

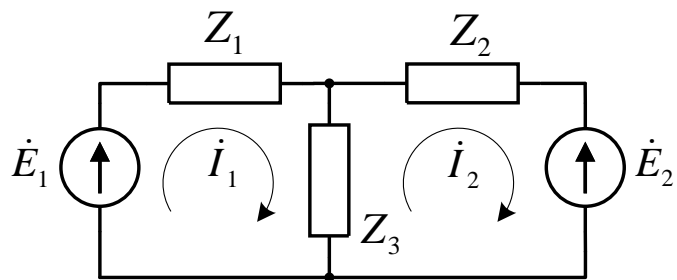
При использовании законов Кирхгофа число уравнений равно числу ветвей. Для уменьшения числа уравнений (и неизвестных величин) используют методы контурных токов, узловых потенциалов и эквивалентных генераторов.

## 2.8. Метод контурных токов.

Вместо токов ветвей вводятся вспомогательные так называемые контурные токи. При этом ток в каждой ветви либо совпадает с одним из контурных токов, либо является алгебраической суммой нескольких контурных токов.

Пример:

$$n = p - q + 1 = 2 \quad \text{- независимых контуров}$$



2-ой закон Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = z_1 \dot{I}_1 + z_3 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2), \\ -\dot{E}_2 = z_3 (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + z_2 \dot{I}_2. \end{cases}$$

По 1-му закону Кирхгофа ток через  $z_3$  равен:  $(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = (z_1 + z_3)\dot{I}_1 - z_3\dot{I}_2, \\ -\dot{E}_2 = -z_3\dot{I}_1 + (z_2 + z_3)\dot{I}_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z_1 + z_3 \text{ - собственное сопротивление} \\ \text{первого контура} \end{array}$$

–  $z_3$  - сопротивление связи первого и второго контуров. Знак минус у сопротивления связи появляется вследствие того, что в общей ветви направления контурных токов были выбраны противоположными.

Общий случай:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 + \dots + z_{1n}\dot{I}_n \\ \dot{E}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 + \dots + z_{2n}\dot{I}_n \\ \dots\dots\dots \\ \dot{E}_n = z_{n1}\dot{I}_1 + z_{n2}\dot{I}_2 + \dots + z_{nn}\dot{I}_n \end{cases} \quad \begin{array}{l} n \text{ - число независимых контуров,} \\ \dot{I}_k \text{ - контурный ток } k\text{-го контура,} \\ \dot{E}_k \text{ - контурная ЭДС (сумма всех ЭДС,} \\ \text{действующих в } k\text{-м контуре, с} \\ \text{учетом их направлений по} \\ \text{отношению к направлению} \\ \text{контурного тока),} \end{array}$$

$z_{kk}$  - собственное сопротивление  $k$ -го контура (сумма сопротивлений всех его ветвей, все со знаком «+»)

$z_{km}$  ( $k \neq m$ ) - сопротивление связи  $k$ -го и  $m$ -го контуров (сопротивление общей ветви со знаком «+», если токи  $\dot{I}_k$  и  $\dot{I}_m$  в ней направлены одинаково, и со знаком «-», если противоположно; оно равно нулю, если контуры  $k$  и  $m$  не имеют общих элементов).

Итак, с помощью 1-го закона Кирхгофа выражаются токи ветвей через контурные токи и подставляются в уравнения 2-го закона Кирхгофа. Число неизвестных (и число уравнений) по данному методу равно числу независимых контуров, т.е. меньше, чем число всех ветвей.

Решение:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \dot{E}_1 & z_{12} & \cdot & z_{1n} \\ \dot{E}_2 & z_{22} & \cdot & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dot{E}_n & z_{n2} & \cdot & z_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} z_{11} & \dot{E}_1 & \cdot & z_{1n} \\ z_{21} & \dot{E}_2 & \cdot & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & \dot{E}_n & \cdot & z_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и т.д.,}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdot & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdot & z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdot & z_{nn} \end{vmatrix} \quad - \text{ главный определитель системы}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + \dots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{n1}}{\Delta}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + \dots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{n2}}{\Delta}$$

$$\dot{I}_n = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} + \dots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{nn}}{\Delta}$$

- разложение числителя по элементам столбца, содержащего ЭДС.

