

ЧАСТЬ I

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О КОЛЕБАНИЯХ В ОДИНОЧНОМ И СВЯЗАННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ RLC -КОНТУРАХ

1. Последовательные RLC -контур

Важным объектом при рассмотрении и анализе колебательных систем различной природы являются резонансные колебательные системы. В случае, если рассматриваются электромагнитные колебания, базовыми системами, обладающими резонансными свойствами являются схемы RLC -контуров, которые, также могут называть и « LC -контур», «резонансный контур», или «колебательный контур». Это цепи с сосредоточенными параметрами, представляющие соединение емкости, индуктивности, а также одного или двух сопротивлений. Обычно рассматривают два основных варианта соединения: последовательный и параллельный RLC -контур. В данном пособии колебания в резонансных контурах будут рассмотрены для случая последовательного RLC -контур.

Рассмотрим процессы, протекающие в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов R , L и C , как показано на рис. 1. Такую RLC -цепь называют *последовательным колебательным контуром*.

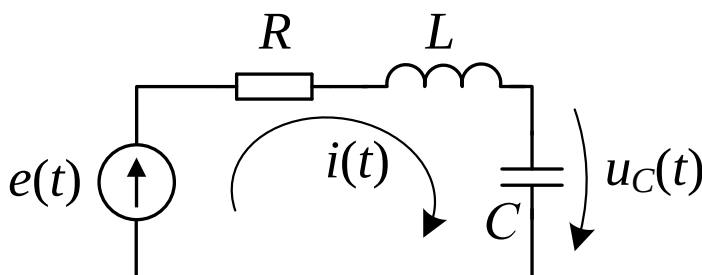


Рис. 1. Схема последовательного колебательного контура

Будем полагать, что колебания тока и напряжения в цепи возбуждаются источником напряжения $e(t)$, а в качестве реакции цепи на воздействие источника будем рассматривать ток в цепи $i(t)$ и напряжение на емкости $u_C(t)$.

Причем большее внимание будем уделять именно напряжению, поскольку его более удобно регистрировать при экспериментальном изучении такой цепи.

Отметим, что такая относительно простая схема колебательного контура как правило является идеализированным представлением реальных резонансных цепей. Даже если собрать простую схему в виде последовательного соединения резистора, катушки индуктивности и конденсатора, для точного описания ее работы нужно учесть реальные свойства таких элементов. У реальной катушки индуктивности в силу различных эффектов возникает эквивалентное активное сопротивление, зависящее от частоты, а также она имеет некоторую паразитную емкость. Реальный конденсатор тоже имеет паразитные последовательное сопротивление и проводимость, а при определенных условиях и паразитную индуктивность. Таким образом, реальное соединение резистора, катушки и конденсатора фактически будет представлять более сложную схему, чем идеализированный колебательный контур на рис. 1, а. Однако указанные паразитные параметры обычно достаточно малы и их влияние может быть незначительным или совсем ничтожным. Поэтому результаты анализа идеализированной схемы колебательного контура могут с высокой или даже с очень высокой точностью соответствовать свойствам колебаний в реальных схемах. При этом в контексте пояснения паразитных свойств реальных элементов RLC -цепи следует особо оговорить роль активного сопротивления R . При реализации последовательного колебательного контура большой интерес представляет возможность уменьшения сопротивления R , и в таком случае в цепь не включают резистор. Но и без резистора фактическое сопротивление R остается конечным, и обычно преимущественно ограничено собственным сопротивлением катушки индуктивности, которая достаточно адекватно представляется последовательным соединением индуктивности и сопротивления.

Значения сопротивления R , емкости C и индуктивности L полностью определяют характер реакции контура на воздействие $e(t)$. Однако для описания колебаний в контуре оказывается очень удобно использовать набор параметров,

которые могут иметь важный физический смысл и характеризовать некоторые ключевые свойства колебаний в контуре более эффективно и наглядно чем исходные параметры элементов. В дальнейшем анализе будут введен ряд параметров, которые широко используются при рассмотрении колебательных контуров, в частности последовательного. Их сводный перечень и формулы связи с R , L и C , приведен в Приложении 1.

Важным и актуальным нетривиальным вариантом колебательных систем являются системы со связанными параметрами. В случае RLC -контуров чаще всего рассматривают контура, имеющие связанные индуктивности. Примером подобной системы с двумя степенями свободы является цепь двух *индуктивно связанных последовательных колебательных контуров*, показанная на рис. 2.

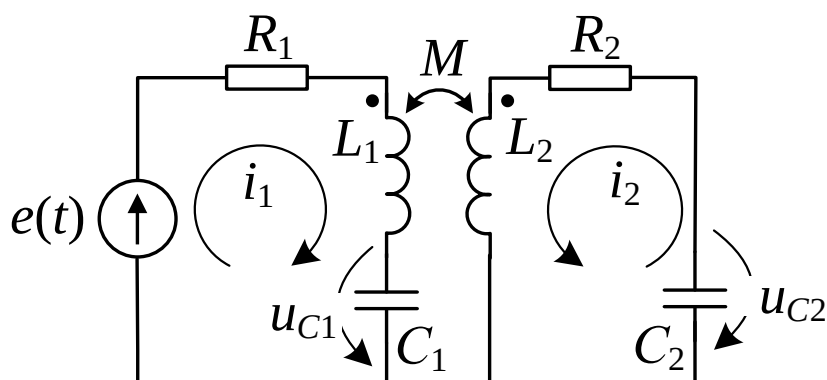


Рис. 2. Схема двух индуктивно связанных последовательных колебательных контуров

Первый контур включает последовательное соединение индуктивности L_1 и емкости C_1 , второй – соединением индуктивности L_2 и емкости C_2 . Между этими контурами присутствует связь, задаваемая взаимной индуктивностью M . За счет такой связи изменение тока i_1 формирует ЭДС $-M \cdot di_1/dt$ во второй индуктивности, и наоборот – изменение i_2 наводит ЭДС $-M \cdot di_2/dt$ во второй индуктивности. Уровень связи между катушками также удобно характеризовать посредством коэффициента связи $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$. Следует обратить внимание, что на схеме дополнительно указаны направление односторонних концов

обмоток (на рис. 2 – это круглые черные маркеры). Если положительные направления токов выбраны одинаково относительно таких указателей (как на рис. 2), то ЭДС в индуктивности, вызванная собственным положительным током, и ЭДС наведенная за счет взаимной индуктивности положительным током другой индуктивности – сонаправлены.

