1.8. Принцип дуальности в теории цепей.

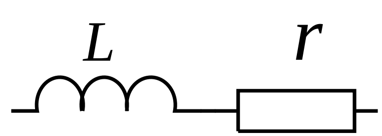
$u = R \cdot i$	$i = G \cdot u$	резистивные элементы
$u = L\dfrac{di}{dt}$	$i = C\dfrac{du}{dt}$	реактивные элементы
$u = e - R_{г} i$	$i = i_{г} - G_{г} u$	источники
$\sum\limits_{(\text{контур})} u = 0$	$\sum\limits_{(\text{узел})} i = 0$	законы Кирхгофа

Соотношения переходят друг в друга, если одновременно поменять местами $u \leftrightarrow i,\ e \leftrightarrow i_{г},\ R \leftrightarrow G,\ L \leftrightarrow C$

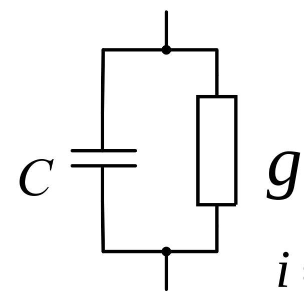
Отмеченное соответствие называется дуальностью (перестановочной двойственностью).

Законы цепей подчиняются принципу дуальности: Каждый закон теории цепей обладает своим дуальным аналогом, который также является законом теории цепей.

Для каждой цепи можно найти ее дуальный аналог, т.е. такую цепь, уравнения которой получаются путем дуальной замены величин в исходной цепи. При этом токам в первой цепи, которые в каждом узле подчиняются 1-му закону Кирхгофа, соответствуют напряжения во второй цепи, подчиняющиеся для каждого контура 2-му закону Кирхгофа, и наоборот. В частности, последовательному соединению элементов в исходной цепи соответствует параллельное соединение в дуальной цепи, и обратно.



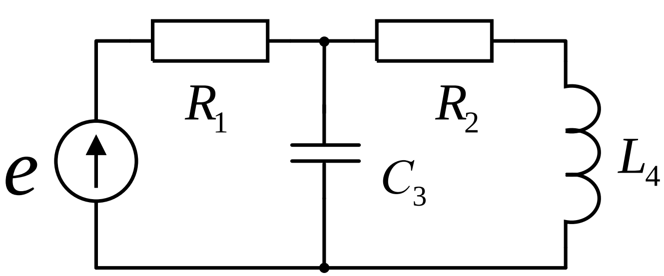
<->



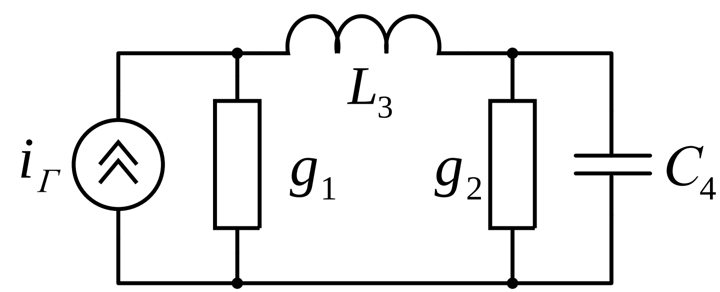
$$u = L\frac{di}{dt} + ri$$

$$i = C\frac{du}{dt} + gu$$

Пример:



<->



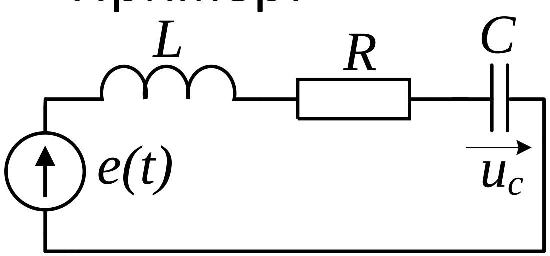
1.9. Уравнения, описывающие процессы в электрических цепях. Принцип суперпозиции и область его применимости.

1. Задачи анализа: отыскание токов и напряжений в цепи, возникающих под действием заданных источников. Задача анализа всегда имеет единственное решение.

