

240,160

лаб 16, 1, 2

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Э.Ф.Зайцев Б.А.Мартынов

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2008

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Э.Ф.Зайцев Б.А.Мартынов

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2008

УДК 621.3.01
ББК 22.336 я73
з 177

Зайцев Э.Ф., Мартынов Б.А. Радиотехнические цепи и сигналы. Электрические колебания в линейных цепях: Учеб. пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 32 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины ОПД.Ф.07 учебного плана подготовки бакалавров по направлениям 140400 «Техническая физика» и 210300 «Радиотехника» и специальной дисциплины «Основы радиофизики» по направлению 210400 «Телекоммуникации».

Пособие содержит описания трех лабораторных работ и методические указания по их выполнению.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 140400 «Техническая физика». Оно может быть также использовано студентами, обучающимися по направлениям 210300 «Радиотехника», 210400 «Телекоммуникации» и по специальности 201500 «Бытовая радиоэлектронная аппаратура».

Ил. 25. Табл. 1.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Исследование пассивных цепей	5
Вынужденные колебания в <i>LC</i> -контуре	13
Свободные колебания в <i>LC</i> -контурах	22

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном сборнике представлены описания и методические указания к трем лабораторным работам. Материал пособия содержит сведения теоретического и практического характера, достаточные для выполнения этих работ.

Лабораторные работы посвящены колебательным процессам в простейших электрических цепях: *RC*-фильтрах и *LC*-контурах. Их выполнение позволяет студентам глубже понять физические основы изучаемых явлений и закономерности, которым они подчиняются.

В первой работе исследуются *RC*-цепи, которые весьма часто используются в качестве фильтров нижних и верхних частот. Эта работа построена так, что она может выполняться без предварительной подготовки на первом (вводном) занятии. Одновременно студенты знакомятся с измерительными приборами, которые широко применяются и в последующих работах.

Во второй работе изучаются вынужденные колебания в колебательном *LC*-контуре: резонансные характеристики последовательного и параллельного контуров, их зависимость от физических параметров элементов схемы, возможность использования *LC*-контура в качестве частотно-избирательной цепи.

В третьей работе исследуются свободные колебания в одиночном *LC*-контуре и в системе двух индуктивно связанных контуров. Изучаемые здесь явления имеют принципиальное значение не только в радиосхемах, но и в устройствах СВЧ, оптического диапазона, а также в явлениях, происходящих на молекулярном уровне.

Настоящее пособие является переизданием ранее выпущенного пособия «Электрические колебания в линейных цепях. Методические указания к лабораторным работам»; авторы А.Д.Жуков, Э.Ф.Зайцев, Б.А.Мартынов, Ю.Н.Новиков, Л.: ЛГТУ, 1991. В данное издание внесены лишь небольшие изменения.

Лабораторная работа

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ

В данной лабораторной работе изучаются *RC*-цепи, часто применяемые в электронных устройствах в качестве простейших разновидностей электрических фильтров нижних и верхних частот. Объектом исследования является, кроме того, параллельный колебательный контур.

Цель лабораторной работы – умение проводить измерения при помощи приборов, используемых в учебной лаборатории, а также применять различные методы снятия частотных и временных характеристик простейших пассивных цепей и определения параметров цепей и сигналов.

Таблица. Назначение и погрешности измерительных приборов

Название	Назначение	Погрешность
Милливольтметр В3-38	Измерение действующего значения синусоидального напряжения	Основная приведенная погрешность прибора не выше 6% от ког-чного значения установленного предела измерения
Генераторы сиг- налов звуковых и ультразвуковых частот Г3-33, Г3-112	Источник гармонических колебаний	Основная приведенная погреш- ность по частоте не превышает (0,02 f +1Гц), где f – частота, установленная по шкале
Частотомер Ч3-33	Измерение частоты электрических колебаний	Основная погрешность измере- ния частоты не превышает $1/t$, где t – время измерения (счета)
Осциллографы универсальные С1-68, С1-83	Исследование фор- мы электрических колебаний, измере- ние напряжений сигналов, измерение временных интервалов	Основная погрешность измере- ния напряжений при размере изображения от 2 до 6 делений шкалы экрана не превышает 8%. Основная погрешность измерения временных интерва- лов при размере изображения по горизонтали от 4 до 8 делений не превышает 8%

Варианты исследуемых цепей собираются на монтажной плате посредством установки сменных вставок, в которые вмонтированы отдельные элементы: катушка индуктивности, резисторы, конденсаторы.

На вставках указаны номинальные значения параметров элементов (в том числе сопротивление потерь катушки). Допустимые отклонения от номиналов не превышают 10%.

Порядок выполнения работы

Однозвездный RC-фильтр в режиме гармонических колебаний

1. Используя схему измерений, приведенную на рис. 1, снимите амплитудно-частотные характеристики двух вариантов фильтров нижних частот (ФНЧ):

а) $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 1300 \text{ пФ}$; б) $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 10 \text{ нФ}$.

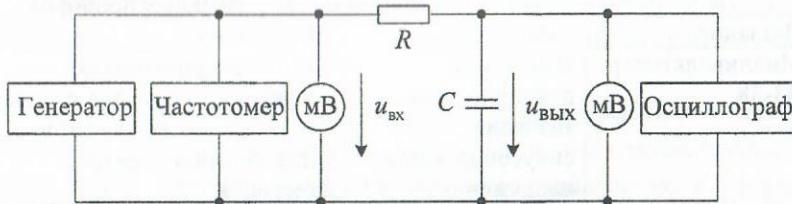


Рис. 1. RC-фильтр нижних частот с подключенными измерительными приборами

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – зависимость модуля комплексного коэффициента передачи фильтра $K = U_{\text{вых}}/U_{\text{вх}}$ от частоты f . (Здесь $U_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вых}}$ – действующие значения входного и выходного напряжений).

При снятии АЧХ целесообразно поддерживать $U_{\text{вх}}$ постоянным и равным, например, 0,1 В или 1 В; (такие значения удобны для вычисления K). Значения f выбирайте

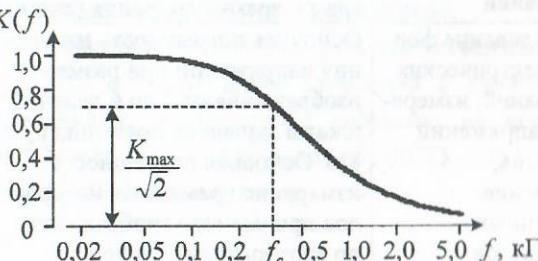


Рис. 2. Пример амплитудно-частотной характеристики ФНЧ ($f_c = 320 \text{ Гц}$).