Источник напряжения $e(t)$, задающий внешнее воздействие подключен ко входу первого контура, но за счет связи источник возбуждает колебания в обоих контурах и только в случае, если $M = 0$ второй контур оказывается отключенным от источника и схема фактически работает в режиме одиночного контура, соответствующего рис. 1. Колебания в системе двух последовательных контуров характеризуют токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ и напряжения на элементах. Как и в случае одиночного контура, для связанных контуров также целесообразно в качестве «реакции» на воздействие рассматривать напряжение на емкостях $u_{C1}(t)$ и $u_{C2}(t)$. Эти напряжения обычно удобно регистрировать при экспериментах с реальными схемами, соответствующими схеме на рис. 2.

Как и в случае схемы одиночного контура на рис. 1, схема связанных контуров на рис. 2 является идеализированным приближением реальных цепей. Сделанные выше комментарии по этому поводу, в том числе по возможному снижению R , справедливы и в случае связанных колебательных контуров.

Колебания в системе связанных контуров, вызванные заданным воздействием $e(t)$, полностью определяются значениями элементов контуров R_1 , R_2 , C_1 , C_2 , L_1 , L_2 , а также значением взаимной индуктивности M , либо коэффициента связи k . Но при рассмотрении колебаний удобно вводить дополнительные параметры, связанные перечисленными параметрами. В частности, каждый из двух связанных контуров может быть охарактеризован теми же параметрами, что и одиночный колебательный контур, в этом случае говорят о собственных параметрах каждого контура. Но также можно говорить о параметрах для связанной системы, которые учитывают как собственные параметры элементов контуров, так коэффициент связи k (Приложение 1).

2. Свободные колебания в последовательных RLC -контурах

2.1. Свободные колебания в одиночном контуре

Свободными колебаниями в RLC -контуре называют колебания, которые происходят при условии, что входное напряжение $e(t)$ равно нулю, т.е. при отсутствии непосредственного внешнего воздействия. Однако для появления в контуре ненулевых токов и напряжений необходимо, чтобы в течение некоторого времени входное напряжение $e(t)$ было ненулевым, а затем если действие входного источника прекращается, то после этого в цепи происходят свободные колебания. Будем считать, что источник прекращает действовать в момент $t = 0$, поэтому $e(t) = 0$ при $t \geq 0$. Хотя общий характер свободных колебаний определяется самим колебательным контуром, но конкретный их вид может зависеть от того, каково было воздействие $e(t)$ до начала свободных колебаний, т.е. при $t < 0$. При этом важна не конкретная форма этого воздействия, а то, какие токи и напряжения возникли в контуре в результате этого воздействия в момент $t = 0$, т.е. начальные условия для свободных колебаний.

Важным свойством свободных колебаний является их неизбежное затухание. Поскольку в цепи есть активное сопротивление, определяющее диссипацию энергии, а входное возмущение при $t > 0$ отсутствует и поступления энергии в цепь не происходит, то колебания должны раньше или позже закончиться, или стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Кроме того, для определенности будем подразумевать, что на вход цепи подается прямоугольный импульс, длительностью τ , который заканчивается в момент $t = 0$, как показано на рис. 3. Можно отметить, что если длительность импульса будет много меньше характерного времени реакции цепи, то дальнейшее укорочение длительности импульса уже не приводит к изменению формы выходного сигнала $u_C(t)$, она не зависит от длительности импульса и полностью определяется свойствами колебательного контура. Эта соответствует ситуации, когда импульс на входе становится хорошим

приближением к дельта-функции, а выходной сигнал – хорошим приближением к импульсной характеристике исследуемой цепи. Ниже будет дано более конкретное пояснение о требованиях в длительности входного импульса для выполнения таких условий.

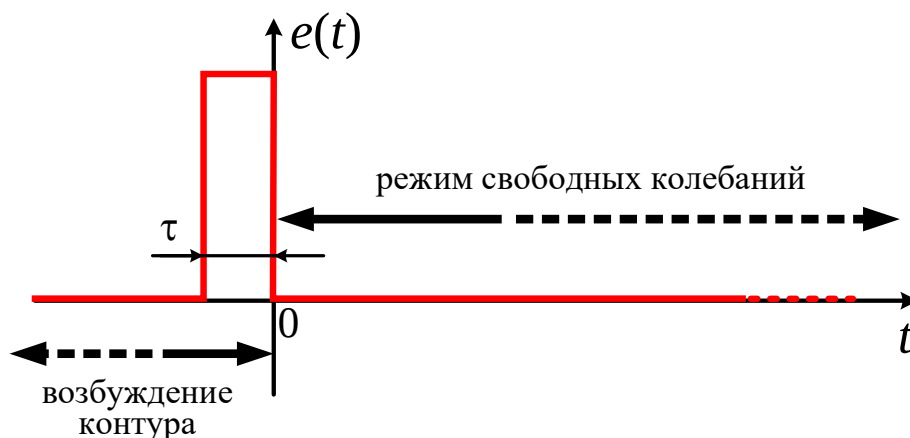


Рис. 3. Возбуждение свободных колебаний в контуре прямоугольным импульсом $e(t)$

Приведем краткий анализ свободных колебаний в последовательном колебательном контуре. Напряжение на емкости $u_C(t)$ при $e(t) = 0$, описывается однородным дифференциальным уравнением

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (1.1)$$

Для однозначного решения этого уравнения необходимо знать начальные условия: значение напряжения и его производной. Учитывая, что производная напряжения на емкости с точностью до множителя C равна току через емкость, то в качестве начальных условий удобно рассматривать напряжения на емкости и ток в начальный момент времени: $u_C(0) = u_0$ и $i(0) = i_0$. Рассмотрим случай, когда выполняются начальные условия $i_0 \neq 0$, $u_0 = 0$. В этом случае решение уравнения (1) имеет более компактный вид, и, кроме того, именно такие начальные условия можно получить при достаточно коротком входном

импульсе. Для указанных начальных условий при $t \geq 0$ аналитическое решение уравнения (1.1) может быть записано в виде

$$u_C(t) = \frac{i_0}{\beta C} e^{-\alpha t} \operatorname{sh}(\beta t). \quad (1.2)$$

Связь константы β и значений элементов контура удобно записать и анализировать если ввести два важных параметра контура. Это *частота свободных колебаний контура без потерь* f_0 и *коэффициент затухания колебаний* α , задаваемые формулами

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad \alpha = \frac{R}{2L}. \quad (1.3)$$

Параметр f_0 так же называется *резонансной частотой* колебательного контура, смысл такого названия будет более понятен при описании вынужденных колебаний в контуре в п. 1.4. С учетом (1.3) константу β в (1.2) можно записать в виде

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - (2\pi f_0)^2}. \quad (1.4)$$

Из (1.2) и (1.4) видно, что характер свободного колебания в контуре существенным образом зависит от соотношения параметров контура. Обычно разделяют колебательный режим и апериодический режимы, а также отмечают границу между ними. Рассмотрим эти случаи.

