

### 3. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

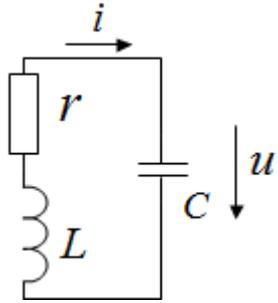
**Вынужденные** колебания — происходят под действием внешних сил, изменяющихся во времени, т.е. это — реакция системы (цепи) на внешнее колебательное воздействие.

**Свободные** колебания совершаются в отсутствие всякого внешнего воздействия; они происходят только за счет начального запаса энергии в самой системе.

Колебательные системы - запасенная энергия преобразуется из одного вида в другой, диссипация энергии мала. Колебания носят циклический (квазипериодический) характер, например, затухающая синусоида.

В режиме вынужденных гармонических колебаний в колебательной системе наблюдается явление резонанса: сильное возрастание амплитуды колебания, когда частота внешнего воздействия приближается к частоте свободного колебания самой системы.

### 3.1. Свободные колебания в LC-контуре



Свободные колебания не являются гармоническими, и к ним непосредственно метод КА не может быть применен.

$$L \frac{di}{dt} + ri + u = 0, \quad i = C \frac{du}{dt} \quad \rightarrow \quad LC \frac{d^2u}{dt^2} + rC \frac{du}{dt} + u = 0$$

Обозначения:  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\alpha = r/2L$   $\rightarrow$   $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$

Решение ищем в виде:  $u(t) = Ae^{pt}$

$$Ae^{pt} (p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2) = 0$$

Характеристическое уравнение:  $p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$

Корни:  $p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

Каждый корень дает свое частное решение дифференциального уравнения. Общее же решение является их суперпозицией:

$$u(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad \rightarrow \quad \frac{i(t)}{C} = \frac{du}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$$

Для однозначного решения используем начальные условия:

$$\begin{aligned} u(0) = U_0 & \rightarrow A_1 + A_2 = U_0 \\ i(0) = C \frac{du(0)}{dt} = I_0 & \rightarrow p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{I_0}{C} \end{aligned}$$

Значения  $U_0$ ,  $I_0$  однозначно определяют начальный запас энергии в цепи.

Характер свободного колебания зависит от соотношений между параметрами цепи. Здесь возможны три случая:

1. Аперiodический (т.е. нециклический) режим:

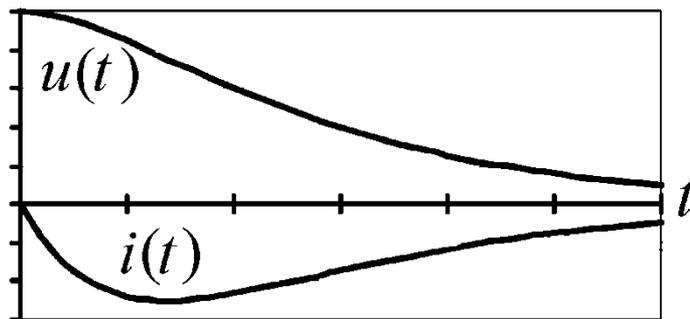
$$\alpha > \omega_0 \quad \rightarrow \quad \frac{r}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \rightarrow \quad r > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \rightarrow \quad r > 2\rho$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{- характеристическое сопротивление контура}$$

Оба корня вещественны и отрицательны:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \rightarrow \quad p_1 = -\alpha_1, \quad p_2 = -\alpha_2$$

Решение  $u(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$



$$I_0 = 0 \quad U_0 \neq 0 \quad \tau = \alpha_m^{-1}$$

При  $t \rightarrow \infty$  напряжение и ток монотонно приближаются к нулю по экспоненте  $\sim e^{-\alpha_m t}$

$\alpha_m$  - меньшая из величин  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$

- постоянная времени цепи

2. Колебательный режим:  $\alpha < \omega_0 \rightarrow r < 2\rho$

Корни характеристического уравнения образуют комплексно сопряженную пару:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \rightarrow p_1 = -\alpha + j\Omega, \quad p_2 = -\alpha - j\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

