5.7. Входное сопротивление отрезка длинной линии

$$Z(x) = \dot{U}(x)/\dot{I}(x)$$

$$Z(x) = \frac{\dot{U}_a \cos(\beta x) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta x)}{j(\dot{U}_a/W)\sin(\beta x) + \dot{I}_a \cos(\beta x)} = W\frac{Z_a \cos(\beta x) + jW \sin(\beta x)}{jZ_a \sin(\beta x) + W \cos(\beta x)}$$

$$Z(x) = W\frac{Z_a + jW\mathrm{tg}(\beta x)}{W + jZ_a\mathrm{tg}(\beta x)}$$ или $$\bar{Z}_l = \frac{\bar{Z}_a + j\mathrm{tg}(\beta l)}{1 + j\bar{Z}_a\mathrm{tg}(\beta l)}$$

1. $l = n \cdot \lambda/2$ (l равна или кратна $\lambda/2$) —> $\beta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$

   $tg\pi = 0$ —> $Z_l = Z_a$

2. $l << \lambda$ —> $tg(\beta l) \approx 2\pi l/\lambda$ (можно пренебречь) —> $Z_l = Z_a$

   (короткая линия ведет себя как два идеальных проводника)

3. Длина отрезка кабеля соразмерна с длиной волны —> условия функционирования генератора меняются в зависимости от соотношения l/λ .

Частный случай $Z_a = W$ –> $Z_l = W\dfrac{W + jW\mathrm{tg}(\beta x)}{W + jW\mathrm{tg}(\beta x)} = W\dfrac{1 + j\mathrm{tg}(\beta x)}{1 + j\mathrm{tg}(\beta x)} = W$

$Z_l = W$ не зависимо от длины линии.

В линии устанавливается *режим согласования.*

4. $l = \lambda/4$ –> $\beta x = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ –> $tg\,\dfrac{\pi}{2} = \infty$

$$Z_l = W\frac{Z_a + jW\mathrm{tg}(\beta l)}{W + jZ_a\mathrm{tg}(\beta l)} = W\frac{Z_a + jW\mathrm{tg}(\pi/2)}{W + jZ_a\mathrm{tg}(\pi/2)} = W^2/Z_a = W^2 Y_a$$

Входная проводимость $Y(x) = 1/Z(x)$

Четвертьволновая линия совершает операцию преобразования комплексного сопротивления в комплексную проводимость.

$\bar{Z} = Z/W$ - нормированное, или относительное (по отношению к волновому сопротивлению W) сопротивление.

$\bar{Y} = 1/\bar{Z} = WY$ - нормированная, или относительная (по отношению к $1/W$) проводимость.

Для четвертьволновой линии $\bar{Z}_l = \bar{Y}_a$

5.8. Коэффициент отражения

$Z_a \neq W$ —> В линии присутствуют бегущие волны встречных направлений.

$\mathit{\Gamma}(x) = \dot{U}_{отр}(x) / \dot{U}_{пад}(x)$ - коэффициент отражения по напряжению

$x = 0$ —> $\mathit{\Gamma}(0) = \dot{U}_{отр}(0) / \dot{U}_{пад}(0)$

$\dot{U}(x) = \dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) + \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)$ - КА напряжения

$$\mathit{\Gamma}(x) = \frac{\dot{U}_{отр}(0)}{\dot{U}_{пад}(0)} \frac{\exp(-j\beta x)}{\exp j\beta x} = \mathit{\Gamma}(0)\exp(-j2\beta x) \quad \text{—>} \quad |\mathit{\Gamma}(x)| = |\mathit{\Gamma}(0)|$$

$\mathit{\Gamma}_i(x)$ - коэффициент отражения по току

$$\mathit{\Gamma}_i(x) = \dot{I}_{отр}(x) / \dot{I}_{пад}(x) = \mathit{\Gamma}_i(0)\exp(-j2\beta x)$$

$$\frac{\dot{I}_{отр}}{\dot{I}_{пад}} = -\frac{\dot{U}_{отр}}{\dot{U}_{пад}} = -\Gamma \quad \text{—>} \quad \mathit{\Gamma}(x) = -\mathit{\Gamma}_i(x)$$