1) Колебательный режим

Если $\alpha < 2\pi f_0$, то параметр β – становится чисто мнимым и тогда колебание (1.2) можно записать в виде

$$u_C(t) = \frac{i_0}{C \cdot 2\pi f_{\text{ск}}} e^{-\alpha t} \sin(2\pi f_{\text{ск}} t), \quad (1.5)$$

где $f_{\text{ск}} = \sqrt{f_0^2 - (\alpha/2\pi)^2}$.

Из (1.5) видно, что в колебательном режиме характер осцилляций напряжения $u_C(t)$ определяется произведением гармонической функции и экспоненциально убывающего множителя, скорость снижения которого задается коэффициентом затухания α . Характерный вид подобного колебания показан на рис. 4.

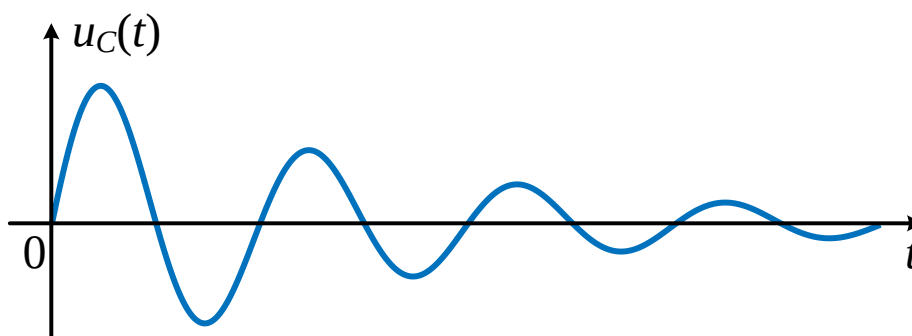


Рис. 4. Вид зависимости напряжения на конденсаторе при колебательном режиме в последовательном контуре (при $u_C(0) = 0$)

Колебание, задаваемое (1.5), очевидно не является строго периодическим. Однако характерные точки колебаний, такие как пересечения нуля, непосредственно задаваемые множителем $\sin(2\pi f_{\text{св}}t)$, повторяются через равные промежутки времени $T_{\text{св}} = 1/f_{\text{св}}$. Экстремумы осцилляций, хотя и не находятся строго посередине между нулями, но также повторяются через интервал времени $T_{\text{св}}$. Поэтому такое колебание рассматривают как квазипериодическое, и величины $f_{\text{св}}$ и $T_{\text{св}}$ называют частотой и периодом свободных колебаний контура или собственных колебаний контура.

При анализе затухания квазипериодического сигнала удобно рассматривать снижение уровня сигнала за время $T_{\text{св}}$, как снижение значения сигнала в соседних экстремумах. Пусть момент t_A соответствует некоторому экстремуму в сигнале $u_C(t)$, и момент $t_B = t_A + T_{\text{св}}$ смещен относительно t_A на период $T_{\text{св}}$ и также соответствует экстремуму сигнала. Если обозначить значения экстремумов как $u_{CA} = u_C(t_A)$ и $u_{CB} = u_C(t_B)$, то с учетом (1.5) отношение u_{CA}/u_{CB} определяется величиной $e^{\alpha T}$, не зависящей от времени и определяемой

Приведенный анализ соседних экстремумов поясняет возможность практического измерения ключевых параметров квазипериодического затухающего колебания по наблюдаемому колебанию напряжения $u_C(t)$. Временной сдвиг между соседними экстремумами дает значение $T_{\text{ск}}$, отношение значений напряжений экстремумов позволяет найти логарифмический коэффициент затухания $\theta = \ln(u_{CA}/u_{CB})$, и коэффициент затухания $\alpha = \theta/T_{\text{ск}}$. Однако если действительно использовать такой метод на практике, то можно существенно увеличить точности измерения, если рассматривать моменты t_A и t_B смещенные на несколько периодов (N периодов) колебаний, рис. 5. Тогда для значений экстремумов в моменты времени t_A и t_B период оценивается как $T_{\text{ск}} = (t_B - t_A)/N$, а логарифмический декремент определяется выражением $\theta = \ln(u_{CA}/u_{CB})/N$. Но для более точного определения периода $T_{\text{ск}}$ лучше рассматривать не моменты экстремумов, а моменты пересечения нуля, поскольку эту разность легче измерить с большей точностью.

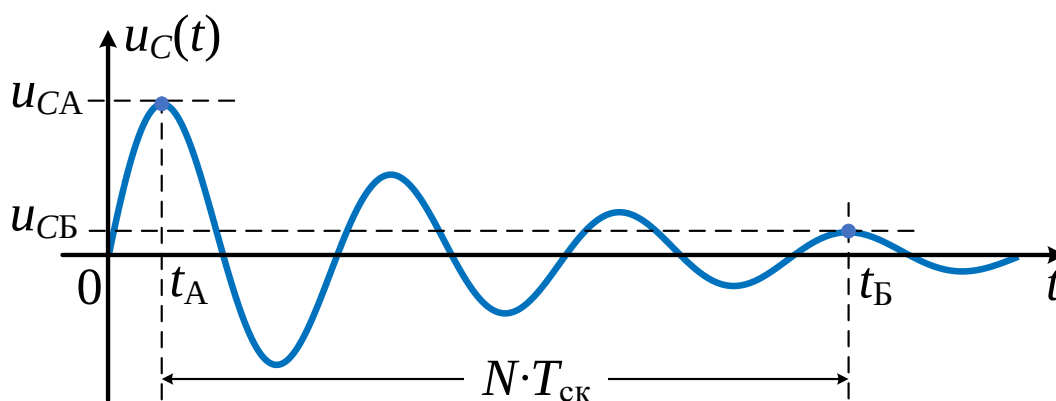


Рис. 5. Выбор экстремумов для нахождения логарифмического декремента
(на данном рисунке $N = 3$)

Нетрудно видеть, что значение частоты f собственных колебаний контура

смещено относительно значения резонансной частоты f_0 , причем $f_{\text{ск}} < f_0$. Смещение определяется коэффициентом затухания α . Если затухание будет достаточно низким и выполняется условие $\alpha \ll f_0$, то частота собственных колебаний контура и резонансная частота контура станут близки $f_{\text{ск}} \approx f_0$, а период собственных колебаний $T_{\text{ск}}$ будет близок к $T_0 = 1/f_0$. Возможность пренебречь различием $f_{\text{ск}}$ и f_0 позволяет относительно просто связать параметры затухания колебаний с таким важным параметром контура, как добротность $Q = f_0 L / 2\pi R$ и затухание контура $d = 1/Q$ (см. Приложение 1). Если $\alpha \ll f_0$, то $\theta = \alpha T_{\text{ск}} \approx \pi/Q = \pi d$.

2) Аперриодический режим

В случае, когда $\alpha > 2\pi f_0$, константа β становится вещественной. С учетом (1.3) условие аперриодического режима можно записать в виде соотношения значений элементов контура $R > 2\sqrt{L/C}$.