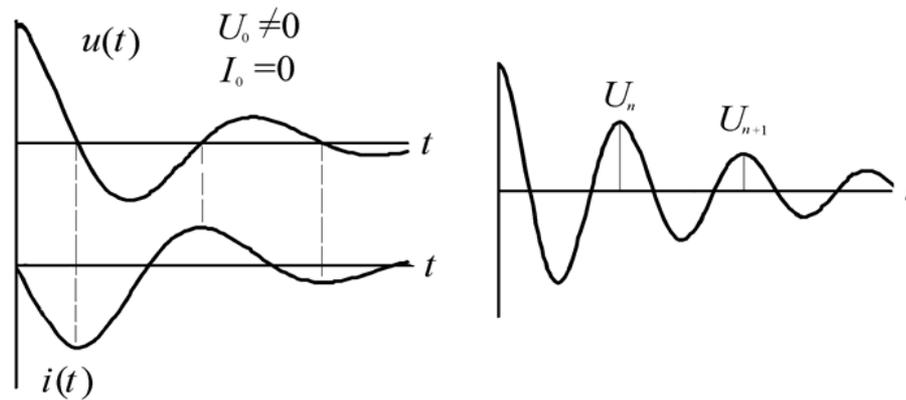
$$e^{(-\alpha \pm j\Omega)t} = e^{-\alpha t} (\cos \Omega t \pm j \sin \Omega t)$$

Решение имеет вид  $u(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t) = A e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \psi)$

Постоянные  $B_1$  и  $B_2$  или  $A$  и  $\psi$  находятся из начальных условий.

Процесс представляет собой колебание, близкое к синусоидальному, с экспоненциально убывающей амплитудой (колебательный режим).

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  - частота свободного колебания контура



$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$  - период колебания (точнее, период смены фаз, так как само колебание неперiodическое)

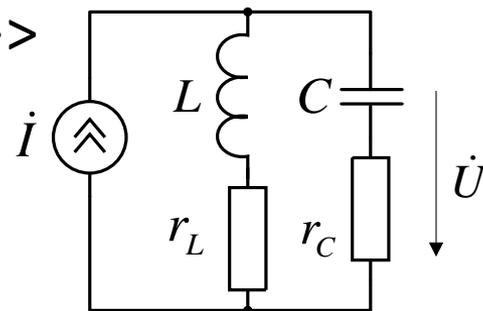
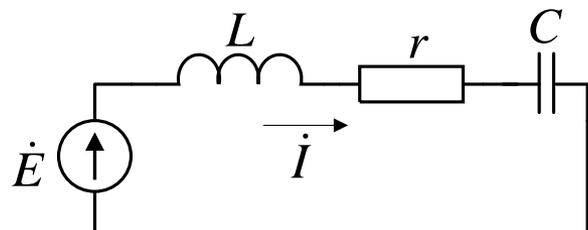
$\alpha$  - коэффициент затухания,

$\tau = \frac{1}{\alpha}$  - постоянная времени колебательного контура. За время  $t$  ордината огибающей уменьшается в  $e$  раз. При этом  $u(t)$ ,  $i(t)$  могут совершить много колебаний, если  $\Omega \gg \alpha$ .

Изохронность: «период»  $T_0$  (как и частота  $\Omega$ ), не зависит от начальных условий и не изменяется в процессе затухания амплитуды колебаний.

## 3.2. Вынужденные колебания в последовательном LC контуре

Последовательный и параллельный контуры →



- $r$  - сопротивление собственных потерь контура
- сопротивление источника сигнала и
- сопротивление нагрузки (если оно есть)

Колебания гармонические → метод комплексных амплитуд.

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{z} = \frac{\dot{E}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad |\dot{i}| = \frac{|\dot{E}|}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$r \ll x_L$  или  $|x_C|$ , то почти для всех частот (кроме области вблизи резонансной частоты):

$$|\dot{i}| = \frac{|\dot{E}|}{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|}$$

Область частот  $x_L = |x_C| \rightarrow$  ток резко возрастает  $\rightarrow$  потерями уже пренебрегать нельзя:

$$\omega \rightarrow \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad \rightarrow \quad I_{\max} = E_m / r$$

$\omega_0$  - резонансная частота контура

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  - собственная частота контура

Реактивное сопротивление контура  $j(\omega L - 1/\omega C)$

$\omega < \omega_0 \rightarrow$  емкостной характер ( $x < 0$ )