таким образом, чтобы при построении АЧХ в полулогарифмическом масштабе обеспечивалось достаточно равномерное расположение отсчетов по частотной оси (пример на рис. 2).

2. Для обоих вариантов ФНЧ проведите измерения, необходимые для нахождения граничных частот f_c , на которых K равен $1/\sqrt{2} = 0,707$ от наибольшего значения.

3. При $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 10 \text{ нФ}$ снимите фазочастотную характеристику ФНЧ.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) – зависимость сдвига фаз ϕ между выходным и входным напряжениями от частоты.

Для нахождения сдвига фаз ϕ переведите осциллограф в режим « $X - Y$ » (при этом выключается периодическая развертка луча по горизонтали); подайте напряжение с выхода ФНЧ на вход « Y » осциллографа, а входное – на вход « X »; изменяя амплитуду входного напряжения и коэффициент отклонения канала « Y », добейтесь, чтобы получающаяся на экране фигура Лиссажу (рис. 3) охватывала большую часть экрана; совместите центр эллипса с центром масштабной сетки на экране. Сдвиг фаз ϕ находится при помощи соотношения

$$|\sin \phi| = X_0/A = Y_0/B,$$

где X_0 и A или Y_0 и B (рис. 3) измеряются в делениях масштабной сетки осциллографа.

Подберите частоту колебаний, при которой $\phi = 45^\circ$, и сравните ее со значением граничной частоты, найденным в п. 2. Постройте ФЧХ в полулогарифмическом масштабе на одном графике с АЧХ.

4. Рассчитайте граничные частоты ФНЧ по формуле $f_c = 1/(2\pi RC)$. Результаты вычислений сравните с измеренными значениями (см. п. 2), сведя расчетные и экспериментальные данные в таблицу.

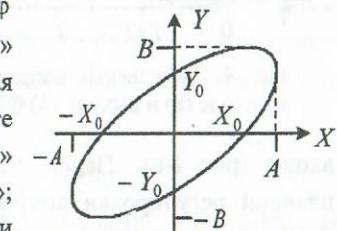


Рис. 3. Фигура Лиссажу.

Прохождение импульсов через фильтры нижних и верхних частот

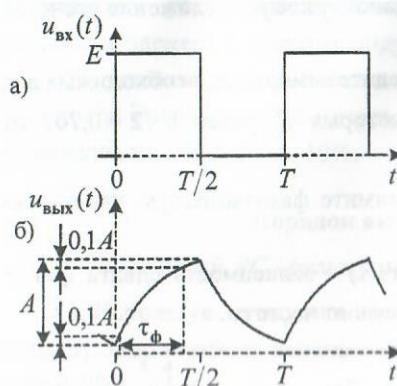


Рис. 4. Импульсные напряжения на входе (а) и выходе (б) ФНЧ.

входе (рис. 4-а). Перед измерениями необходимо установить ручки плавной регулировки коэффициентов отклонения луча по вертикали и скорости развертки в крайнее правое положение (крайнее правое при вращении по часовой стрелке). Вычислите частоту следования импульсов $F = 1/T$ и сравните ее с измеренной частотомером.

6. Измерьте значения амплитуды (размаха) A импульсов на выходе ФНЧ (рис. 4-б) при двух наборах параметров:

а) $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 1300 \text{ пФ}$; б) $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 10 \text{ нФ}$.

7. При $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 1300 \text{ пФ}$ измерьте длительность фронта выходного импульса τ_ϕ (см. рис. 4-б) и сравните ее с рассчитанной по формуле $\tau_\phi = 2,2RC$.

8. При тех же значениях параметров, что и в п. 6, зарисуйте осциллограммы входного и выходного напряжений. Отметьте на осциллограммах измеренные значения амплитуд, периода и длительности фронта (см. п. 7).

Убедитесь в том, что при $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 10 \text{ нФ}$ ФНЧ ведет себя как интегратор.

9. Используя полученные в п. 5 результаты измерений T и E , при помощи формулы $A = E \operatorname{th}(T/(4RC))$ (см. приложение) по заданным R и C

вычислите значения амплитуды (размаха) A и сравните их с найденными в п. 6, сведя в таблицу результаты расчета и эксперимента.

10. Поменяв местами резистор и конденсатор (при $C = 1300 \text{ пФ}$), получите и зарисуйте осциллограмму напряжения на выходе фильтра верхних частот (ФВЧ). Для импульса на выходе ФВЧ проведите измерение длительности τ_u по уровню 0,1 амплитуды (см. рис. 5) и сравните полученное значение с рассчитанным по формуле $\tau_u = 2,3RC$.

11. Для $R = 51 \text{ кОм}$, $C = 1300 \text{ пФ}$, используя экспериментально полученные для ФНЧ значения граничной частоты f_c и длительности фронта τ_ϕ , найдите произведение $f_c \tau_\phi$ и сравните его с теоретическим значением 0,35.

Параллельный колебательный контур

12. Соберите на монтажной плате параллельный колебательный контур, как показано на рис. 6. Перестраивая по частоте источник гармонических колебаний, найдите частоту f_0 , при которой наблюдается резонанс в параллельном контуре.

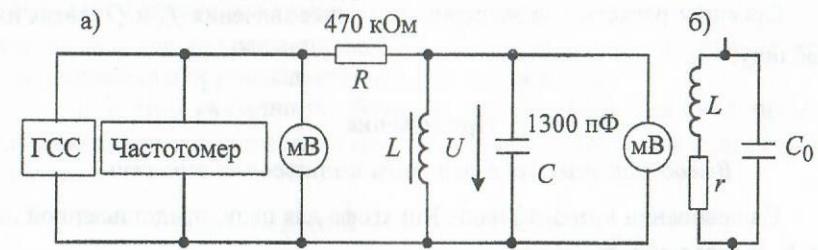


Рис. 6. Схема измерения резонансной кривой параллельного контура (а). Схема замещения катушки индуктивности (б).

Установите максимальное напряжение на контуре при резонансе равным 10 мВ. Измерьте напряжение на выходе генератора. Поддерживая его неизменным, найдите при помощи частотомера, подключенного к выходу

генератора, верхнюю (f_v) и нижнюю (f_n) границы полосы пропускания контура (по уровню $1/\sqrt{2} = 0,707$ от резонансного значения напряжения).

По формуле $Q = f_0/(f_v - f_n)$ вычислите добротность контура.

В диапазоне частот, при которых напряжение на контуре не ниже 30% от максимума, снимите резонансную кривую (рис. 7).