Из (1.2) можно видеть, что в этом случае колебаний в контуре не происходит и зависимость $u_C(t)$ имеет так называемый аперриодический характер. Действительно, согласно (1.2) в начальный момент времени $u_C = 0$, поскольку $\text{sh}(0) = 0$, и это соответствует принятому в данном рассмотрении начальному условию. Нетрудно видеть, что с ростом t выражение (1.2) будет стремиться к виду $u_C(t) = (i_0/2\beta C) \cdot \exp[-(\alpha - \beta)t]$ и, поскольку в этом режиме $\beta < \alpha$, получим $u_C(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. При этом можно показать, что при $t > 0$ имеет место только один экстремум зависимости $u_C(t)$. Такой режим работы контура называют *аперриодическим* или *нециклическим* режимом. Вид такого колебания показан на рис. 6.

Аперриодический характер колебания наглядно проявляется в том, что после прекращения внешнего воздействия в сигнале $u_C(t)$ не происходит двух или более пересечений нулевого уровня, т.е. не наблюдается ни одного квазипериода осцилляций.

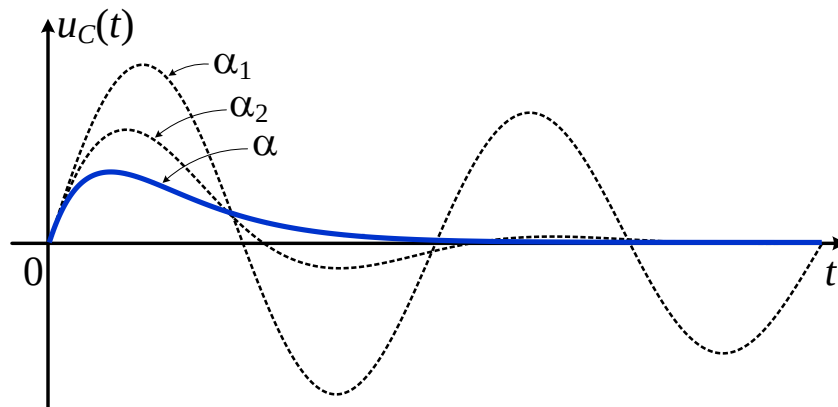


Рис. 6. Вид сигнала в последовательном контуре при аperiодическом режиме ($\alpha > 2\pi f_0$). Для сравнения показан вид сигнала при колебательном режиме ($\alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi f_0$)

3) Граница между колебательным и аperiодическим режимами

Формальным условием, разделяющим колебательный и аperiодический режимы, является условие $\alpha = 2\pi f_0$, когда $\beta = 0$. Так же это условие можно записать в виде $R = 2\sqrt{L/C}$, а также $Q = 1/2$ или $d = 2$.

Выражение (1.2) при $\beta = 0$ требует дополнительного анализа. Можно показать, что в этом случае данное выражение можно преобразовать к виду $u_C(t) = (i_0/C) \cdot t \cdot \exp(-t/T_0)$. Формально такой сигнал имеет тот же характер, что и в случае аperiодического режима, поскольку в начальный момент времени $u_C = 0$, потом есть один экстремум, и $u_C(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Однако случай $\alpha = 2\pi f_0$ является особенным. Во-первых, если охарактеризовать некоторую эффективную длительность «выброса» напряжения $u_C(t)$ при $t > 0$ (формальное введение эффективной длительности и ее анализ выходит за рамки данного рассмотрения), то для фиксированного значения f_0 эта длительность будет минимальна при $\alpha = 2\pi f_0$ и начнет возрастать при переходе в аperiодический режим и увеличении β . Это можно пояснить следующим обстоятельством. В колебательном режиме затухание определяется множителем $\exp(-\alpha t)$, когда скорость затухания растет с ростом α . В аperiодическом режиме затухание

связано с мультипликативной компонентой $\exp[-(\alpha - \beta)t]$, где скорость затухания связана с положительной величиной $(\alpha - \beta)$. С учетом (1.4) можно записать $\alpha - \beta = \alpha - [\alpha^2 - (2\pi f_0^2)]^{1/2}$, и, как нетрудно видеть, эта величина максимальна при граничном режиме, когда $\beta = 0$, и согласно (1.4) будет возрастать при росте α и переходе в апериодический режим. Во-вторых, установление точного равенства $\alpha = 2\pi f_0$ при росте α соответствует предельному переходу, когда амплитуда затухающих осцилляций $u_C(t)$ в области $t > 0$ устремляется к нулю после первого полупериода T_0 .

При необходимости перестройки цепи от колебательного к периодическому режиму и, в частности, настройки цепи в граничное условие $\alpha = 2\pi f_0$, удобно использовать регулировку одного из элементов контура, например, сопротивления R . Однако, настроить цепь на границу колебательного и апериодического режимов можно с конечной точностью, т.е. в действительности она всегда будет находится вблизи границы со стороны или колебательного, или апериодического режима. При этом, вследствие указанных особенностей характера колебаний $u_C(t)$ при $\alpha = 2\pi f_0$, по виду $u_C(t)$ трудно достаточно точно зафиксировать момент настройки цепи на границу колебательного и апериодического режимов. Но наблюдая зависимость $u_C(t)$, можно настроить цепь близко к этой границе, если постараться зафиксировать переход от явного проявления в зависимости $u_C(t)$ колебаний (колебательный режим) к явному исчезновению колебаний (апериодический режим).

В контексте обсуждения колебательного и апериодического режимов, уместно пояснить характер колебаний с энергетической точки зрения. Как известно, реактивные элементы способны запасать электромагнитную энергию при протекании тока в цепи, и отдавать ее обратно в цепь. Элемент с активным сопротивлением не может запасать электромагнитную энергию, но является элементом диссипации электромагнитной энергии, выводя ее из цепи. Обычно в активном сопротивлении, например, в резисторе, электромагнитная энергия преобразуется в тепловую, хотя возможны и более сложные механизмы

диссипации. Для выбранных в приведенном выше рассмотрении начальных условиях с ненулевым начальным током и нулевым начальным напряжением u_C , при $t = 0$ энергия W полученная цепью от генератора оказывается сконцентрированной в катушке индуктивности и описывается соотношением $W_L = L \cdot i^2 / 2$. Затем происходит перераспределение энергии, и через четверть периода становится максимальной энергия, сосредоточенная в конденсаторе $W_C = C \cdot u_C^2 / 2$. Такой процесс сопровождается колебаниями тока в контуре, но с учетом наличия активного сопротивления при этом неизбежно возникают потери электромагнитной энергии цепи, уходящей из цепи в виде тепла. За каждый период $T_{\text{ск}}$ контур теряет энергию $R \cdot I^2 \cdot T$ (здесь I – действующее значение тока за данный период свободных колебаний). Вследствие вывода электромагнитной энергии из контура и отсутствия поступления энергии извне, при нулевом напряжении источника при $t > 0$, уровень колебаний тока и напряжения в контуре неизбежно будет снижаться. С ростом времени вся электромагнитная энергия должна перейти в тепловую, а колебания снизятся до нуля. Аперриодический характер колебаний характеризуется тем, что при достаточно большом значении сопротивления, почти вся запасённая в контуре электромагнитная энергия преобразуется в тепловую уже в течение половины периода $T_{\text{ск}}$.