$\Delta_{km}$  - алгебраическое дополнение элемента  $z_{km}$  определителя  $\Delta$  (произведение минора этого элемента на  $(-1)^{k+m}$ )

$$\Delta_{km} = (-1)^{k+m} \begin{vmatrix} z_{11} & \dots & z_{1m} & \dots & z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{k1} & \dots & z_{km} & \dots & z_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & \dots & z_{nm} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix}$$

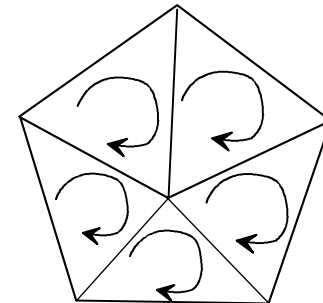
отмеченные строка и столбец вычеркиваются

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^n \dot{E}_m \Delta_{mk}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad - \text{ общее решение}$$

Замечания:

1. Если схема содержит идеальные генераторы тока, то эти токи целесообразно выбирать в качестве контурных, тогда число неизвестных контурных токов уменьшается на число известных токов генераторов.
2. При наличии в схеме параллельных ветвей, не содержащих ЭДС, замена их одним эквивалентным комплексным сопротивлением сокращает число контуров.
3. В планарной схеме всегда можно выбрать систему независимых контуров так, что во всех сопротивлениях связи токи смежных контуров будут направлены встречно. Например, для этого достаточно взять в качестве независимых контуров так называемые ячейки, и направить все контурные токи по часовой стрелке (или все — против).

В непланарной схеме в общем случае не представляется возможным иметь в общих ветвях только разности контурных токов.

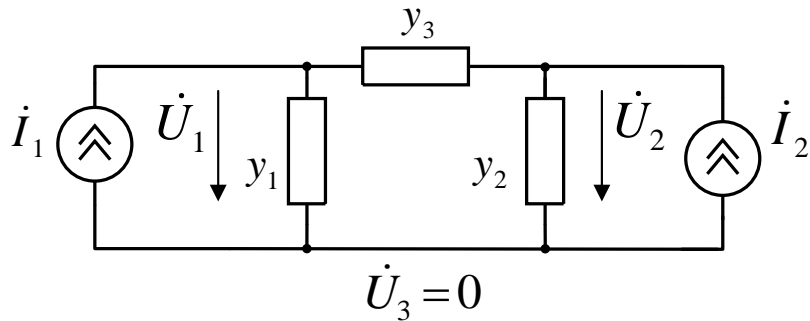


## 2.9. Метод узловых потенциалов.

Отыскиваются потенциалы узлов  $\rightarrow$

$\rightarrow$  определяются напряжения на ветвях и токи в них.

Пример:



$\dot{U}_3 = 0$  - опорный узел

По 1-му закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = y_1 \dot{U}_1 + y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) \\ \dot{I}_2 = y_2 \dot{U}_2 + y_3 (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (y_1 + y_3) \dot{U}_1 - y_3 \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = -y_3 \dot{U}_1 + (y_2 + y_3) \dot{U}_2 \end{cases}$$

В общем случае, если схема содержит  $q$  узлов, получается  $q-1$  уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = y_{11} \dot{U}_1 + y_{12} \dot{U}_2 + \dots + y_{1,q-1} \dot{U}_{q-1} \\ \dot{I}_2 = y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 + \dots + y_{2,q-1} \dot{U}_{q-1} \\ \dots \\ \dot{I}_{q-1} = y_{q-1,1} \dot{U}_1 + y_{q-1,2} \dot{U}_2 + \dots + y_{q-1,q-1} \dot{U}_{q-1} \end{cases}$$

Последний  $q$ -й узел принят за опорный (базисный), выбор опорного узла произволен.