Задача синтеза — построить цепь, которая обладала бы заранее заданными свойствами. При строгой постановке задача синтеза может вообще не иметь решения, а если решение и есть, то оно не обязательно единственное.

2. Если известна схема, то мы можем для нее написать уравнения по 1-му и 2-му законам Кирхгофа, а также уравнения связи между напряжением и током в каждом элементе. Число полученных при этом независимых уравнений равно числу неизвестных токов и напряжений, входящих в уравнения.

Пример:



$$\left.\begin{aligned} L\frac{di}{dt}+Ri+u_c&=e(t)\\ i&=C\frac{du_c}{dt}\end{aligned}\right\}\qquad LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=e(t)$$

В общем случае для цепи с m неизвестными токами и напряжениями можно записать систему m дифференциальных уравнений 1-го порядка, которая может быть сведена к дифференциальному уравнению порядка $n \leq m$ (поскольку некоторые неизвестные могут не входить под знак d/dt):

$$a_n\frac{d^ns}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{ds}{dt}+a_0s=f(t) \qquad (*)$$

$s(t)$ - искомая функция - ток или напряжение какой-либо ветви

$f(t)$ - функция, в которую входят все $e(t)$ и $i_г(t)$ (известны)

$a_n,\ldots, a_0$ - коэффициенты, в которые входят параметры цепи (R, L, C)

Если заданы токи во всех индуктивностях и напряжения на всех емкостях в начальный момент времени $t=0$, решение уравнения существует и единственно.

С физической точки зрения это означает, что мы можем однозначно предсказать все процессы в цепи, если известны действующие на нее внешние силы $e(t)$, $i(t)$, а также значения $i(0)$, $u(0)$, которые определяют начальный запас энергии в цепи.

Все цепи с точки зрения колебательных процессов в них, разделяются на три класса: **линейные, нелинейные и параметрические**.

3. Уравнения, выражающие законы Кирхгофа всегда являются **линейными**, а уравнения связи между u и i в элементах цепи могут быть и нелинейными.

В общем случае:

$$u_R(t) = u[i(t)] = R(i)i, \quad \text{где} \quad R(i) = \frac{u(i)}{i}$$

($u(i)$ - Вольт-амперная характеристика)

$$u_L(t) = \frac{d\psi}{dt} = L(i)\frac{di}{dt}, \quad \text{где} \quad L(i) = \frac{d\psi}{di}$$

$$i_c(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dQ}{du}\frac{du}{dt} = C(u)\frac{du}{dt}, \quad \text{где} \quad C(u) = \frac{dQ}{du}.$$

Если $u(i)$, $Q(u)$, $\psi(i)$ — линейные функции, то R, L, C — постоянные величины, следовательно в уравнении (*) все коэффициенты — постоянные, не зависящие от u, i. Цепь, процессы в которой описываются **линейными дифференциальными уравнениями**, называется **линейной**.

В противном случае цепь считается **нелинейной**. Для нее коэффициенты a_n ,...,a_0 зависят от токов и напряжений, уравнение (*) является нелинейным.

Важный частный случай нелинейных цепей – **параметрические:**

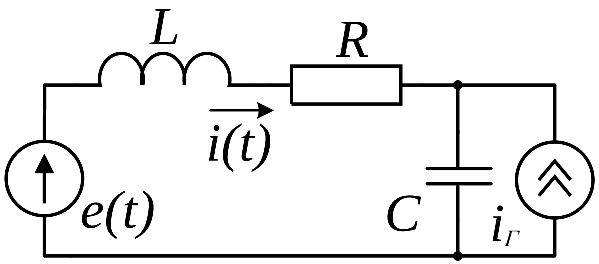
внешнее воздействие $f(t)$ является суммой двух колебаний $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$, причем $|f_1|<<|f_2|$. Тогда можно положить, что $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$, где $s_2(t)$ — реакция на $f_2(t)$ при $f_1(t)=0$, причем $|s_1|<<|s_2|$. Если пренебречь величинами s_1^2, s_1^3 ,... по сравнению с s_1 , то из (*) получится для s_1 линейное дифференциальное уравнение, его коэффициенты не зависят от s_1, но будут зависеть от t (через $s_2(t)$). Это уравнение описывает линейную (для s_1!) цепь, параметры которой меняются со временем под действием $f_2(t)$.