В заключение анализа свободных колебаний в последовательном RLC-контуре сделаем некоторые важные *дополнительные замечания*:

а) В приведенном выше рассмотрении основное внимание уделялось зависимости $u_C(t)$. Однако важным может быть и колебание тока $i(t)$. При известном напряжении на конденсаторе ток в контуре определяется связью тока и напряжения емкости $i(t) = C \cdot du_C(t) / dt$. Это простое соотношение позволяет найти выражение для тока в контуре при всех указанных выше режимах, колебательного, аперриодического и граничного. Поскольку ток в последовательной цепи является общим для всех элементов, то при известном

$i(t)$ несложно получить найти колебания напряжений на сопротивлении и индуктивности.

б) С учетом описанных выше свойств колебаний $u_C(t)$, можно заключить, что при заданном значении f_0 , т.е. при заданном произведении $L \cdot C$, минимальное время проявления реакции цепи можно охарактеризовать периодом T_0 . Это характерный интервал, задающий изменения $u_C(t)$ в колебательном режиме и интервал, характеризующий минимальную длительность процесса реакции цепи при отсутствии колебаний. Поэтому можно указать более конкретное условие для длительности τ возбуждающего импульса $e(t)$, при которой начальные условия будут близки к принятому в приведенном рассмотрении варианту $u_0 = 0$, $i_0 \neq 0$, а колебания $u_C(t)$ будут близки к импульсной характеристике цепи. Такое условия для τ можно указать в виде соотношения $\tau \ll T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Если это требование выполняется недостаточно жестко, то начальные условия будут отличаться, от указанных выше.

в) Еще один важный обобщающий вопрос, связанный с предыдущим пунктом, касается влияния начальных условий на характер колебаний. Приведенный выше анализ предполагает $i(0) = i_0 \neq 0$ и $u_C(0) = u_0 = 0$. Такой выбор позволяет рассмотреть более простой вариант выражения для $u_C(t)$ в виде (1.2). Кроме того, такие условия с хорошей точностью достигаются, если длительность возбуждающего колебания входного импульса τ много меньше, чем $T_0 = 1/2\pi f_0$. В общем случае можно провести анализ решений уравнения при произвольных начальных условиях. Например, если в начальный момент времени нулевым является ток в контуре, или если в момент i_0 , и u_0 не равны нулю. В общем случае выражение для $u_C(t)$ будет более сложным, чем (1.2) и детальный вид колебаний будет отличаться. Однако общие свойства зависимости $u_C(t)$ будут аналогичны. В колебательном режиме также будут осцилляции с частотой собственных колебаний, затухание которых будет задаваться тем же коэффициентом затухания α . Но если начальное значение

напряжения не равно нулю, то теперь экстремумы колебания, как и моменты пересечения нуля будут смещены относительно колебания, показанного на рис. 4. В случае апериодического режима характер зависимости $u_C(t)$ также будет иметь вид затухающего процесса без колебаний. Но при произвольных начальных условиях возможен вариант, когда в отличие от зависимости на рис. 6, в течение начального интервала $T_0/2$ напряжение пересекает нулевой уровень после чего приближение $u_C(t)$ к нулю происходит в области отрицательных значений напряжения.

г) Последним следует отметить вопрос о спектре колебаний $u_C(t)$. Строгое рассмотрение вопросов спектрального анализа сигналов выходит за рамки данного пособия, однако при практическом изучении колебаний в последовательном контуре эффективным инструментом может быть анализатор спектра, отображающий спектр сигнала $u_C(t)$. В этом плане следует пояснить, характер спектра свободных колебаний в контуре при работе схемы в колебательном режиме в условиях $\alpha \ll 2\pi f_0$ после короткого импульса $e(t)$ (а на практике после периодического повторения коротких импульсов на входе цепи). В таких условиях спектр колебаний $u_C(t)$ имеет один явно выраженный всплеск с максимумом на частоте $f_{\text{ск}}$. Поэтому использование анализатора спектра помогает фиксировать частоту свободных колебаний $f_{\text{ск}}$ не менее эффективно, чем при наблюдении свободных колебаний по осциллограмме сигнала $u_C(t)$ и измерению периода $T_{\text{ск}}$.

2.2. Свободные колебания в двух связанных одинаковых контурах

В данном параграфе рассмотрим режим свободных колебаний в колебательной системе с двумя степенями свободы, а именно в цепи с двумя индуктивно связанными между собой колебательными контурами, показанной на рис. 2. Как и ранее будем полагать, что возбуждение колебаний в системе обеспечивается коротким импульсом $e(t)$ в короткий интервал времени, до момента $t = 0$, как показано на рис. 3.

Сначала для простоты будем рассматривать одинаковые контура, когда $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, $R_1 = R_2 = R$, и также одинаковы добротности контуров, равные $Q = \sqrt{L/C}/R$.

При $t \geq 0$, когда $e(t) = 0$ на основе закона Кирхгофа с учетом наличия взаимной индуктивности M для контуров можно записать следующую систему уравнений для токов

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt} = 0 \\ L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} . \quad (6)$$

При этом напряжения на конденсаторах $u_{C1}(t)$ и $u_{C2}(t)$ определяются в соответствии с выражениями, связывающими напряжение и ток емкости

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau + u_{C1}(0) , \\ u_{C2}(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + u_{C2}(0) . \end{aligned} \quad (7)$$

Анализ решения указанной системы уравнений показывает, что в общем случае свободные колебания напряжений на емкостях в связанных контурах представляют собой суперпозицию двух типов колебаний с так называемыми собственными частотами F_1 , F_2 и коэффициентами затухания α_1 , α_2 , которая описывается выражениями

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= A_1 e^{-\alpha_1 t} \cos(2\pi F_1 t + \varphi_1) + A_2 e^{-\alpha_2 t} \cos(2\pi F_2 t + \varphi_2) \\ u_{C2}(t) &= -A_1 e^{-\alpha_1 t} \cos(2\pi F_1 t + \varphi_1) + A_2 e^{-\alpha_2 t} \cos(2\pi F_2 t + \varphi_2) . \end{aligned} \quad (8)$$

