"Весь первый этаж был занят отделом Линейного Счастья" ...
А.Стругацкий, Б.Стругацкий,
повесть "Понедельник начинается в субботу"

РАЗДЕЛ 1

Волновые колебания в линейных средах

• Линейные операторы и линейные системы.
• Основные свойства волновых колебаний в линейных средах.
• Электромагнитные волны в линейных средах.
• Оптические линейные среды (диэлектрические, непроводящие, немагнитные, с малым затуханием)

Лиокумович Л.Б. ВШ ПФиКТ, ИФНиТ,
СПбПУ 2018

1.1. Линейный оператор

! функция / функционал / оператор

✓ Определение ЛО *T*(*f*)

1) $T\left[f(x_1, x_2 \ldots x_N) + g(x_1, x_2 \ldots x_N)\right] = T\left[f(x_1, x_2 \ldots x_N)\right] + T\left[g(x_1, x_2 \ldots x_N)\right];$

2) $T\left[a \cdot f(x_1, x_2 \ldots x_N)\right] = a \cdot T\left[f(x_1, x_2 \ldots x_N)\right].$

(1.1)

свойства "*аддитивности*" и "*однородности*"

Типовая структура линейного оператора:

• суммарно разностные комбинации дифференциально-интегральных операторов,

• коэффициенты, не зависят от искомой функции.

$$G_{Mx}\frac{\partial^M}{\partial x^M}\left(Q_{Mx}\cdot f\right) + \ldots + G_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\left(Q_{1x}\cdot f\right) + G_{Nt}\frac{\partial^M}{\partial t_t^M}\left(Q_{Mt}\cdot f\right) + \ldots + G_{1t}\frac{\partial}{\partial t}\left(Q_{1t}\cdot f\right) + Q_0\cdot f + {}$$

$$+\iint h\left(x - x', t - t'\right)\cdot f\left(x', t'\right)dx'dt' \qquad \textbf{(1.2)}$$

! $G_m(x, t\ldots)$, $Q_m(x, t\ldots)$ не зависят от f. Свободной константы нет.

! Структуру (1.2) можно привести к только интегральной форме (с использованием специальных функций).

? Найти *примеры* нелинейной функциональной связи $y = g(x)$, так что бы:
- не выполнялись свойства 1) и 2);
- выполнялось свойство 1), но не выполнялись свойство 2);
- выполнялось свойство 2), но не выполнялись свойство 1);

✓ Можно рассматривать применение ЛО к набору функций

Векторные и матричные представления;

Запись систем уравнений;

ЛО для векторов [тензоров], векторных функций и т.п..

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots \\ T_{21} & T_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_{\dots} \end{pmatrix}$$

1.2. Линейное рассмотрение физических систем

физические законы	→	**уравнение (системы уравнений) для искомой величины (величин)**	→	**линейные приближения**

! В абсолютном большинстве случаев даже простые исходные уравнения физических систем не являются линейными. Обычно линейное описание физических систем – результат приближенного представления описывающих ее физических законов!

✓ **Линейная физическая система** (приближенная модель реальной системы) – система, описываемая линейными уравнениями (с ЛО).

В большинстве случаев

- Переменные: время + пространственные координаты.
- Искомая функция – решение линейного уравнения:

✓ **Однородное линейное уравнение**

$$T\left[f(x,y,z,t)\right]=0 \quad \textbf{(1.3)}$$

✓ **Неоднородное линейное уравнение (с возмущением)**

$$T\left[f(x,y,z,t)\right]=Q(x,y,z,t) \quad \textbf{(1.4)}$$

! Для решения нужны начальные условия (для ограниченной области и граничные условия).

✓ Система может описываться набором функций и системой линейных уравнений для этих функций.