4. Принцип суперпозиции (выполняется только для линейных цепей): реакция линейной цепи на сумму двух (или нескольких) воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности.

$$\left.\begin{array}{l} s_1(t) \text{ решение (*) при } f(t)=f_1(t) \\ s_2(t) \text{ решение (*) при } f(t)=f_2(t) \end{array}\right\} s_1(t)+s_2(t) \text{ решение (*), при } f_1(t)+f_2(t)$$

при $A\,f_1(t)$ решение (*) есть $A\,s_1(t)$

Пример:



$$L\frac{di}{dt}+Ri+u_C=e, \qquad i=C\frac{du_c}{dt}-i_г;$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=e+Ri_г+L\frac{di_г}{dt}.$$

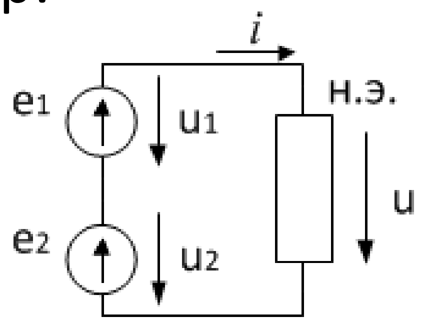
По принципу суперпозиции:

1. $i_г=0$ (размыкаем $i_г$) —> решение $u_{C1}(t)$
2. $e=0$ (замыкаем e) —> решение $u_{C2}(t)$
3. Складываем : $u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t)$

Принцип суперпозиции справедлив и для параметрических цепей. Линейные цепи с постоянными параметрами отличаются дополнительно еще тем, что если $s(t)$ есть отклик на $f(t)$, то откликом на $f(t+\tau)$ будет $s(t+\tau)$ (τ=const), то есть инвариантностью по отношению к произвольному сдвигу во времени. Параметрические цепи данным свойством не обладают.

Нелинейные цепи **не** подчиняются принципу суперпозиции.

Пример:



$$u = u_1 + u_2$$

$$i = au + bu^2$$ - квадратичная ВАХ

$$i = a(u_1 + u_2) + b(u_1 + u_2)^2 = au_1 + bu_1^2 + au_2 + bu_2^2 + 2bu_1u_2 \neq i_1 + i_2$$

По принципу суперпозиции:

$$i_1 = au_1 + bu_1^2$$

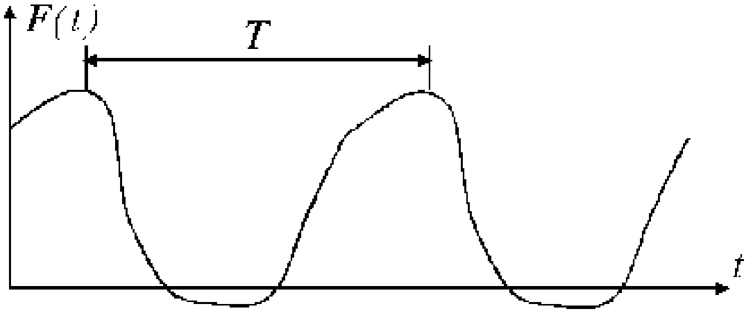
$$i_2 = au_2 + bu_2^2$$

$$i = i_1 + i_2 = au_1 + bu_1^2 + au_2 + bu_2^2$$

- ответ неверный

2. Гармонические колебания в линейных электрических цепях

2.1. Основные характеристики гармонических колебаний



Периодический процесс – значения изменяющейся величины повторяются через равные промежутки времени.

$F(t+T)=F(t)$

T – период, $f=1/T$ — частота колебаний, размерность $[f]=Гц=с^{-1}$

Гармоническое колебание: $a(t)=A_m\cos(\omega t+\varphi)=A_m\sin(\omega t+\varphi_0)$.