Как и в случае колебаний в одиночном контуре компоненты $e^{-\alpha_1 t} \cos(2\pi F_1 t + \varphi_1)$ и $e^{-\alpha_2 t} \cos(2\pi F_2 t + \varphi_2)$ являются квазипериодическими затухающими колебаниями, однако в системе связанных контуров появляются две таких компоненты с разными частотами и коэффициентами затухания, отличными от частоты свободных колебаний и коэффициента затухания контуров в контурах без связи. Компоненту, осциллирующую с частотой F_1 называют антисимметричной модой¹⁾, поскольку токи в контурах колеблются в противофазе, что соответствует знаку «—» перед этой компонентой по второму уравнению в (8). Составляющую, осциллирующую с частотой F_2 называют симметричной модой, поскольку в этом случае токи в контурах колеблются в фазе. Поскольку возникновение колебаний с частотами F_1 и F_2 , отличными от частоты собственных колебаний контуров, обусловлено наличием связи контуров, то эти частоты называют также *частотами связи*. Частоты связи и коэффициенты затухания мод задаются через собственные параметры контуров f_0 , α и k следующими соотношениями

$$F_1 = \frac{\sqrt{(1-k) f_0^2 - (\alpha/2\pi)^2}}{1-k}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{1-k},$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{(1+k) f_0^2 - (\alpha/2\pi)^2}}{1+k}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha}{1+k}.$$
(9)

В случае малых потерь и малости коэффициента связи, когда $\alpha \ll f_0$ и $k \ll 1$, таких, что $Q^2(1-k) \gg 1$, выражения для частот сводятся к более простой форме

$$F_1 = \frac{f_0}{\sqrt{1-k}}, \quad F_2 = \frac{f_0}{\sqrt{1+k}}.$$
(10)

¹⁾ Термин «мода» от английского «mode» (режим) здесь подразумевает один из определенных типов колебаний, который может быть возбужден в системе в системе.

Из (10) нетрудно видеть, что $F_1 > f_0 > F_2$, поэтому частоту ассиметричной моды иногда называют «быстрой» частотой связи, а частоту симметричной моды – «медленной» частотой связи.

При введении в рассмотрение *относительных*, или *нормированных частот* связи F_1/f_0 и F_2/f_0 из (10) следует их унифицированная зависимость от коэффициента связи k , график которой приведен на рис. 7. Следует отметить, что формально для любого ненулевого коэффициента связи в связанных контурах в режиме свободных колебаний всегда могут присутствовать колебания с двумя отличными друг от друга частотами. Однако на практике при малых k их не всегда можно различить по виду колебания или по виду спектра колебаний.

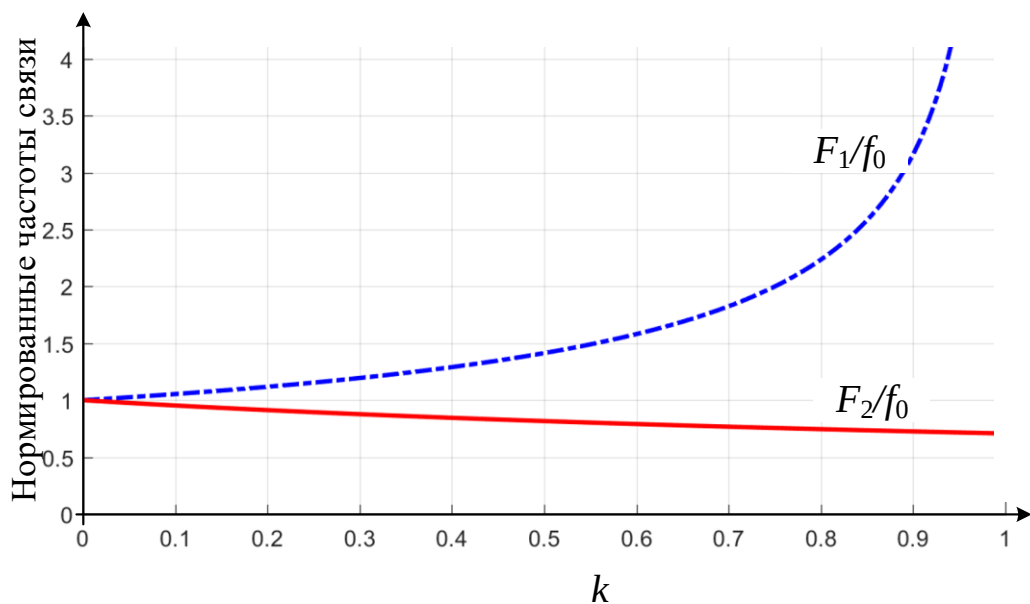


Рис. 7. Зависимости нормированных частот связи от коэффициента связи

Полученный результат формального анализа, когда в связанных контурах несмотря на то, что они одинаковы, возникают колебания с разными частотами, разнонаправленно смещенными от исходной собственной частоты контуров, можно дополнить некоторыми смысловыми пояснениями. При отсутствии индуктивной связи, в каждом контуре можно рассмотреть вариант колебания, когда положительное направление тока выбрано так, как показано на рис. 2, или вариант с противоположным направлением. Выбор положительного

направления тока, очевидно, никак не повлияет на параметры f_0 , α и частоту свободных колебаний $f_{\text{ск}}$. Поэтому такие «противонаправленные» варианты колебаний фактически неразличимы по характеру, они складываются в одно колебание с начальной фазой, зависящей от соотношения их амплитуд, которое определяется начальными условиями.

Но в случае наличия связи становится важным, как взаимно направлены рассматриваемые колебания токов в разных контурах. За счет присутствия взаимной индуктивности второй контур начинает влиять на первый. Это означает, что связь меняет индуктивность L первого контура на более сложное эквивалентное комплексное сопротивление, вносимое подключенным вторым контуром и связанное с колебаниями, возникающими в нем (аналогичным образом действует и влияние первого контура на второй). В предположении определенных свойств колебания во втором контуре вносимое влияние на эквивалентную индуктивность $L_{\text{э}}$ может быть разным. Симметричная мода, или симметричный режим колебаний в контурах – это вариант колебания, когда токи i_1 и i_2 направлены, как указано стрелками на рис. 2. Тогда ток i_2 , так же как и ток i_1 , увеличивает напряжение на катушке индуктивности, что, очевидно, соответствует увеличению эквивалентной индуктивности $L_{\text{эс}}$ для этой моды, когда $L_{\text{эс}} > L$. В качестве несимметричной моды рассматривают вариант колебания, когда согласно направлениям стрелок на рис. 2 токи в контурах разнонаправлены. Тогда ток i_2 , противонаправленный току i_1 , будет снижать вызванное током i_1 напряжение на катушке, что соответствует снижению эквивалентной индуктивности $L_{\text{эа}}$, когда $L_{\text{эа}} < L$. Разные значения эквивалентной индуктивности в случае симметричного или антисимметричного режима колебаний приводят к разным значениям частоты свободных колебаний для этих мод. Учитывая зависимость частоты и затухания свободных колебаний в контуре от индуктивности, нетрудно убедиться, что снижение либо увеличение $L_{\text{э}}$ относительно L приводит к разному смещению. Частота свободного колебания F_2 для симметричной моды имеет частоту ниже, чем частота свободных колебаний несвязанных контуров $f_{\text{ск}}$, при этом она затухает

медленнее. А в случае несимметричной моды, наоборот, частота собственного колебания F_1 выше, чем $f_{\text{ск}}$ и затухает колебание быстрее. Уровень смещения индуктивностей $L_{\text{эс}}$ и $L_{\text{за}}$ относительно исходного значения L будет возрастать с ростом связи, поскольку увеличение связи будет увеличивать амплитуду колебаний тока i_2 , наведенную током i_1 . Поэтому рост k усиливает разность частот связи.