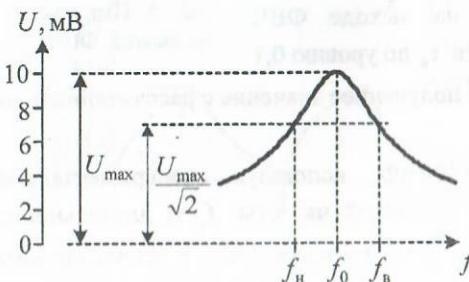


Рис. 7. Пример резонансной кривой параллельного контура.

13. Считая известными параметры катушки индуктивности (рис. 6-б), рассчитайте резонансную частоту и добротность контура по формулам:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_0 + C_n)}},$$

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{r},$$

где L – индуктивность катушки, r – сопротивление потерь (параметры L и r указаны на держателе катушки); C_0 – собственная емкость катушки ($C_0 \approx 40$ пФ); C_n – входная емкость вольтметра В3-38 с учетом кабеля ($C_n \approx 60$ пФ).

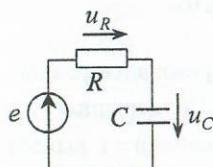
Сравните расчетные и экспериментальные значения f_0 и Q , сведя их в таблицу.

Приложение

Вывод формулы для амплитуды импульсов на емкости

На основании второго закона Кирхгофа для цепи, представленной на рис. 8, справедливо равенство

$$u_C + u_R = e. \quad (1)$$



Отсюда, а также из соотношений, связывающих токи и напряжения на элементах R и C , можно получить дифференциальное уравнение

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{RC} = \frac{de}{dt},$$

Рис. 8. RC-цепь.

которым описываются процессы в анализируемой цепи.

Для моментов времени t_0 и t , принадлежащих какому-либо интервалу, в течение которого ЭДС e остается неизменной ($de/dt = 0$), из полученного уравнения следует, что

$$u_R(t) = u_R(t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right). \quad (2)$$

Предположим, что входное напряжение (рис. 9-а) не содержит постоянной составляющей и при $nT < t < (n+0,5)T$ принимает значение $E/2$, а при $(n+0,5)T < t < nT$ равно $-E/2$. (Здесь n – любое целое число.) В установившемся режиме постоянные составляющие напряжений на сопротивлении и емкости также равняются нулю, а значения каждого из этих напряжений в моменты времени, отстоящие друг от друга на нечетное число полупериодов, различаются только знаком (рис. 9-б, в).

Моменты времени $t = nT/2$ необходимо рассматривать особо. В эти моменты напряжение u_R получает скачкообразное приращение на $+E$ или $-E$ в зависимости от того, увеличивается или уменьшается входное напряжение.

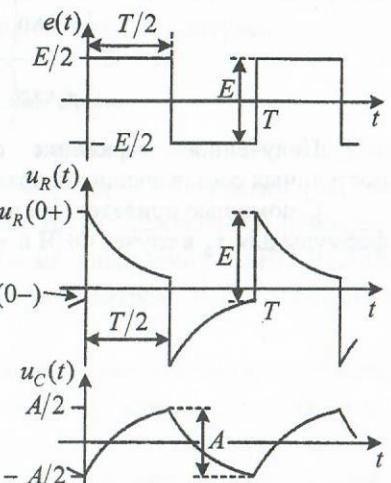
С учетом сказанного, обозначая через $u_R(0-)$ и $u_R(0+)$ значения напряжения на сопротивлении при $t = 0$ до и после скачка и используя (2), получаем

$$u_R(0-) = u_R(0+) - E = -u_R(0+)\exp\left(-\frac{T}{2RC}\right),$$

откуда

$$u_R(0+) = \frac{E}{1 + \exp\left(-\frac{T}{2RC}\right)}. \quad (3)$$

Выражая далее напряжение на емкости при $t = T/2$ через u_R и e согласно (1), получим



$$\frac{A}{2} = \frac{E}{2} - u_R(0+) \exp\left(-\frac{T}{2RC}\right),$$

и принимая во внимание (3), приедем к следующей формуле для амплитуды (размаха) импульсов на емкости

$$A = E \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{2RC}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{T}{2RC}\right)} = E \operatorname{th}\left(\frac{T}{4RC}\right).$$

Полученное выражение справедливо и в случае ненулевых постоянных составляющих напряжений (см., например, рис. 4).

С помощью приведенных выше соотношений можно получить также формулы для τ_ϕ в случае ФНЧ и τ_u в случае ФВЧ.

Лабораторная работа

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В LC-КОНТУРЕ

Цель работы – углубление знаний о резонансных явлениях в колебательных контурах, приобретение навыков в проведении измерений частотных характеристик и электрических параметров контуров.

1. Принципиальная схема

Схемы последовательного и параллельного LC-контуров собираются на соединительной плате лабораторной установки так, как показано на рис. 1 и 2. Там же показаны точки подключения приборов: генератора стандартных сигналов (ГСС) и милливольтметра (мВ). Частота синусоидальных колебаний измеряется частотомером, подключенным к выходным гнездам ГСС.

При помощи съемных элементов можно изменять такие параметры, как сопротивление потерь контура, емкость контура, коэффициент включения катушки индуктивности. Кроме того, возможно плавное изменение емкости вращением ручки эталонного конденсатора переменной емкости C_3 . К макету приложена градуировочная кривая эталонного конденсатора.

2. Задание

Последовательный колебательный контур (рис. 1)

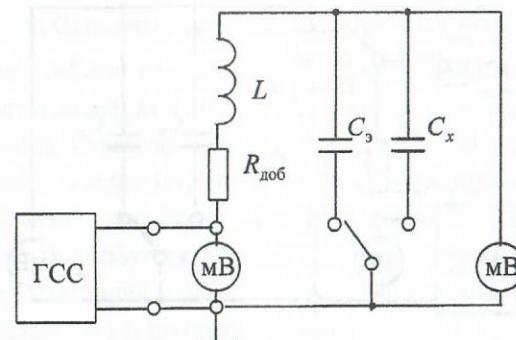


Рис. 1. Схема последовательного контура.

1. Соберите схему последовательного контура при $R_{\text{доб}} = 0$, $C = C_s$. Снимите зависимость резонансной частоты f_0 от емкости C_s , взяв 4 – 5 значений C_s во всем диапазоне ее перестройки.

Построив график зависимости $1/f_0^2$ от C_s (рис. 7) определите по нему значения индуктивности L катушки и ее собственной емкости C_0 .

2. Измерьте резонансную частоту контура, образованного катушкой индуктивности и конденсатором C_x . Определите емкость C_x по значению эталонной емкости C_s , которой соответствует та же резонансная частота. Дальнейшую работу продолжайте с конденсатором C_x .