A_m — амплитуда, $\omega t+\varphi$ — фаза колебания в момент t,
φ — начальная фаза, ω — угловая (круговая) частота.
$\omega T=2\pi$ —> $\omega=2\pi/T=2\pi f$. Размерность $[\omega]$=рад/сек

Разность фаз двух колебаний с одинаковой частотой:

$$\varphi_{12}=\omega t+\varphi_1-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2=\mathrm{const}(t)$$

Характеристики периодического и гармонического колебаний.

Среднее значение (постоянная составляющая):

$$a_{cp} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{T+t_1} a(t)dt = \frac{1}{T}\int_{(T)} a(t)dt$$

Для гармонического колебания: $a_{cp} = 0$

Средневыпрямленное значение

$$|a|_{cp} = \frac{1}{T}\int_{(T)} |a(t)|dt$$

Для гармонических колебаний :

$$|a|_{cp} = \frac{2}{T} A_m \int_0^{T/2} \sin\omega t dt = -\frac{2A_m}{\omega T}\cos(\omega t)\Big|_0^{\pi} = \frac{A_m}{\pi}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{2}{\pi} A_m$$

Действующее (среднеквадратичное) значение:

$$A_\partial = \sqrt{(a^2)_{cp}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} a^2(t)dt}$$

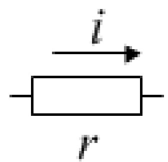
Для гармонического колебания:

$$A_\partial^2 = \frac{A_m^2}{T}\int_{(T)} \cos^2\omega t dt = \frac{A_m^2}{T}\int_{(T)} \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt = \frac{A_m^2}{2}, \qquad A_\partial = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$$

Любой переменный ток $i(t)$ нагревает сопротивление так же, как постоянный ток величиной I_∂.

Протекание гармонического тока через идеальные пассивные элементы:

<u>Сопротивление:</u>



$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u = ri = rI_m \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow U_m = rI_m \;, \Delta\varphi = 0$$

Мгновенная мощность:

$$p = U_m I_m \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{U_m I_m}{2}\left[1 + \cos 2(\omega t + \varphi)\right]$$

Используем соотношение: $\cos^2 \alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

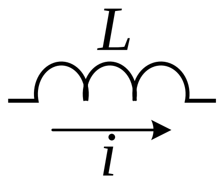
Мгновенная мощность меняется в пределах: $0 \le p \le U_m I_m$

$$p \ge 0$$

Средняя мощность

$$P = p_{cp} = \frac{1}{2} U_m I_m = U_\partial I_\partial = I_\partial^2 r$$

Индуктивность



$$i = I_m \cos\omega t$$

$$u = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin\omega t = \omega L I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на $\pi/2$.

$U_m = \omega L I_m$ $x_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление

Мгновенная мощность: $p = -U_m I_m \cos\omega t \sin\omega t = -U_\partial I_\partial \sin 2\omega t$

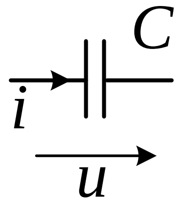
Используем соотношение: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Мгновенная мощность меняется в пределах: $-U_\partial I_\partial \le p \le U_\partial I_\partial$

Энергия в течение некоторого времени запасается в индуктивности (p>0), а затем отдается в цепь (p<0). Происходит обмен энергией между индуктивностью и остальной цепью.

Средняя мощность: $P_{cp} = 0$

Емкость



$$u = U_m \sin \omega t$$

$$i = C\frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Напряжение на емкости отстает по фазе от тока на $\pi/2$

$$I_m = \omega C U_m \qquad U_m = \frac{1}{\omega C} I_m \qquad |x_c| = \frac{1}{\omega C}$$ - модуль емкостного сопротивления

Мгновенная мощность: $p = U_m I_m \sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t) = U_д I_д \sin(2\omega t)$

Мгновенная мощность меняется в пределах: $-U_д I_д \le p \le U_д I_д$

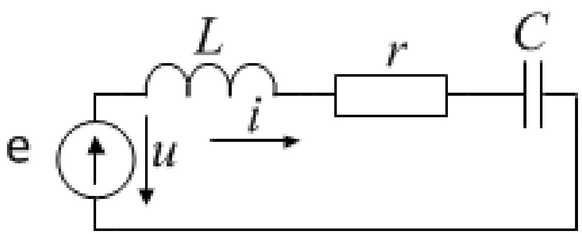
Энергия в течение некоторого времени запасается в емкости (*p*>0), а затем отдается в цепь (*p*<0). Происходит обмен энергией между индуктивностью и остальной цепью.