$\omega > \omega_0 \rightarrow$  индуктивный характер ( $x > 0$ )

$\omega = \omega_0 \rightarrow$  чисто активное сопротивление,

Напряжение на  $r$ :  $\dot{U}_r = r\dot{I} = \dot{E} \quad U_{rm} = E_m.$

Напряжение на  $L$  и  $C$ :  $\dot{U}_L = j\omega_0 L \dot{I}, \quad \dot{U}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \dot{I} \rightarrow \dot{U}_L = -\dot{U}_C = j\rho \dot{I},$

где  $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$  - характеристическое («волновое») сопротивление контура.

$$\omega = \omega_0 \quad U_{Lm} = U_{Cm} = \rho I = \rho \frac{E_m}{r} = QE_m,$$

$$Q = \frac{\rho}{r} \quad \text{- добротность контура}$$

Типичное значение  $Q$  в радиодиапазоне — от 30÷40 до 200

При резонансе напряжения на  $L$  и  $C$  противоположны по фазе и компенсируют друг друга, а их амплитуды в  $Q$  раз больше амплитуды ЭДС. Резонанс в последовательном контуре иногда называют резонансом напряжений.

$$u_C = U_m \sin \omega t \quad \rightarrow \quad \dot{U}_m = -jU_m \quad \rightarrow \quad \varphi_{uc} - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \varphi_i = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{I}_m = I_m \quad \rightarrow$$

$$i = I_m \cos \omega t \quad \rightarrow \quad I_m = \omega C U_m$$

$$\text{Запасенная энергия} \quad W_L(t) = \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega t, \quad W_C(t) = \frac{1}{2} C U_m^2 \sin^2 \omega t$$

$$\text{Общий запас энергии} \quad W_\rho = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 C^2 U_{Cm}^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2$$

$$W_L(t) + W_C(t) = W_\rho (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = W_\rho = \text{const.}$$

Происходит колебательный обмен энергией между индуктивностью и емкостью, причем общий запас энергии сохраняется. Источник  $E$  компенсирует потери энергии в сопротивлении.

Активная мощность  $P = \frac{1}{2} r I_m^2$

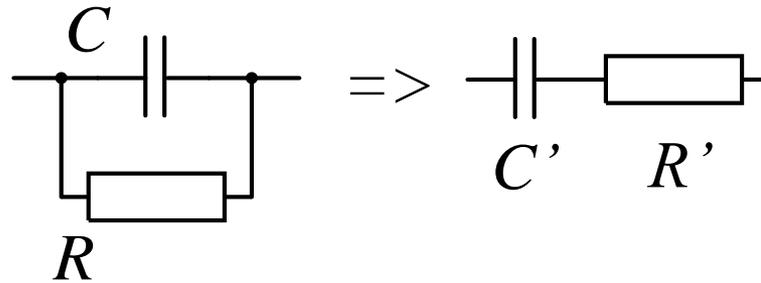
$W_r = PT$  - потери энергии за один период колебаний

$$\frac{W_\rho}{W_r} = \frac{L I_m^2 \omega_0}{r I_m^2 2\pi} = \frac{Q}{2\pi} \rightarrow Q = 2\pi \frac{W_\rho}{W_r}$$

$d = \frac{1}{Q}$  - затухание контура,  $Q = \frac{\rho}{r}$

В общем случае  $r = r_{\text{собств}} + r_{\text{внеш}}$ , где  $r_{\text{собств}}$  обусловлено потерями в самих элементах контура, а  $r_{\text{внеш}}$  — потерями в сопротивлениях источника и нагрузки.

Если сопротивление нагрузки или потерь включено параллельно  $L$  или  $C$ , то его надо пересчитать в эквивалентное последовательное соединение.



$$d = \frac{r_{\text{собств}} + r_{\text{внеш}}}{\rho} \quad \text{- общее затухание} \rightarrow Q = \frac{1}{d} \quad \text{нагруженная добротность}$$

$$\frac{r_{\text{собств}}}{\rho} = d_{\text{собств}} \quad \text{- собственное затухание} \rightarrow Q_{\text{собств}} = \frac{1}{d_{\text{собств}}}$$

-собственная добротность контура

$$Q < Q_{\text{собств}}$$