Например:
Система N связанных осцилляторов (шарики, связанные пружинами).
Одномерная задача: $x_i(t)$ – смещения осцилляторов от равновесных положений. Силы, возвращающие осциллятор связаны с положением соседних осцилляторов
В общем случае:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \ldots + m_{1N}x_N \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \ldots + m_{2N}x_N \\ \ldots \\ \dfrac{d^2x_N}{dt^2} = m_{N1}x_1 + m_{N2}x_2 + \ldots + m_{NN}x_N \end{cases}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} \\ \ldots \\ \dfrac{d^2x_N}{dt^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{N1} & m_{N2} & \ldots & m_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}$$

закон изменения векторной величины
$\{f_x(t), f_y(t), f_z(t)\}$ или $\{f_x(x, y, z, t), f_y(x, y, z, t), f_z(x, y, z, t)\}$
и т.д. и т.п.

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots \\ T_{21} & T_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \end{pmatrix} = 0$$

✓ Ключевое свойство линейных систем (описываемых ЛО), задаваемое непосредственно в определении ЛО:

<u>ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ!</u>

линейная комбинация решений уравнений ЛС так же является решением

f_1 – решение
f_2 – решение
… $\rightarrow$ $a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + \ldots + a_N \cdot f_N$ – решение
f_M – решение

Характерный подход в анализе линейных систем:

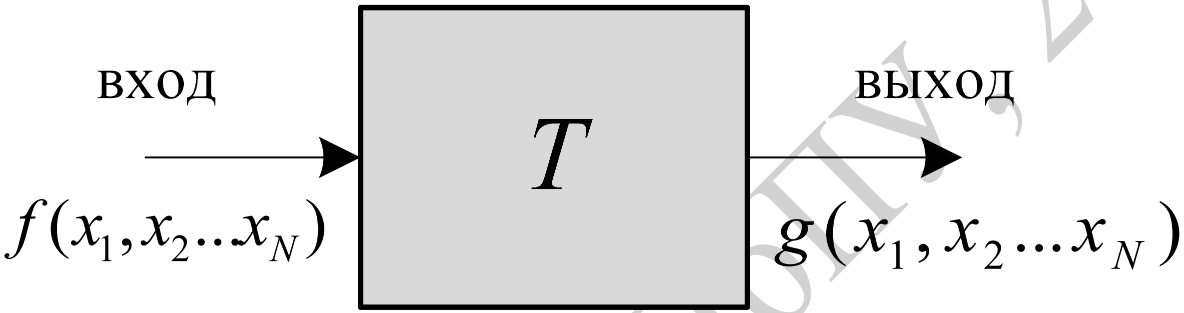
$$g = \sum_i f_i; \qquad g = \int_q f(q)dq.$$

представление решения в виде суммы известных (удобных, изученных) решений, либо интегрального представления по известным (удобным) решениям.

! Если в какой-то точке ($\mathbf{r}$, t) К задано (вход ЛС), а в другой хотим найти (выход ЛС), то *вместо линейных уравнений* (с нач. и гр. условиями) можно задать:

- характеристики (от $\mathbf{r}_{\text{вх}}$, $\mathbf{r}_{\text{вых}}$ и t), *полностью* определяющие свойства системы;
- линейные *операторы связи входного и выходного* колебаний!

1.3. Линейная система преобразования сигнала (входной сигнал → выходной сигнал)



Связь входного и выходного сигналов описывается ЛО:

$$g(x_1, x_2 \ldots x_N) = T\left[f(x_1, x_2 \ldots x_N)\right].$$

В общем случае g и f могут быть векторными функциями

! В некоторых системах может рассматриваться связь векторов-констант (преобразование состояния поляризации и т.п.).

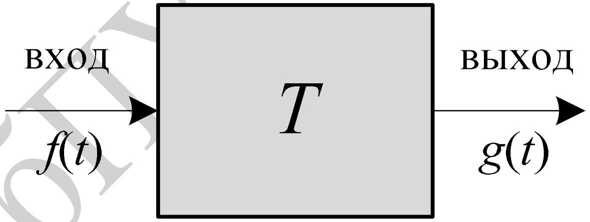
✓ <u>Одномерная ЛС</u>

радиофизика, радиотехника: обычно сигналы – функции времени.