$\dot{I}_k$  - суммарный ток всех источников, втекающих в  $k$ -й узел (берутся только те источники, которые непосредственно соединены с данным узлом)

$y_{kk}$  - собственная проводимость  $k$ -го узла (сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в данном узле)

$y_{km}$  - проводимость связи между  $k$ -м и смежным с ним  $m$ -м узлом (сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих эти узлы, взятая всегда со знаком «минус» при выбранном направлении отсчета узловых потенциалов к базовому узлу, независимо от того, является ли схема планарной или непланарной)

Решение: 
$$\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^{q-1} \dot{I}_m \Delta_{mk}, \quad k = 1, 2, \dots, q-1, \quad \Delta - \text{определитель системы}$$

$\Delta_{mk}$  - алгебраическое дополнение элемента  $y_{mk}$

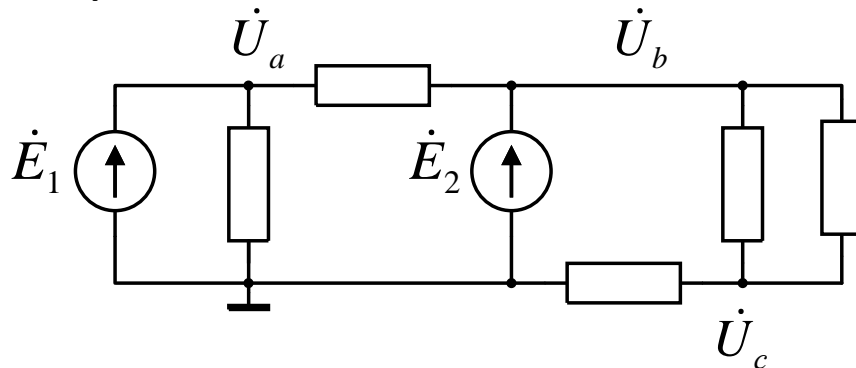
Замечания:

**1.** Уравнение для узловых потенциалов записаны в предположении, что схема содержит только источники тока. Если имеются источники напряжения, то их надо предварительно заменить эквивалентными источниками тока:

$$\dot{I}_\Gamma = \dot{E}y_\Gamma$$

**2.** При наличии ветвей с идеальными ЭДС ( $y_\Gamma = \infty$ ) удобно базисный узел выбрать так, чтобы эти ветви к нему непосредственно примыкали, тогда противоположные узлы этих ветвей будут иметь уже известные узловые потенциалы, т.е. число неизвестных уменьшается.

Пример: здесь только один неизвестный потенциал  $\dot{U}_c$

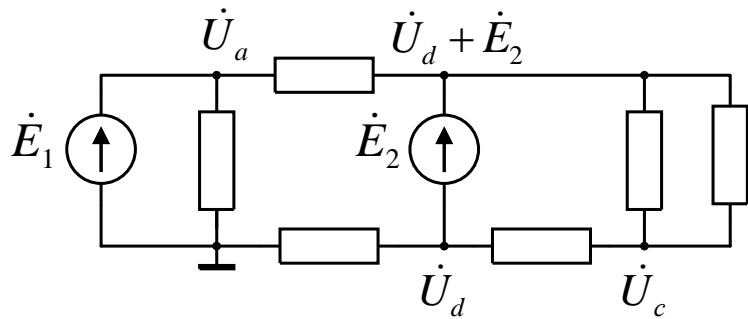


$$\dot{U}_a = \dot{E}_1$$

$$\dot{U}_b = \dot{E}_2$$



**3.** Если не удастся «заземлить» все ветви с идеальными ЭДС, т.е. остаются ветви с ЭДС, не примыкающие к базисному узлу, то к системе уравнений для неизвестных потенциалов следует добавить дополнительные уравнения, связывающие разности потенциалов узлов с известными ЭДС.