Структура решения для колебаний в связанных $u_{C1}(t)$ и $u_{C2}(t)$ в контурах в виде двух мод, представленная выражением (8), еще не определяют конкретный характер колебаний, который в существенной степени определяется соотношением амплитуд A_1 и A_2 . Конкретный вид колебаний будет более определенным если учесть начальные условия. За счет задания начальных условий можно селективно возбудить ту или иную моду, или же возбудить две моды одновременно. В данной работе реализуется последний более общий случай, когда наблюдаются характерные «биения» колебаний напряжений и токов в контурах

Пусть в момент времени $t = 0$ задано ненулевое начальное значение напряжения на конденсаторе в первом контуре $u_{C1}(0) \neq 0$, нулевое значение напряжения на конденсаторе второго контура $u_{C2}(0) = 0$ и нулевые значения токов в обоих контурах $i_1(0) = i_2(0) = 0$. В этом случае при $Q \gg 1$, $k \ll 1$ можно получить следующие упрощенные выражения

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &\approx \frac{u_{C1}(0)e^{\alpha t}}{2} (\cos 2\pi F_1 t + \cos 2\pi F_2 t) = u_{C1}(0)e^{\alpha t} \cos[\pi(F_1 - F_2)t] \cos[\pi(F_1 + F_2)t], \\ u_{C2}(t) &\approx \frac{u_{C1}(0)e^{\alpha t}}{2} (-\cos 2\pi F_1 t + \cos 2\pi F_2 t) = u_{C1}(0)e^{\alpha t} \sin[\pi(F_1 - F_2)t] \sin[\pi(F_1 + F_2)t]. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (11) при близких F_1 , и F_2 (т.е. при малых k) наглядно показывают наличие биений, когда колебания имеют вид осцилляций со средней частотой $F = (F_1 + F_2)/2$ и гармоническим изменением огибающей этих осцилляций с частотой $F_{\text{ог}} = (F_1 - F_2)/2$, как показано на рис. 8.

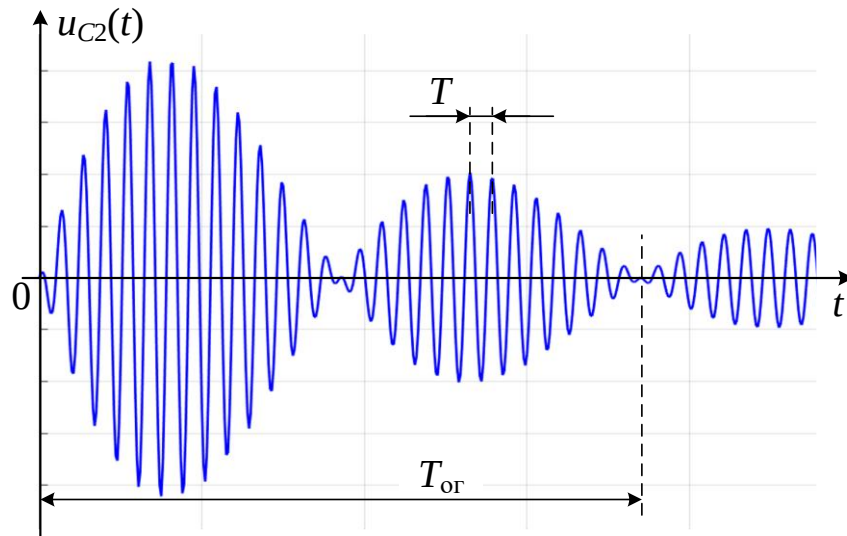


Рис. 8. Осциллограмма напряжения на конденсаторе второго контура

При наблюдении напряжения $u_{C2}(t)$, например, по осциллограмме, можно найти период осцилляций T и период огибающей $T_{ог}$ (как поясняет рис. 8), очевидно равные

$$T = \frac{1}{F} = \frac{2}{F_1 + F_2}, \quad T_{ог} = \frac{1}{F_{ог}} = \frac{2}{F_1 - F_2}. \quad (16)$$

При увеличении коэффициента связи разность частот связи увеличивается, и период огибающей снижается. Измерение T и период огибающей $T_{ог}$ можно использовать для определения коэффициента связи k . С учетом (10) можно получить

$$\frac{T_{ог}}{T} = \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k}} \quad (17)$$

Учитывая условие $k \ll 1$ можно использовать приближения $\sqrt{1+k} \approx 1+k/2$ и $\sqrt{1-k} \approx 1-k/2$. Тогда выражение (17) сводится к отношению $T_{ог}/T = 2/k$, откуда следует

$$k = \frac{2T}{T_{\text{ор}}}. \quad (18)$$

С энергетической точки зрения влияние второго контура приводит к тому, что наряду с перераспределением накопления энергии в емкости или индуктивности с частотой F , происходит перераспределение энергии между первым и вторым контурами с разностной частотой $(F_1 - F_2)/2$. Причем эти колебания сопровождаются потерями энергии в резистивном элементе, что соответствует снижению с ростом времени общего уровня колебаний, что также видно в колебаниях, показанных на рис. 8.

Приведенные выше выражения (11) описывают напряжение на конденсаторах первого и второго контуров. Из этих выражений нетрудно видеть, что характер этих колебаний отличаются сдвигом начальных фаз на $\pi/2$, как непосредственно осцилляций напряжений $u_{C1}(t)$ и $u_{C2}(t)$, так и их огибающих, что иллюстрирует рис. 9.