а) Описание во временной области:

Импульсная функция $h(t, \tau)$ непосредственно задает "НЕ локальность" по времени

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau) f(\tau) d\tau. \quad \textbf{(1.5)}$$



! На выходной сигнал влияют значения входного в другие моменты времени, $h(t, \tau)$ – вес вклада в текущий выходной сигнал входного сигнала в момент τ.

<u>Связь выходного и входного сигналов</u>:

• <u>Стационарная система</u> (инвариантная относительно сдвига) $h(t,\tau) = h(t - \tau)$.

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad \textbf{(1.6)}$$

• <u>Причинная стационарная ЛС</u> $h(t) = 0$ при $t < 0$ (без задержки)

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad \textbf{(1.7)}$$

! Не стационарная причинная система (без задержки) $h(t, \tau) = 0$ при $\tau - t < 0$

б) Описание в частотной области:

Решение в виде гармонического колебания

$$f(t) = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left(\dot{A}\, e^{-j\omega t} \right) = \frac{1}{2}\left(\dot{A}\, e^{-j\omega t} + \dot{A}^{*} e^{j\omega t} \right),$$

если ω=2πν – заданный параметр, то комплексная амплитуда: $\dot{A} = A_{\mathrm{m}} e^{-j\varphi}$.

Связь входной и выходной КА задается **частотной характеристикой *H*(ν)**

$$\dot{A}_{\text{вых}} = H(\nu)\, \dot{A}_{\text{вх}},$$

$H(\nu)$ задает преобразование амплитуды и фазы гармонического сигнала $f(t)$ с произвольной частотой ν или непосредственно определяет преобразование спектра $S(\nu)$ сложного сигнала:

$$S(\nu)_g = H(\nu) \cdot S(\nu)_f.$$

! Можно доказать, что система гармонических колебаний в параметром ν (в общем случае непрерывным) формирует полный базис для разложения произвольного* решения для колебаний в одномерной линейной системе.

Поэтому частотное описание должно быть однозначно связано с временным, т.е. $H(\nu)$ связана с $h(t)$. Связь имеет вид:

$$H(\nu) = \mathrm{FT}\left[h(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi\cdot\nu\cdot t} dt; \qquad H(-\nu) = H^{*}(\nu) \quad \mathbf{(1.8)}$$

! Второе уравнение соответствует вещественной $h(t)$.

! Можно установить соотношения параметров характеристик ЛС (соотношения длительности ИФ и ширины ЧХ, и др).

с) Связь вещественной и мнимой части ЧХ:

• *Преобразование Гильберта*

Применительно к частотной характеристике ЛС:

$$\operatorname{Re} H(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} H(s)}{s-\nu}\,ds; \qquad \operatorname{Im} H(\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} H(s)}{\nu - s}\,ds. \quad \textbf{(1.9)}$$

ПГ (англ. – НТ) в применении к действительному сигналу $s(t)$:

– Аналитический сигнал $s_A(t) = s(t) + js_{HT}(t)$

– Мгновенная частота колебания $s(t) = A(t)\cdot\cos[\psi(t)]$, $\omega(t) = d\psi(t)/dt$

– Амплитуда и аргумент колебания $A(t) = [s^2(t) + s^2_{HT}(t)]^{1/2}$; $\psi(t)=\arg[s_A(t)]$

• *Соотношения Крамерса-Кронинга**

$$\operatorname{Re} H(\nu) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{s\cdot\operatorname{Im} H(s)}{s^2-\nu^2}\,ds; \qquad \operatorname{Im} H(\nu) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\nu\cdot\operatorname{Re} H(s)}{\nu^2 - s^2}\,ds. \quad \textbf{(1.10)}$$

! В литературе под соотношениями КК часто подразумевают связь вещественной и мнимой частей комплексного коэффициента преломления среды, что является следствием применения (1.10) к соотношениям, описывающим поляризацию среды (см. п. 1.8).