3. Снимите резонансные кривые напряжения на конденсаторе U_C в зависимости от частоты f при различных значениях добавочного сопротивления $R_{\text{доб}} = 0, 36, 62, 120 \Omega$; постройте графики в относительном масштабе по оси ординат ($U_C / U_{C\max}$). Определите добротность Q и затухание d контура для каждого значения $R_{\text{доб}}$.

4. На частоте резонанса измерьте напряжение на конденсаторе $U_{C\max}$ и на входе контура $U_{\text{вх}}$ для $R_{\text{доб}} = 0, 36, 62, 120 \Omega$. По этим данным определите добротность Q и затухание d контура и сравните с ранее полученными значениями (п. 3), а также рассчитайте собственное сопротивление потерь контура R_0 по графику зависимости d от $R_{\text{доб}}$ (рис. 6).

Параллельный колебательный контур (рис. 2)

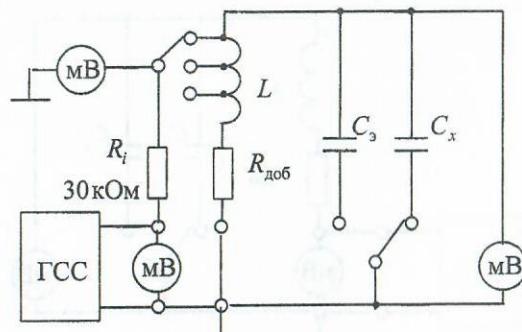


Рис. 2. Схема параллельного контура.

5. Измерив напряжения на контуре U_1 и на зажимах генератора $U_{\text{вх}}$, определите эквивалентное сопротивление контура R_s на резонансной частоте при полном включении контура и различных значениях добавочного сопротивления $R_{\text{доб}} = 0, 36, 62, 120 \Omega$. Полученные данные сравните с результатами расчета R_s через ранее найденные параметры контура по формуле (7).

6. Установив $R_{\text{доб}} = 0$, измерьте R_s на частоте резонанса при различных значениях коэффициента включения p . Величина p определяется как отношение напряжения U_1 на части катушки к напряжению U_k на всей катушке индуктивности. Сравните результаты с выводами теории.

7. Снимите резонансные кривые напряжения на контуре $U_1(f)$ при двух значениях коэффициента p , соответствующих полному ($p=1$) и неполному ($p < 1$) включению контура. Сравните значения ширины полосы пропускания для обоих случаев.

3. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Схемы измерений.
3. Результаты измерений и расчетов по каждому пункту задания, используемые расчетные формулы, графики снятых зависимостей.
4. Объяснение полученных результатов.

4. Основные свойства исследуемых схем

В данной работе исследуются вынужденные колебания в LC -контуре, происходящие под действием внешнего генератора гармонических колебаний. Известно, что амплитуда вынужденных колебаний в LC -контуре резко возрастает, когда частота генератора приближается к частоте свободных колебаний контура. Это явление называется резонансом, оно используется в частотно-избирательных цепях для того, чтобы из смеси колебаний с различными частотами выделить колебания, занимающие заданную узкую полосу частот.

Частота резонанса зависит только от параметров контура и равна

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1)$$

На этой частоте напряжения и токи в элементах контура достигают экстремальных значений, а входное сопротивление становится чисто активным.

Генератор внешней ЭДС может быть включен последовательно в контур либо подключен параллельно его основным элементам (L и C). Соответственно этому различают последовательный контур – рис. 3 и

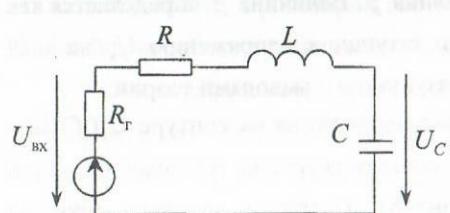


Рис. 3. Последовательный контур.

параллельный контур – рис. 4. Во втором случае возможно как полное включение генератора в цепь (рис. 4-а), так и неполное включение (рис. 4-б), когда генератор присоединен лишь к части емкости или к части индуктивности контура.

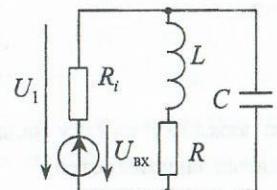


Рис. 4-а. Параллельный контур с полным включением индуктивности.

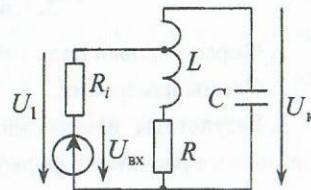


Рис. 4-б. Параллельный контур с неполным включением.

Последовательный колебательный контур. В последовательном контуре на частоте резонанса реактивные сопротивления индуктивности и емкости взаимно компенсируются:

$$\omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0,$$

поэтому модуль полного сопротивления контура минимален и равен активному сопротивлению потерь R . Последнее складывается из сопротивления нагрузки $R_{\text{доб}}$, дополнительно введенного в контур, и

сопротивления R_0 , обусловленного потерями энергии в катушке и в конденсаторе:

$$R = R_0 + R_{\text{доб}}.$$

Величина

$$\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C} \quad (2)$$

называется характеристическим сопротивлением контура, а отношение

$$Q = \rho/R \quad (3)$$

– добротностью контура. Обратная ей величина $d = 1/Q$ называется затуханием контура.

Из сказанного следует, что амплитуды напряжений на входе контура и на его элементах при резонансе подчинены соотношениям

$$U_{bx} = U_R, \quad \frac{U_L}{U_{bx}} = \frac{U_C}{U_{bx}} = \frac{\rho}{R} = Q. \quad (4)$$

Обычно $Q \gg 1$, следовательно, на резонансной частоте напряжение на каждом реактивном элементе во много раз больше входного напряжения.

Зависимость амплитуды тока в последовательном контуре от частоты описывается выражением

$$I = \frac{U_{bx}/R}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \quad (5)$$

Эта зависимость имеет вид резонансной кривой, показанной на рис. 5. Аналогичный вид имеют резонансные кривые напряжений U_L и U_C .

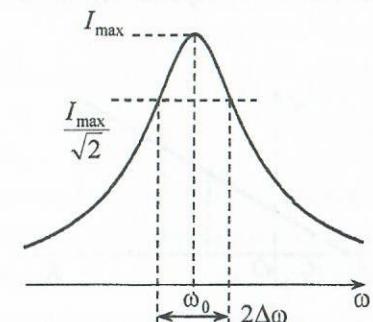


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика контура.