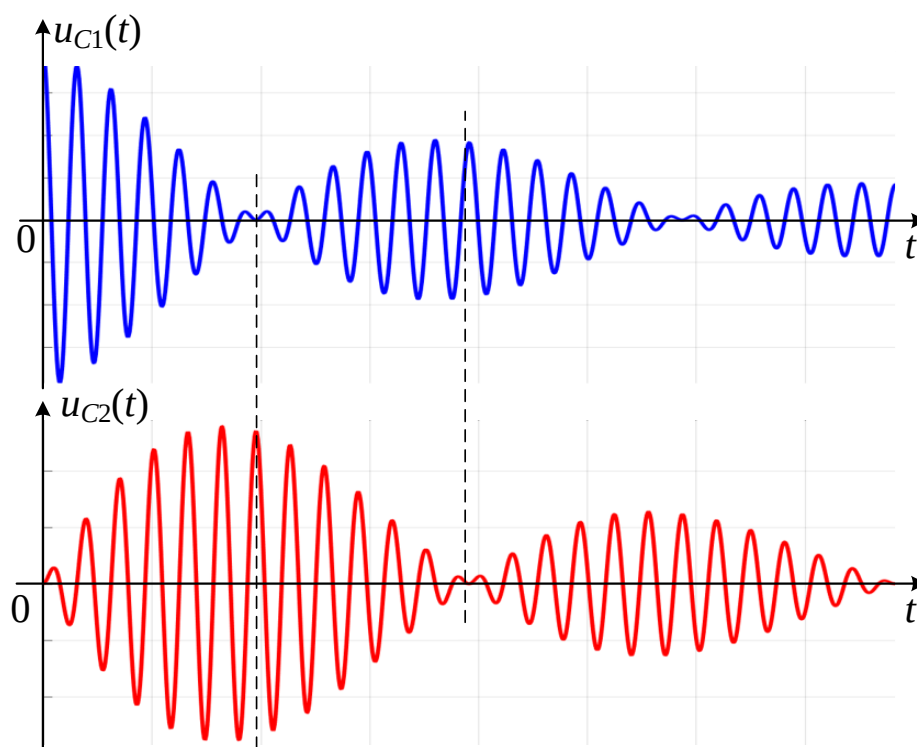


Рис. 9. Напряжения на конденсаторах контуров при наличии потерь

2.3. Свободные колебания в двух индуктивно связанных контурах при расстройке второго контура относительно первого

В предыдущем параграфе рассматривался случай, когда контуры были одинаковыми и собственные резонансные частоты контуров были одинаковы: $f_{01} = f_{02} = f_0$. Теперь рассмотрим случай, когда они отличаются, т.е. при расстройке второго контура относительно первого. Анализ свободных колебаний в двухконтурной системе при расстройке контуров довольно громоздок, поэтому ограничимся только тем, что приведем формулу для относительных частот связи как функции относительной расстройки контуров $x = f_{02}/f_{01}$ и коэффициента связи k при условии малости потерь в контурах. В таком случае можно показать, что для относительных частот связи выполняется соотношение

$$\frac{F_{1,2}}{f_{01}} = \sqrt{\frac{1+x^2 \pm \sqrt{(1+x^2)^2 - 4(1-k^2)x^2}}{2(1-k^2)}}. \quad (19)$$

Зависимости относительных частот связи F_1/f_{01} и F_2/f_{01} от x (так называемый график Вина) при коэффициентах связи $k_1 = 0.6$ и $k_2 = 0.2$ показаны на рис. 10.

При больших расстройках ($x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$) и $k \neq 0$ относительные частоты связи асимптотически стремятся к следующим значениям

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0: \quad \frac{F_1}{f_{01}} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \frac{F_2}{f_{01}} \rightarrow 0, \\ x \rightarrow \infty: \quad \frac{F_1}{f_{01}} &\rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \frac{F_2}{f_{01}} \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (20)$$

При точной взаимной настройке контуров, когда $x = 1$, их взаимодействие максимально, энергия полностью и периодически перекачивается между контурами, наблюдаются чёткие биения. При появлении небольшой

расстройки, когда $x \neq 1$, разность частот связи увеличивается, взаимодействие ослабевает, перекачка энергии становится неполной, период биений уменьшается, моды теряют чисто синфазный или противофазный характер. В случае значительной расстройки отношение амплитуд мод становится существенно неравным: колебания одной моды сосредоточены преимущественно в контуре с более высокой собственной резонансной частотой, а другой моды в контуре с более низкой собственной частотой. Чем сильнее расстройка, тем отчётливее проявляется такая локализация мод, и тем слабее становится обмен энергией между контурами. В предельных случаях очень больших или очень малых значений x система фактически распадается на два слабо взаимодействующих осциллятора.

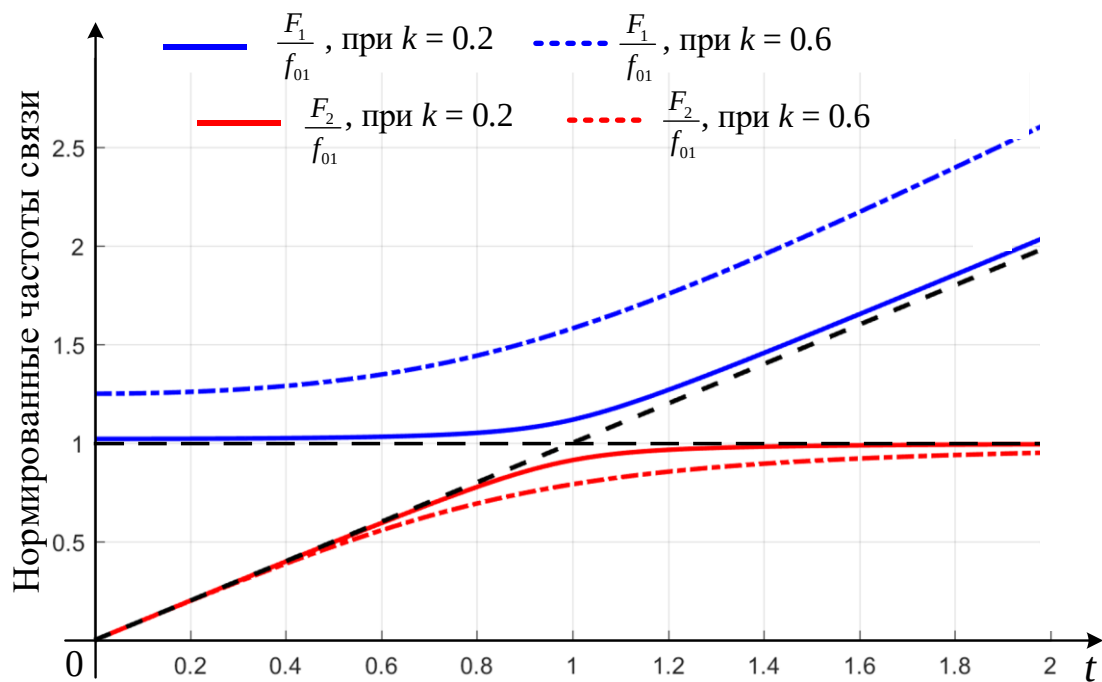


Рис. 10. Зависимости относительных частот связи от расстройки контуров (график Вина)