✓ Многомерная ЛС

(обычно это описание трансформации функции времени и координат).

- Время, t:

Инерционность (не локальность), стационарность (часто, но , но не обязательно).
Причинность (! в физике ТРЕБУЕТСЯ).

- Координата (координаты), x:

«НЕ локальность» (часто).
Однородность [изопланарность] (!НЕ обязательно).

$$g(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} h\left(x,x',t-\tau\right)f\left(x',\tau\right)d\tau dx' \quad . \tag{1.11}$$

В частотной области - двумерное (многомерное ПФ)

$$H(\nu_x,\nu)=\mathrm{FT}_2\left[h\left(x,x',\tau\right)\right]. \tag{1.12}$$

1.4. Собственные числа и функции линейного оператора. Моды линейной системы

Представление о модах обычно связано с решением задачи на поиск собственных функций f_i, и собственных чисел a_i оператора. СФ и СЧ линейного оператора удовлетворяют условию

$$T\left[f_i(x_1, x_2 \ldots x_N)\right] = a_i \cdot f_i(x_1, x_2 \ldots x_N)\,. \quad \textbf{(1.13)}$$

Возможен дискретный набор СФ / непрерывный спектр СФ

Роль решений, являющихся модами оператора:

• Моды как типы формирующихся колебаний (ВК) – резонатор.

• Моды как ортонормированный функциональный базис.

• Моды как устойчивые типы ВК распространяющиеся в системе (со своими параметрами распространения) независимо друг от друга.

.....

Собственные числа характ. уравнения, матриц системы и др. ...

• частоты / пост. распространения возбуждаемых колебаний (генерация/распространение)

• Распространение ВК вдоль системы с сохранением распределения (волновод), с сохранением.

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots \\ b_{21} & b_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

$$d^2x_i/dt^2 = \omega_i^2 \cdot x$$

Задача о ВК → задача о возбуждении мод.

! Линейный оператор преобразует гармоническое колебание в гармоническое колебание (меняется только фаза и амплитуда).

Для комплексной амплитуды $\dot{A}_{\text{вых}} = H(\nu)\,\dot{A}_{\text{вх}}$,

Гармонические колебания во времени (в комплексном представлении) – всегда моды однородной стационарной линейной системы (т.е. ортонормированный функциональный базис).

В большинстве случаев при анализе решений для ВК в ЛС, стараются рассматривать гармонические осцилляции с частотой f: $F(x, y, z)\cdot\sin[2\pi ft+\varphi(x, y, z)]$.

Более сложные колебания рассматривают как разложение по гармоническим.

Унитарные операторы ($\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}\cdot^{\mathrm{T}}\mathbf{T} = \mathbf{E}$).

Эрмитовы операторы (СЧ -вещественны, СВ ортогональны, $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}=\mathbf{T}^{*}$), ...

1.5. Волновое колебание и волновое уравнение (уравнение Д'Аламбера)

Представление о **волновом *колебании***.

• Осцилляция состояния (физической характеристики) в точке[ах] среды – колебание[я].

Волновое колебание это *согласованное* изменение состояния среды (физического поля) обладающее определенными свойствами. Представление о том какие колебательные процессы в среде можно считать волновым колебанием неоднозначны, возможны различные критерии и интерпретации.

• Физическая природа колебаний может быть очень разной (механическая, химическая, электромагнитная, гравитационная, плотности вероятности и др.)

• Обязательно наличие связей возмущений в соседних точках.

• Происходит перенос энергии; В некоторых специфических типах волн происходит перенос материи, в большинстве случаев переноса материи нет.