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d. \quad (6)$$

Соотношение (6), как и (4), можно использовать для измерения добротности контура. Однако следует учитывать, что при выводе формулы (6) напряжение генератора $U_{\text{вх}}$ предполагалось не зависящим от частоты. Реальный генератор обладает конечным внутренним сопротивлением R_r . Поэтому, если ЭДС генератора при перестройке частоты остается постоянной, то напряжение $U_{\text{вх}}$ будет изменяться, так как изменяется потребляемый контуром ток. В этих условиях относительная ширина резонансной кривой $2\Delta\omega/\omega_0$ будет равна не $1/Q$, а $1/Q'$, где $Q' = \rho/(R + R_r)$. Формула (6) остается справедливой при условии, что сопротивление R_r отнесено к элементам контура. Если же поддерживать постоянным не ЭДС, а напряжение $U_{\text{вх}}$, то формула (6) будет давать собственную добротность контура Q (без R_r). Формула же (4) всегда дает только собственную добротность.

Поскольку $R = R_0 + R_{\text{доб}}$, затухание контура d зависит линейно от $R_{\text{доб}}$:

$$d = \frac{R_{\text{доб}} + R_0}{\rho}.$$

Если построить зависимость d от $R_{\text{доб}}$, то получим прямую линию (рис. 6), которая пересечет ось абсцисс в точке A левее начала координат. Очевидно, длина отрезка OA численно равна величине R_0 .

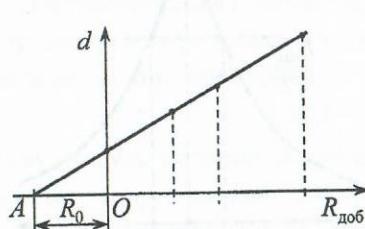


Рис. 6. К определению сопротивления потерь.

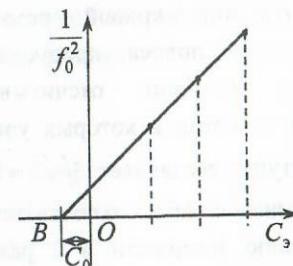


Рис. 7. К определению собственной емкости катушки.

Реальная катушка обладает не только сопротивлением потерь, но и собственной емкостью. Если на катушке имеется напряжение, значит, есть и электрическое поле между ее витками. Запасаемая полем энергия зависит от межвитковой емкости. Влияние этой распределенной емкости приближенно можно учесть в виде сосредоточенной емкости C_0 , как бы присутствующей между зажимами катушки. Воспользуемся формулой (1), согласно которой

$$2\pi f_0 = 1/\sqrt{L(C_0 + C_s)},$$

где C_s – емкость эталонного конденсатора. Отсюда видно, что зависимость величины $1/f_0^2$ от C_0 является линейной. Если построить этот график и продолжить прямую линию до пересечения с осью абсцисс (рис. 7), то отрезок OB будет равен величине C_0 .

Параллельный колебательный контур. Переходим к рассмотрению параллельного контура. На резонансной частоте его сопротивление максимально (сравните с последовательным контуром) и равно

$$R_s = Q\rho = \rho^2/R. \quad (7)$$

При введении в контур добавочного сопротивления $R_{\text{доб}}$ величина эквивалентного сопротивления R_s уменьшается. На частоте резонанса токи в индуктивной и емкостной ветвях контура в Q раз больше входного тока (т. е. тока генератора).

Модуль полного сопротивления контура зависит от частоты следующим образом:

$$|Z_k| = \frac{R_s}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}, \quad (8)$$

где частота ω_0 по-прежнему определяется выражением (1). Форма этой кривой практически повторяет зависимость (5). Напряжение на контуре U_k будет меняться так же, как меняется $|Z_k|$, если ток генератора не зависит от нагрузки, т. е. при питании от идеального генератора тока. В лабораторном макете питание контура осуществляется через

сопротивление R_i , имеющее большую, но конечную величину. При этом напряжение на контуре описывается выражением

$$U_k = U_{bx} \left| \frac{Z_k}{R_i + Z_k} \right|. \quad (9)$$

Если $R_i \rightarrow \infty$, то данная зависимость приближается к (8), а если $R_i \rightarrow 0$, то U_k перестает зависеть от частоты. Таким образом, значение R_i существенно влияет на форму резонансной кривой U_k . Нетрудно показать, что с учетом R_i ширина полосы пропускания равна

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q'}, \quad (10)$$

где

$$Q' = \frac{Q}{1 + R_s/R_i}.$$

На резонансной частоте сопротивление контура чисто вещественное $Z_k = R_s$ и формула (9) принимает вид

$$U_{k \text{рез}} = U_{bx} \frac{R_s}{R_i + R_s}. \quad (11)$$

Отсюда, измерив U_k , U_{bx} и зная R_i , можно найти R_s .

Для того чтобы уменьшить влияние R_i на частотно-избирательные свойства контура, применяют неполное включение контура в цепь источника. На рис. 4-б показан контур с неполным включением индуктивности. Отношение напряжения U_1 на части индуктивности, к которой подключен генератор, к напряжению U_k на всей индуктивности называется коэффициентом включения: $p = U_1/U_k$. (Ясно, что $p \leq 1$.) В этом случае входное сопротивление контура между точками подключения генератора на частоте параллельного резонанса¹⁾ равно

$$R_{s1} = p^2 R_s = p^2 p^2 / R. \quad (12)$$

Формулы (8)–(11) остаются верными, если в них R_s заменить на R_{s1} .

¹ В контуре с неполным включением наряду с параллельным резонансом возможен последовательный резонанс, при котором сопротивление контура минимально. Он наступает в той ветви, которая содержит реактивности противоположных знаков. Частота последовательного резонанса обычно лежит далеко от частоты параллельного резонанса. В данной работе исследуется только область параллельного резонанса.

Отсюда непосредственно видно, что чем меньше p , тем слабее влияние R_i на ширину резонансной кривой, поскольку Q' приближается к собственной добротности Q .

Неполное включение контура применяют также для согласования его с низкоомными цепями, например, в схемах транзисторных усилителей.

5. Вопросы для самопроверки

1. Что такое добротность контура и какими способами можно ее измерить?
2. Как зависят резонансная частота контура и полоса пропускаемых частот от параметров контура?
3. Как измерить собственную емкость катушки, ее индуктивность и сопротивление потерь?
4. Как влияет внутреннее сопротивление генератора на резонансные кривые последовательного и параллельного контуров?
5. Для чего применяют неполное включение параллельного контура? Как влияет коэффициент включения на входное сопротивление и частотные характеристики контура?