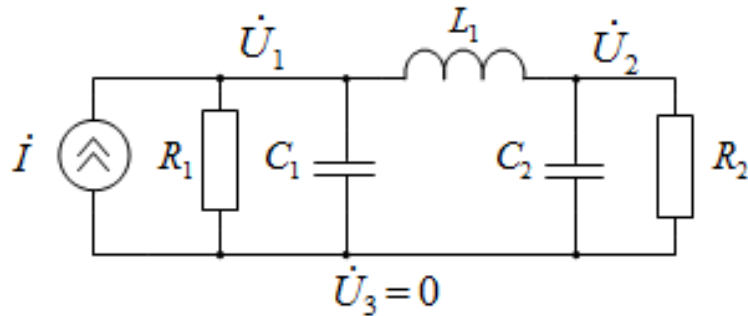
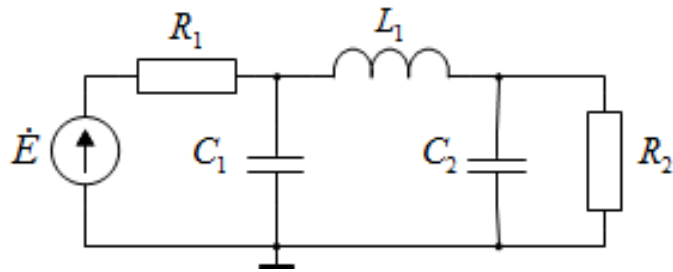
$$\dot{U}_a = \dot{E}_1$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_d + \dot{E}_2$$

Уравнения получаются из 1-го закона Кирхгофа для токов, которые выражены через потенциалы узлов с учетом 2-го закона.

Если схема содержит  $q$  узлов и  $n$  независимых контуров, то при  $n < q - 1$  удобнее метод контурных токов, а при  $n > q - 1$  — метод узловых потенциалов.

Пример (ФНЧ на LC):



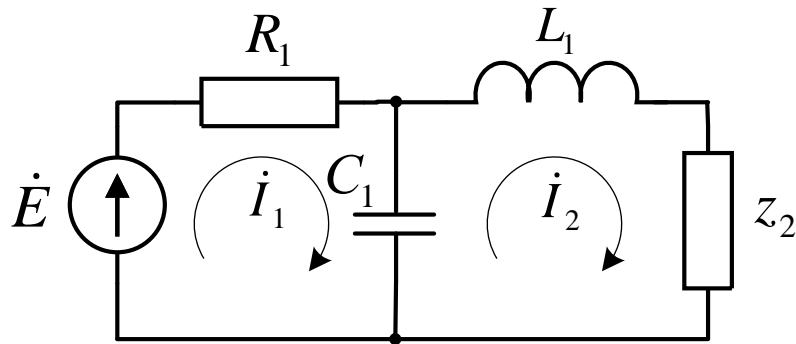
Три независимых контура и  $q-1=2$  независимых узла, т.е. удобнее метод узловых потенциалов.

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R_1} \text{ - заменяем источник } \dot{E}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} = \frac{\dot{E}}{R_1} &= y_{11}\dot{U}_1 + y_{12}\dot{U}_2 \\ 0 &= y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned} \right\}$$

$$y_{11} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}, \quad y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{j\omega L_1}, \quad y_{22} = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_1}.$$

Другое решение: Параллельные ветви  $R_2$ ,  $C_2$  не содержат ЭДС и их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением  $z_2$



$$z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

Число независимых контуров сокращается до двух и по методу контурных токов получится система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \\ 0 &= z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

$$z_{11} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}, \quad z_{12} = z_{21} = -\frac{1}{j\omega C_1}, \quad z_{22} = z_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}.$$