• Выделяют относительно простые общие типы ВК, характерные для разных физических систем, но имеющие однотипное математическое описание. Такие волны подчиняются т.н. волновым уравнениям, что можно рассматривать как вариант определения идеализированных ВК. К важнейшим базовым уравнениям, описывающим относительно простые идеализированные типы ВК следует отнести т.н. "волновое уравнение" (или уравнение Д'Аламбера*), и уравнение Гельмгольца.

✓ Волновое уравнение" (уравнение Д'Аламбера)

$$\boxed{\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0} \quad \textbf{(1.14)} \quad \text{или} \quad \boxed{\Box u = 0}.$$

нужны начальные / граничные условия (еще м.б. дополнительные условия, предположения).
! среда характеризуется параметром v (смысл – скорость движения волны).

• ВУ описывает задачу о распространении ВК.
Свойства среды отражены в параметре v.
• Еще есть задача о возбуждении ВК (это неоднородное ВУ).

✓ Одномерный случай

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad \textbf{(1.15)} \qquad u = Q(x - vt) + G(x + vt). \quad \textbf{(1.16)}$$

$Q(x,0)$, $G(x,0)$ – произвольные функции одной переменной.

! При рассмотрении процессов ВК имеет смысл рассматривать функции колебательного вида (немонотонность, часто ↓0 при $x \to \pm\infty$).

• Решение с аргументом $(x - vt)$ описывает смещение исходного "отклонения" $u(x,0)$ вдоль x со скоростью v (и перенос энергии вдоль x). Решение с аргументом $(x + vt)$ – во встречном направлении.

• Амплитуда и форма колебания не меняется (ВУ *не описывает затухание* в среде).

! Можно показать, что решения ВУ вида $Q(x - vt)$ или $G(x - vt)$ удовлетворяют уравнениям первого порядка:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial Q}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial G}{\partial t} = 0. \qquad \mathbf{(1.17)}$$

т.н. ***одноволновые уравнения***.

! одноволновое уравнени*е* описывает распространение ВК в одном направлении.

✓ Структура решений для пространства:

$$u(\vec{r},t) = A(\bar{r})\cdot G\left[\frac{\vec{k}(\vec{r})}{k}\cdot\vec{r} - v\cdot t\right] \quad \mathbf{(1.18)}$$

$A(\vec{r})$ – «медленно» меняющаяся функция,

$G(x)$ – «быстро» осциллирующая функция. $G(x) = G(\vec{k}(\vec{r})\cdot\vec{r}/k)\big|_{t=t_0}$; $G(t) = G(x_0 - vt)\big|_{x=x_0}$;

$\vec{k}(\vec{r})$ – задает направления распространения ВК и фронт с постоянным значением $G(x)$, которому перпендикулярен этот вектор.

Здесь формально константа k (модуль вектора) м.б. произвольна (трудно рассматривать фиксированные значения ВК и их перенос в пространстве без указания конкретной формы, удобно анализировать случай гармонического ВК, периодического, с известным спектром).

✓ Вдоль направления (вдоль траектории) распространения:

- Исходное колебание $u = (\vec{r},0)$ смещается со скоростью v (вдоль направлений $\vec{k}(\vec{r})$)
- Может быть изменение амплитуды, которое задается $A(\vec{r})$. Это не затухание в среде (диссипация), это следствие перераспределения переносимой мощности по пространству.
- Сохраняется форма, что задается неизменной $G(x)$.
- Происходит перенос энергии.

! Для решений ВУ выполняются законы сохранения энергии ($\sim u^2$), сохраняется поток мощности через замкнутую поверхность (сохранение энергии переносимой волной в замкнутой области без источника).

! Интересуют колебательные волновые процессы, немонотонные колебания $G(x)$.

! В областях, сравнимых с характерными интервалами осцилляций G, на которых происходят осцилляции $G(x)|_{t=\text{const}}$, ВК обычно является квазиплоской волной, т.е. $\vec{k}(\vec{r}) \approx k \cdot r_k$.

✓ <u>Монохроматическое (гармонические) ВК</u>

Для стационарной среды особый интерес к анализу монохроматической волны (гармонический режим).