Лабораторная работа

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В LC-КОНТУРАХ

Цель лабораторной работы – исследование свободных (собственных) колебаний в одиночном колебательном контуре и в системе двух индуктивно связанных между собой колебательных контуров при импульсном воздействии электродвижущей силы. Временные характеристики этих процессов необходимо учитывать при исследовании радиоэлектронных устройств, содержащих колебательные системы. Принципиальный характер изучаемых здесь явлений позволяет квалифицированно подходить и к анализу подобных колебательных систем в диапазоне СВЧ и в оптическом диапазоне.

1. Схема макета

Основными элементами схемы, приведенной на рис. 1, являются два колебательных контура. Первый контур образован последовательным соединением катушек индуктивности L_1 и L'_1 ($L = L_1 + L'_1$) и конденсатора C_1 , второй – соединением индуктивности L_2 и конденсатора C_2 . Между этими контурами существует варьируемая индуктивная связь за счет взаимной

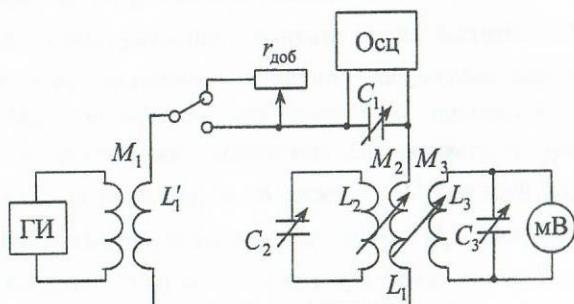


Рис. 1. Схема макета.

индуктивности M_2 . Если M_2 не равна нулю, то реализуется система двух индуктивно связанных контуров.

Для изучения различных режимов свободных колебаний в первый контур включено переменное сопротивление $r_{\text{доб}}$. Импульсная ЭДС,

возбуждающая свободные колебания, вводится в первый контур от генератора прямоугольных импульсов (ГИ), смонтированного в макете, через индуктивную связь M_1 .

Используемая в работе измерительная аппаратура состоит из осциллографа, милливольтметра и резонансного волнометра (высокодобротный контур L_3C_3 , индуктивно связанный с первым контуром, и милливольтметр). К лабораторному макету прилагаются все необходимые градуировочные графики.

2. Задание к лабораторной работе

При подготовке к лабораторной работе необходимо изучить настоящее описание, обратив внимание на анализ переходных процессов в r, L, C цепях. Необходимо также ознакомиться с краткими инструкциями по эксплуатации осциллографа и вольтметра.

Свободные колебания в одиночном контуре

1. Изучите схему лабораторного макета и включите измерительные приборы.
2. Проконтролируйте отсутствие связи между первым и вторым контурами ($M_2 = 0$), воспользовавшись градуировочной кривой.
3. Снимите осциллограмму напряжения на C_1 при $r_{\text{доб}} = 0$.
4. Снимите осциллограммы напряжения на C_1 при различных значениях $r_{\text{доб}}$ (взять 3–4 значения, контролировать колебательный характер процесса).
5. Изменяя $r_{\text{доб}}$, определите значение $r_{\text{доб}}^*$, соответствующее моменту перехода от колебательного режима к апериодическому. Снимите осциллограмму для этого случая.
6. Определите зависимость частоты собственных колебаний контура от величины C_1 (взять 8–10 значений C_1 равномерно по всему диапазону изменения). Для измерения частоты могут использоваться анализатор спектра или прибор, в котором выполняется операция быстрого преобразования Фурье, либо резонансный волнометр (L_3C_3 + милливольтметр).

Свободные колебания в двух связанных колебательных контурах

7. Установите малую связь между первым и вторым контурами ($M_2 \neq 0$). Изменяя величину емкости C_2 , настройте второй контур на собственную частоту первого контура f_{01} по максимуму амплитуды напряжения на C_2 .

8. По осциллограммам $u_{C_2}(t)$ определите отношение периода огибающей к периоду высокой частоты при 3–4 значениях коэффициента связи k . Рассчитайте k по формуле $k = 2T_b / T_{\text{огиб}}$, где T_b – период колебаний высокой частоты, $T_{\text{огиб}}$ – период огибающей. Сравните эти значения с соответствующими значениями k , взятыми из градуировочной кривой.

9. Произведите измерения частот связы F_1 и F_2 при различных значениях коэффициента связи k , используя любой из способов, упомянутых в п. 6.

10. Расстраивая второй контур относительно первого (изменяя $x = f_{02} / f_{01}$), измерьте частоты связы F_1 и F_2 при фиксированном значении k .

3. Обработка результатов измерений

Используя осциллограммы, полученные в пп. 3, 4, определите для разных $r_{\text{доб}}$ затухание контура d и добротность Q .

Постройте график $d = f(r_{\text{доб}})$ и из него найдите собственное сопротивление контура r .

Используя данные п. 6, постройте график $f_0^{-2} = \varphi(C_1)$ и из него найдите емкость катушки индуктивности контура C_0 . Рассчитайте величину индуктивности L .

Исходя из того, что при переходном режиме $d = 2$, найдите теоретическое значение добавочного сопротивления

$$r_{\text{доб}}^* = 2 \sqrt{\frac{L}{C_1 + C_0}} - r$$

и сравните с полученным экспериментально в п. 5.

По данным п.п. 9, 10 постройте зависимости относительных частот связы $\Omega_{1,2} / \omega_{01} = F_{1,2} / f_{01}$ от k и от $x = f_{02} / f_{01}$.

4. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Схема измерений.
3. Названия пунктов работы с описанием условий эксперимента.
4. Осциллограммы.
5. Графики зависимостей и расчетные данные.
6. Анализ результатов.

5. Импульсные характеристики одиночного колебательного контура и системы двух индуктивно связанных контуров

Одиночный колебательный контур

Рассмотрим процессы, протекающие в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов r, L, C (рис. 2). Пусть в момент времени $t = 0$ действие внешней ЭДС прекращается ($e(t) = 0$ при $t \geq 0$), после чего в цепи происходят свободные колебания. Тогда напряжение на емкости $u_C(t)$ подчиняется однородному дифференциальному уравнению:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (1)$$

Решение этого уравнения содержит две константы, зависящие от начальных значений напряжения $u_C(0)$ и тока в цепи $i(0)$. Если, например, $u_C(0) = 0, i(0) \neq 0$ ² решение при $t \geq 0$ имеет вид:

$$u_C = \frac{i(0)}{\beta C} e^{-\alpha t} \sin(\beta t), \quad (2)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{r}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

² Такие начальные условия реализуются, когда контур возбуждается достаточно коротким импульсом ЭДС, поскольку напряжение u_C за очень малый промежуток времени практически не изменяется.

