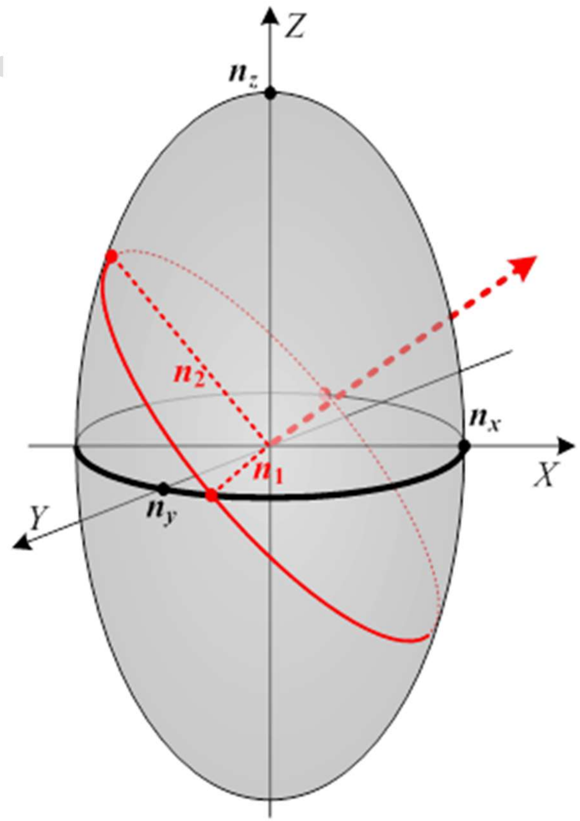
$$D_{x,y,z} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{i,j} E_{x,y,z} \quad \textbf{(1.39)}$$

! Чаще всего есть симметрия, т.е. только 6 независимых компонент (иногда еще меньше, за счет доп. нулевых компонент и связей).

! При связи (1.39) вектора D и E могут быть направлены по-разному. Вектора H и E остаются $\perp$. Также B, H и $D \perp k$ (а $\boldsymbol{E}$ нет). Но теперь перенос энергии (ExH)/2, групповая скорость не вдоль k (т.е. не поперек поверхности равных фаз).

✓ Из анализа распространения ЭМВ с учетом (1.39) следуют следующие выводы о зависимости фазовой скорости от направления распространения и СП:

• Тензор [ε] однозначно связан с эллипсоидом показателей преломления [**n**]. Он задается направлениями и величиной осей. В системе координат, согласованной с осями эллипса задается значениями на осях n_x, n_y, n_z.



• Можно доказать, что для заданного направления распространения ВК есть два перпендикулярных линейных СП, которые распространяются без изменения СП (т.н. поляризационные моды, в данном случае с линейными СП) с фиксированными фазовыми скоростями, т.е. с показателями преломления n_1, n_2.

Произвольное СП будет меняться при распространении. Удобно рассматривать разложение на две моды и рассматривать их распространение (в любой точке можно рассмотреть СП как суперпозицию двух базисных)

• Связь n_1, n_2 с эллипсоидом п\п:

Для заданного направления распространения ВК строится плоскость, содержащая центр эллипсоида и ⊥ этому направлению. Сечение эллипсоида плоскостью дает эллипс, величина полуосей дает n_1 и n_2 а их направления – ориентацию СП мод.

Если ВК вдоль X, то поляризационные моды ориентированы по Y, Z (n_x, n_z) и т.д.

✓ Главные оптические оси.

Есть два направления (симметричные относительно оси Z) для которых $n_1=n_2$. Для этих направлений любое СП не изменяется (как в изотропном случае). Это главные оптические оси среды.

✓ Одноосные анизотропные среды.

Для многих материалов эллипс п\п является эллипсоидом вращения – $n_x = n_y$.
Тогда направление вдоль Z – единственная главная оптическая ось (если поперечник эллипсоида в пл. XY переходит в окружность - две ось вырождаются в ось Z).

• Моду, поляризованную в плоскости XY, называют обыкновенной волной ($n_1= n_о$).
$n_о$ не зависит от угла к XY, вектора D и E || и друг другу ⊥ вектору k.
• Другую моду называют необыкновенной волной ($n_2= n_н$).
$n_н$ зависит от угла к XY, вектора D и E не ||.

✓ В волноводных структурах:

• При симметричной поперечной структуре СП сохраняется.
• При несимметричной поперечной структуре формируется т.н. анизотропный волновод с двумя поляризационными модами (м.б. не с линейными СП).
– Можно за счет анизотропии материала.
– Можно за счет несимметрии формы поперечного сечения.