- Оператор Д'Аламбера – линейный оператор → выполняется принцип суперпозиции;

- В комплексной форме для линейной стационарной системы ГК является модой. Рассмотрение гармонического ВК можно заменить рассмотрением квазистационарной зависимости комплексной амплитуды от координат (задача сильно упрощается).
- Сложное решение можно рассматривать как совокупность гармонических решений. Рассмотрение сложных ВК можно заменить на задачу о квазистационарной спектральной зависимости амплитуды/фазы от координат.

1.6. Монохроматические волны (гармонические колебания во времени)

$$u\left(\vec{r},t\right)=A(\vec{r})\cdot\cos\left(\omega t+\Phi(\vec{r})\right)=\mathrm{Re}\left(\dot{A}(\vec{r})\cdot e^{j\omega\cdot t}\right)=\frac{1}{2}\left(\dot{A}(\vec{r})\cdot e^{j\omega\cdot t}+\left[\dot{A}(\vec{r})\right]^{*}\cdot e^{-j\omega\cdot t}\right) \quad \textbf{(1.19)}$$

$G(X)$ – гармоническая, ВК описывается распределением КА от координат. Частота ($\omega = 2\pi\nu$) определяется источником, возбуждающим волну (начальные/граничные условия).

Если подставить форму (1.19) в ВУ (1.14), то получим более простое уравнение – УГ.

Уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0,$$

$$\nabla^2 \dot{A} + k^2 \dot{A} = 0. \quad \textbf{(1.20)}$$

$$k = \frac{\omega}{v} \quad \textbf{(1.21)}$$

– волновое число.

полный аргумент функции G: $[\Phi(\vec{r}) + \omega\cdot t]$. КА $\dot{A}(\vec{r}) = A(\vec{r})\cdot\exp[-j\,\Phi(\vec{r})]$,

поверхности равных фаз (волновые фронты)

$$\Phi(\vec{r}) = \mathrm{const}$$

направление распространения

$$\vec{k}\left(\vec{r}\right)=\nabla\Phi(\vec{r})$$

! ДЛИНА ВОЛНЫ:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\cdot v}{\omega}$$

! Иногда подразумевают волновой фронт $\Phi(\vec{r}) + \omega \cdot t = \text{const}$ (тогда точки ВФ движутся со скоростью v) вдоль $\vec{k}$.

• Плоская волна $\Phi(\vec{r}) = \Phi(r_k) = \vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot r_k$.

направление волнового вектора одинаковы во всех точках (направление распространения волны). Волновое число так же одинаково.

Фазовые фронты – плоскости, перпендикулярные направлению распространения.

Амплитуда постоянна $A(\vec{r}) = A_0$ (однородная плоская волна).

Неоднородная плоская волна (во всем пространстве не удовлетворяет ВУ, но в ограниченной области можно рассматривать зависимость $A(\rho)$ в плоскости перпендикулярной направлению распространения волны).

• Сферическая волна $\Phi(\vec{r}) = \Phi(r) = \vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot r$. Волновые вектора – прямолинейные лучи из центра (источник) волны. Фазовые фронты – сферы.

$A(\vec{r}) = A_0/r$ – однородная СВ (м.б. сферический фазовый фронт, но A_0 зависит от направления).

! ПВ и СВ – важные приближения для реальных волн.

• Цилиндрические и эллиптические фазовые фронты, и т.п. и т.д.

• Сложные волны. Пучки.

• Сложные граничные условия (волноводы).