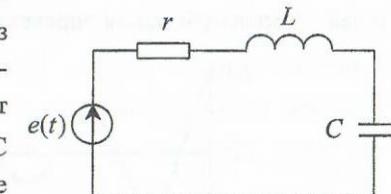


Рис. 2. Последовательный колебательный контур.

Из (2) ясно, что характер процессов в этой цепи существенным образом зависит от параметров контура. В связи с этим рассматриваются три возможных случая.

1. Колебательный режим. Пусть $\alpha < \omega_0$, тогда β – мнимая величина и (2) запишется так:

$$u_C = \frac{i(0)}{\omega_1 C} e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t). \quad (3)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Таким образом, временная зависимость для напряжения и для тока $i = C du_C / dt$ в случае колебательного режима представляет собой произведение экспоненциально убывающего и синусоидального множителей. Степень убывания определяется коэффициентом затухания α .

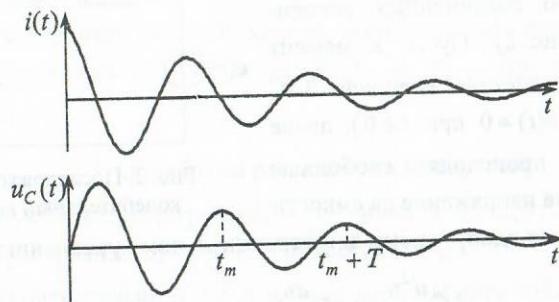


Рис. 3. Колебательный режим в последовательном контуре.

Графики для $i(t)$ и $u_C(t)$ изображены на рис. 3.

Так как колебания затухающие, то, строго говоря, они не являются периодическими. Вместе с тем нулевые значения, например, для $u_C(t)$, определяемые из условия $\sin(\omega_1 t) = 0$, реализуются через равные промежутки времени.

Величину $T = 2\pi/\omega_1$ называют периодом свободных (собственных) колебаний контура:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}, \text{ или } T \approx 2\pi\sqrt{LC} \text{ при } \alpha \ll \omega_0.$$

Взяв отношение двух значений напряжения для моментов времени t_m и $t_{m+1} = t_m + T$, получим $u_{Cm}/u_{Cm+1} = e^{\alpha T}$, т. е. это отношение является величиной, не зависящей от времени и определяемой параметрами контура. Параметр $\Theta = \ln(u_{Cm}/u_{Cm+1}) = \alpha T$ называется логарифмическим декрементом колебания, его легко выразить через добротность контура:

$$\Theta = \alpha T = \frac{r}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{Q} = \pi d, \quad (4)$$

где Q – добротность контура, d – затухание.

В заключение проанализируем рис. 3 с энергетической точки зрения. В начальный момент времени энергия импульса генератора оказывается сконцентрированной в катушке индуктивности и описывается формулой $W_L = Li^2/2$. Затем происходит перераспределение энергии и через четверть периода становится максимальной энергия, сосредоточенная в конденсаторе $W_C = Cu_C^2/2$. Такой процесс, сопровождающийся неизбежными потерями в резисторе, продолжается до тех пор, пока вся электромагнитная энергия не перейдет в тепловую.

2. Апериодический (нециклический) режим. В этом случае $\alpha > \omega_0$ ($r > 2\sqrt{L/C}$), β – вещественная величина и $\alpha > \beta$. Из (2) видно, что колебаний в контуре нет, так что $u_C(t)$ и $i(t)$ носят апериодический характер (рис. 4). Это объясняется большим значением сопротивления потерь, и вся электромагнитная энергия преобразуется в тепловую в течение короткого промежутка времени.

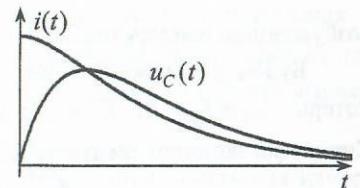


Рис. 4. Апериодический режим в последовательном контуре.

3. Критический случай перехода от апериодического режима к колебательному. Этому случаю соответствуют значения

$$\alpha = \omega_0, \quad \beta = 0, \quad r = 2\sqrt{L/C}, \quad Q = 1/2, \quad d = 2.$$

Тогда (если раскрыть неопределенность типа 0/0 в (2) или (3))

$$u_C = \frac{i(0)}{C} te^{-\alpha t}. \quad (5)$$

На практике этот случай можно осуществить, наблюдая осциллограммы $u_C(t)$ и переходя от колебательного режима к апериодическому при увеличении в цепи $r_{\text{доб}}$. Значение $r_{\text{доб}}$, при котором на осциллограмме наблюдается исчезновение колебаний, свидетельствует о реализации критического случая³⁾.

Система связанных контуров

Рассмотрим режим свободных колебаний в колебательной системе с двумя степенями свободы – в двух индуктивно связанных между собой колебательных контурах. Пусть, как и ранее, в короткий интервал времени, длиящийся до момента времени $t=0$, система подвергается ударному

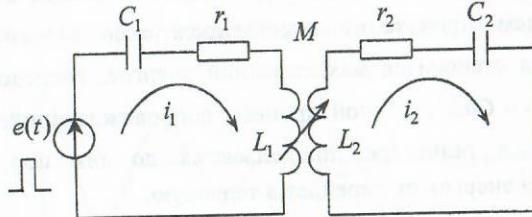


Рис. 5. Система двух индуктивно связанных контуров.

возбуждению импульсом ЭДС, которая вводится в первый контур (рис. 5).

Будем для простоты считать контуры одинаковыми и не имеющими потерь: $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, $r_1 = r_2 = 0$. Используя второй закон Кирхгофа, запишем следующую систему уравнений для токов при $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt} &= 0, \\ L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int i_2 dt + M \frac{di_1}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где M – взаимная индуктивность между контурами. Решение этой системы уравнений с конечным начальным значением тока в первом контуре $i_1(0) \neq 0$ и нулевым значением тока во втором $i_2(0) = 0$ имеет вид:

³ В действительности резкой разницы между колебательным и апериодическим режимами вблизи критического случая нет, поэтому визуально по осциллограмме определить критический случай можно лишь приближенно.

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{i_1(0)}{2} (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) = i_1(0) \cos \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t \right) \cdot \cos \left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t \right), \\ i_2(t) &= \frac{i_1(0)}{2} (\cos \Omega_2 t - \cos \Omega_1 t) = i_1(0) \sin \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t \right) \cdot \sin \left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad k = \frac{M}{L}.$$

Из (7) видно, что свободные колебания в двухконтурной цепи представляют собой сумму двух колебаний с разными частотами, хотя контуры совершенно одинаковы. Причиной расщепления частоты ω_0 на две: "быструю" (Ω_1) и "медленную" (Ω_2) является связь между контурами, поэтому собственные частоты называют также частотами связи.