Средняя мощность: $P_{ср}=0$

2.2. Метод комплексных амплитуд

Гармонические колебания напряжения на зажимах элементов *L*, *R*, или *C* вызывает протекание гармонического тока такой же частоты. Дифференцирование, интегрирование и сложение функций вида $A\sin(\omega t)$, $B\cos(\omega t)$ приводит к функциям того же вида.

Пример:



Известно: $u = e(t) = U_m \cos(\varpi t + \varphi_u)$

Найти: $i = I_m \cos(\varpi t + \varphi_i)$

$u = \mathrm{Re}[U_m e^{j(\omega t+\varphi_u)}] = \mathrm{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}]$, $\quad \dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ $\qquad j$ — мнимая единица

$i = \mathrm{Re}[I_m e^{j(\omega t+\varphi_i)}] = \mathrm{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}]$, $\quad \dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$ $\qquad j^2 = -1$

Определение: <u>Комплексная амплитуда</u> (КА) гармонического колебания — это число, модуль которого равен амплитуде колебания, а аргумент — начальной фазе.

Подставим КА в дифференциальное уравнение цепи:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t}, \quad \dot{I}_m e^{j\omega t} \quad \xrightarrow{\text{Подставляем в}} \quad L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = u$$

Операции интегрирования и дифференцирования над i, u перестановочны с операцией $\boldsymbol{Re}$. Следовательно, если указанные комплексные функции будут удовлетворять уравнению, то и их вещественные и мнимые части будут ему удовлетворять также.

$e^{j\omega t}$ - сокращается: $j\omega L\dot{I}_m + R\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m = \dot{U}_m \quad \rightarrow \quad \dot{I}_m = \dfrac{\dot{U}_m}{R + j\varpi L + \dfrac{1}{j\omega C}}$

<u>Метод КА</u> для общего случая:

Вместо истинных токов, напряжений, ЭДС в уравнения цепи подставляются функции вида $\dot{A}_m e^{j\omega t}$, где $\dot{A}_m$ - КА соответствующего колебания. При этом дифференцирование сводится к умножению на $j\omega$, а интегрирование — к делению на $j\omega$, и множитель $e^{j\omega t}$ во всех уравнениях сокращается.

В результате получаются алгебраические уравнения для КА, решив которые, найдем амплитуду и начальную фазу любого нужного нам колебания, а также его явный вид $a(t)=\mathrm{Re}\{\dot{A}_m e^{j\omega t}\}$

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{\partial} &= \dot{U}_m/\sqrt{2}\\ \dot{I}_{\partial} &= \dot{I}_m/\sqrt{2}\end{aligned}\right\}$$

комплексные действующие значения (КДЗ), для них справедливы те же самые уравнения.

Законы Кирхгофа при переходе к КА сохранят свой вид (т.к. сложению колебаний отвечает сложение их КА):

1-й закон Кирхгофа: $\sum\limits_k \dot{I}_k = 0$ для каждого узла;

2-й закон Кирхгофа: $\sum\limits_k \dot{U}_k = 0$ для каждого контура;

Уравнения связи тока и напряжения в пассивных элементах для КА:

сопротивление	индуктивность	емкость
$\dot{U} = R\dot{I}$	$\dot{U} = j\omega L\dot{I} = \omega L\dot{I}\cdot e^{j\pi/2}$	$\dot{U} = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dfrac{1}{\omega C}\dot{I}\cdot e^{-j\pi/2}$

Сложение, дифференцирование и другие операции над колебаниями разных амплитуд и фаз заменяются простыми алгебраическими действиями с комплексными числами. Одновременно достигается компактность в записи уравнений и законов цепей, а также возможность наглядного представления чисел векторами на плоскости.