1.7. Идеальные и реальные ВК. Уравнения для ВК

физические законы (среда)	→	Уравнения для реальных ВК (нл→л)	→	Волновое уравнение
		Приближенные уравнения	←	
		↓ волновые колебания? ↓		↓ Волновое колебание

Уравнение задающие колебание отличаются от УД (УГ).

$$u(\vec{r},t)=A(\bar{r})\cdot G\left[\vec{k}(\vec{r})\cdot\vec{r}-\omega\cdot t\right]=\frac{1}{2}\left(\dot{A}(\vec{r})\cdot e^{j\omega\cdot t}+\left[\dot{A}(\vec{r})\right]^{*}\cdot e^{-j\omega\cdot t}\right)$$

$\dot{A}(\vec{r})=\dot{A}_m(\vec{r})\cdot\exp[-i\,\Phi(\vec{r})]$, $\dot{A}(\vec{r}),\Phi(\vec{r})$ мало меняются на расстояниях $\sim\lambda$.

В области пространства $\sim\lambda$ волновое колебание соответствует плоской волне.

✓ ***Приближенные (упрощенные) решения волнового уравнения:***

• Ограниченная область однородного пространства (в дали источников и неоднородностей):

реальное решение ← плоская волна

• Область с ограниченным отклонением от оси распространения волны z (приближение первой степени по углу отклонения $r \approx z + (x^2 + y^2)/2z = z + \rho^2/2z$):

сферическая волна ← ***параболоидальная волна*** (***приближение Френеля***)

$$\dot{A}(\vec{r}) = \frac{A_0}{z} \cdot \exp(-jkz) \cdot \exp\left(\frac{-jk\rho^2}{2z}\right) \quad \textbf{(1.22)}$$

✓ *Приближенные уравнения*

Параксиальное приближение, параксиальные волны.

- Волна близка к плоской волне (вдоль z): $u(\vec{r},t) \approx u(z,t) = A_0 \cos(\omega \cdot t - k \cdot z)$
- Амплитуда и фаза меняются (медленно вдоль z): $u(\vec{r},t) = A(\bar{r}) \cdot \cos[\omega \cdot t - k \cdot z + \arg(\bar{r})]$

$\dot{u}(\vec{r}) = \dot{A}(\vec{r}) \cdot \exp(-j\,kz)$, КА меняется медленно (вдоль z), на расстоянии $\sim \lambda$ относительное изменение $\dot{A}$ мало. $\dfrac{\partial \dot{A}}{\partial z} << k\,\dot{A}$.

Уравнение Гельмгольца → ***параксиальное уравнение Гельмгольца*** (для КА)

$$\nabla^2_{xy} \dot{A} - j2k \cdot \frac{\partial \dot{A}}{\partial z} = 0 \quad \textbf{(1.23)}$$

Пример решения – ***Гауссов пучок***

$$\dot{A}(\vec{r}) = \frac{A_0}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} \cdot \exp\left[-\frac{\rho^2}{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}\right] \cdot \exp\left[-jk\frac{\rho^2}{2z\left(1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right)} + j\operatorname{arctg}\frac{z}{z_0}\right] \quad \textbf{(1.24)}$$

- Эллиптический гауссов пучок, пучки Эрмита-Гаусса (либо в цил. коорд. – Лаггера-Гаусса).

• Пучки Бесселя (Бесселя-Гаусса).

✓ ***Неоднородная среда (параметры среды зависят от координат/направления)***

Скорость распространения волны зависит от координат

$$\nabla^2 u - \frac{1}{\left[v(\vec{r})\right]^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \textbf{(1.25)}$$

• неоднородная, градиентная, среда ("линзы" и т.п.)
• составная/слоистая (граничные условия) направляющие / волноводные структуры

Сложный характер лучей (в каждой точке волновой вектор- касательная).
Задача о дифракция/рассеяние на неоднородностях.

При условии "медленного" пространственного изменения v – можно развивать различные приближенные описания ВК с относительно простым учетом $v(r)$.