Зависимости частот связи от k показаны на рис. 6.

Вместе с тем формулы (7) при близких Ω_1 и Ω_2 (т. е. при малых k) указывают на наличие биений – рис. 7. Множитель, зависящий от разностной частоты, можно трактовать как "огибающую" колебаний высокой частоты.

Такую временную характеристику можно использовать для измерения коэффициента связи k . Определим отношение периода огибающей к периоду высокой частоты:

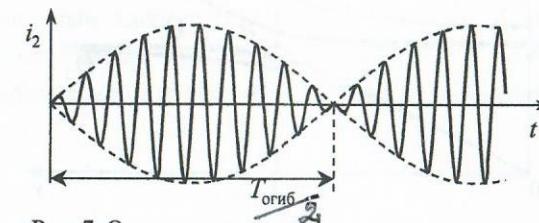


Рис. 7. Осциллограмма тока во втором контуре.

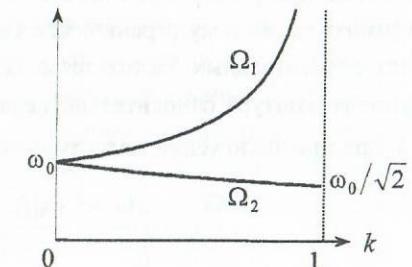


Рис. 6. Графики зависимостей частот связи от коэффициента связи.

$$T_{\text{огиб}} = \frac{4\pi}{\Omega_1 - \Omega_2}, \quad T_{\text{в}} = \frac{4\pi}{\Omega_1 + \Omega_2}, \quad (8)$$

$$N = \frac{T_{\text{огиб}}}{T_{\text{в}}} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1 - \Omega_2} = \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k}}.$$

Если $k \ll 1$, то $N = 2/k$.

До сих пор рассматривался случай, когда собственные частоты контуров были одинаковы. Анализ свободных колебаний в двухконтурной системе при расстройке второго контура относительно первого довольно громоздок, поэтому ограничимся здесь только тем, что приведем формулу для относительных частот связи как функции относительной расстройки второго контура относительно первого $x = f_{02}/f_{01}$ и коэффициента связи k при предположении малости потерь в контурах:

$$\frac{\Omega_{1,2}}{\omega_{01}} = \left[\frac{1+x^2 \pm \sqrt{(1+x^2)^2 - 4(1-k^2)x^2}}{2(1-k^2)} \right]^{1/2}.$$

Зависимости частот связи от x изображены на рис. 8 (график Вина).

Из них видно, что взаимодействие двух контуров происходит наиболее эффективно, во-первых, при близких собственных частотах контуров ($x \approx 1$) и, во-вторых, при больших коэффициентах связи. Поэтому можно дать такое качественное объяснение: ток, протекающий в первом контуре, создает во втором контуре вынуждающую силу, приводящую (при настройке в резонанс) к появлению в нем значительного тока и к ответной реакции в первом контуре. Таким образом, для токов и

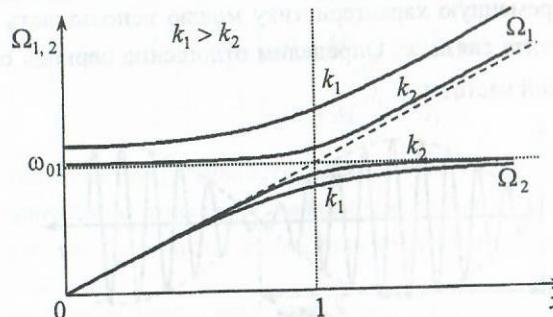


Рис. 8. График Вина.

напряжений имеет место подобие амплитудно-модулированного колебания, т. е. фактически колебания двух частот Ω_1 и Ω_2 . При больших расстройках ($x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$) и $k \neq 0$ относительные частоты связи асимптотически стремятся к следующим значениям:

$$\text{при } x \rightarrow \infty: \frac{\Omega_1}{\omega_{01}} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \frac{\Omega_2}{\omega_{01}} \rightarrow 1,$$

$$\text{при } x \rightarrow 0: \frac{\Omega_1}{\omega_{01}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \frac{\Omega_2}{\omega_{01}} \rightarrow 0.$$

С энергетической точки зрения влияние второго контура приводит к тому, что наряду с перераспределением энергии между индуктивным и емкостным накопителями с высокой частотой происходит перераспределение между первым и вторым контурами с разностной частотой. Причем все это сопровождается неизбежными потерями в сопротивлениях. Временные характеристики двухконтурной системы с энергетическими потерями представляют собой затухающие колебания с биениями (рис. 9).

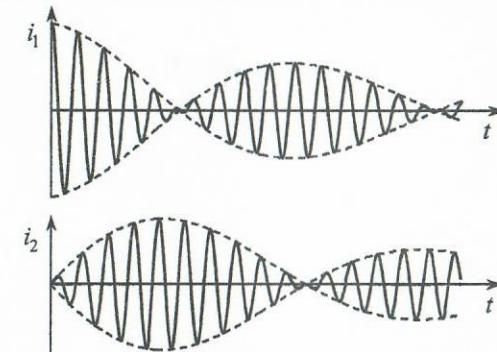


Рис. 9. Токи в контурах при наличии потерь.

В заключение отметим, что рассмотренная двухконтурная система является типичным примером связанной системы с двумя степенями свободы. Аналогичные процессы наблюдаются в механических (две струны), сверхвысокочастотных и оптических колебательных системах.

6. Вопросы для самопроверки

1. Каковы импульсные характеристики тока в одиночном контуре и напряжения на емкости в случае колебательного режима? Дайте определение логарифмического декремента колебаний. Укажите связь с ним затухания и добротности.
2. В чем заключаются особенности апериодического режима свободных колебаний и перехода от колебательного режима к апериодическому?
3. Каковы импульсные характеристики токов в обоих контурах и напряжения на емкости второго контура при различных коэффициентах связи между контурами в режиме свободных колебаний?
4. Объясните характер зависимости частот связи от коэффициента связи и от расстройки между контурами.

ЗАЙЦЕВ Эрнест Федорович
МАРТЫНОВ Борис Александрович

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 — учебная литература

Подписано в печать 24.03.2008. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 400 экз. Заказ 79.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в типографии Издательства Политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29