✓ *Диссипация (поглощение энергии средой)*

ур. Гельмгольца <u>в одномерном случае</u>:

$$\text{ВУ \&}\ \dot{u} = A\cdot e^{-jkx}\cdot e^{j\omega t} \quad \to \quad \boxed{\left(\partial^2 \dot{u}/\partial x^2\right) + k^2 \dot{u} = 0}$$

Ищем решение с затуханием: $\dot{u} = A\, e^{-(\alpha/2)x} e^{-j\beta x} e^{j\omega t} = A\, e^{-j(\beta - j\alpha/2)x} e^{j\omega t}$

Затухание α, β постоянная распространения (вещественная)

! Решение удовлетворяет уравнению Г с комплексным волновым числом $k = \beta - j\alpha/2$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} + (\beta - j\,\alpha/2)^2\, \dot{u} = 0} \quad \textbf{(1.26)}$$

физические уравнения с диссипацией

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \to \quad \dot{u} = A(x)\cdot e^{-jkx}\cdot e^{j\omega t} \quad \to \quad \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - j\mu\omega\right)\dot{u} = 0$$

$$\frac{\omega^2}{v^2} - j\mu\omega = \frac{\omega^2}{v^2} - j2\frac{\mu v}{2}\cdot\frac{\omega}{v} \underset{\mu << 2\omega/v^2}{\approx} \left(\frac{\omega}{v} - j\frac{\mu v}{2}\right)^2 \to \boxed{\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{v} - j\frac{\mu v}{2}\right)^2 \dot{u} = 0} \quad \textbf{(1.27)} \quad \boxed{k \approx \frac{\omega}{v} - j\frac{\mu v}{2}}.$$

Т.о. в физических уравнениях диссипация связана с производными нечетного порядка (обычно с первой производной) .

✓ *Явление дисперсии*

• Проявление дисперсии – определяется свойствами среды.

• Физические причины дисперсии: нелокальность реакции среды на возмущение (несущее ВК) во времени (и пространстве).

! Для гармонической волны (уравнение Гельмгольца) учет дисперсии состоит в том, что волновое число (фазовая скорость) зависит от частоты:

$k = k(\omega)$; дисперсионное соотношение $\underline{\omega = W(\beta)}$.

$$v = \omega/\beta = G(\omega),\ d\omega/d\beta,\ d^2\omega/d\beta^2 \ldots$$

! Эффекты диссипации и дисперсии связаны.

• При выводе из уравнений описывающих среду уравнения для ВК получаются уравнение, отличные от УД (компоненты $\sim u$ и ~ производным разного порядка).

• При строгом анализе исходных уравнений неизбежно получается, что дисперсия будет сопровождаться диссипацией, зависящей от частоты (нелокальность связана с перемещением частиц среды → потери), хотя диссипация м.б. очень слаба.

• Диссипация тоже дает дисперсию (см. выше), хотя возможно очень слабую, зависит законов описывающих механизмы диссипации.

• В общем случае в сложных уравнениях для ВК можно выделить характерные типы уравнений (особенности среды либо особенности условий) когда среда является преимущественно диссипативной, либо преимущественно диспергирующей. На специфику характер поведения ВК существенно влияет один эффект другой пренебрежимо мал (или может быть учтен относительно просто).

Дисперсионные эффекты в линейной среде

• Стационарные монохром. волны – учет дисперсии важен с точки зрения конкретного значение фазовой скорости.

• Полихроматические (немонохроматические) волны – меняются фазовые задержки между волнами разных частот, меняется форма ВК и свойства распространения.

• Важный случай монохроматическая несущая с огибающей (например, в форме импульса/импульсов).

Спектр сосредоточен в области несущей (волновой пакет). Дисперсия приводит к изменению скорости распространения огибающей по сравнению со скоростью распространения несущей *И* искажению формы огибающей – уширение импульса (последний эффект определяется ненулевыми производными второго и следующих порядков в зависимости $G(\omega)$).

✓ *Анизотропия (фазовая скорость зависит от направления)*

Если могут распространяться поперечные волны, то еще сложнее: зависимость от направления связана с состоянием поляризации, т.е. направлением поперечной компоненты u (если оно не задано строением системы).