Связь коэффициента отражения от конца линии (вычисленный в сечении нагрузки) с сопротивлением нагрузки Z_a $(x=0)$

Используем: $\dot{U}(x)=\dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x)+\dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)$

$$\dot{I}(x)=\left[\dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x)-\dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)\right]/W$$

$$Z_a=\frac{\dot{U}_a}{\dot{I}_a}=W\frac{\dot{U}_{пад}(0)+\dot{U}_{отр}(0)}{\dot{U}_{пад}(0)-\dot{U}_{отр}(0)}=W\frac{1+\Gamma(0)}{1-\Gamma(0)}$$

—> $\Gamma(0)=\dfrac{Z_a-W}{Z_a+W}$

1. Режим бегущих волн

$Z_a=W$ —> $\Gamma(0)=0$

В линии, нагруженной на волновое сопротивление, отсутствует отраженная волна, и вся энергия, направляемая источником в длинную линию, потребляется нагрузкой.

2. Режим стоячих волн

2. Разомкнутая линия (х.х.) $Z_a \to \infty$ —> $\Gamma(0) = \dfrac{Z_a - W}{Z_a + W} \to 1$

3. Короткозамкнутая линия (к.з.) $Z_a = 0$ —> $\Gamma(0) = \dfrac{Z_a - W}{Z_a + W} \to -1$

4. Линия, нагруженная на емкость $Z_a = jX_C$
   или индуктивность $Z_a = jX_L$

$$\Gamma(0) = \frac{jX_C - W}{jX_C + W} \quad \text{—>} \quad \left|\Gamma(0)\right| = \frac{\left|jX_C - W\right|}{\left|jX_C + W\right|} = \frac{\sqrt{W^2 + X_C{}^2}}{\sqrt{W^2 + X_C{}^2}} = 1$$

Амплитуда отраженной волны в любом сечении длинной линии равна амплитуде падающей волны.

Входное сопротивление в сечении x линии

$$Z(x)=\frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)}=W\frac{\dot{U}_{пад}(x)+\dot{U}_{отр}(x)}{\dot{U}_{пад}(x)-\dot{U}_{отр}(x)}=W\frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)}$$

Для любого сечения x:

$$\Gamma(x)=\frac{Z(x)-W}{Z(x)+W}\qquad \Gamma_i(x)=\frac{Y(x)-1/W}{Y(x)+1/W}$$

Нормированное сопротивление и коэффициент отражения:

$$\Gamma(x)=\frac{\bar{Z}(x)-1}{\bar{Z}(x)+1}\qquad \bar{Z}(x)=\frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)}$$

Нормированная (отнесенная к $1/W$) проводимость связана с коэффициентом отражения по току

$$\Gamma_i(x)=\frac{\bar{Y}(x)-1}{\bar{Y}(x)+1}\qquad \bar{Y}(x)=\frac{1+\Gamma_i(x)}{1-\Gamma_i(x)}$$

$$\bar{Y}(x)=1/\bar{Z}(x)=WY(x)$$

5.9. Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии

Картина распределения амплитуд тока и напряжения вдоль линии зависит от сопротивления нагрузки Z_a

$$\dot{U}(x)/\dot{U}_a = \cos(\beta x) + j(W/Z_a)\sin(\beta x)$$

$$\dot{I}(x)/\dot{I}_a = j(Z_a/W)\sin(\beta x) + \cos(\beta x)$$

$$\Gamma(x) = \Gamma(0)\exp(-j2\beta x) \qquad \to$$

Вектор коэффициента отражения при переходе от сечения к сечению вращается на комплексной плоскости вокруг начала координат по ходу часовой стрелки.

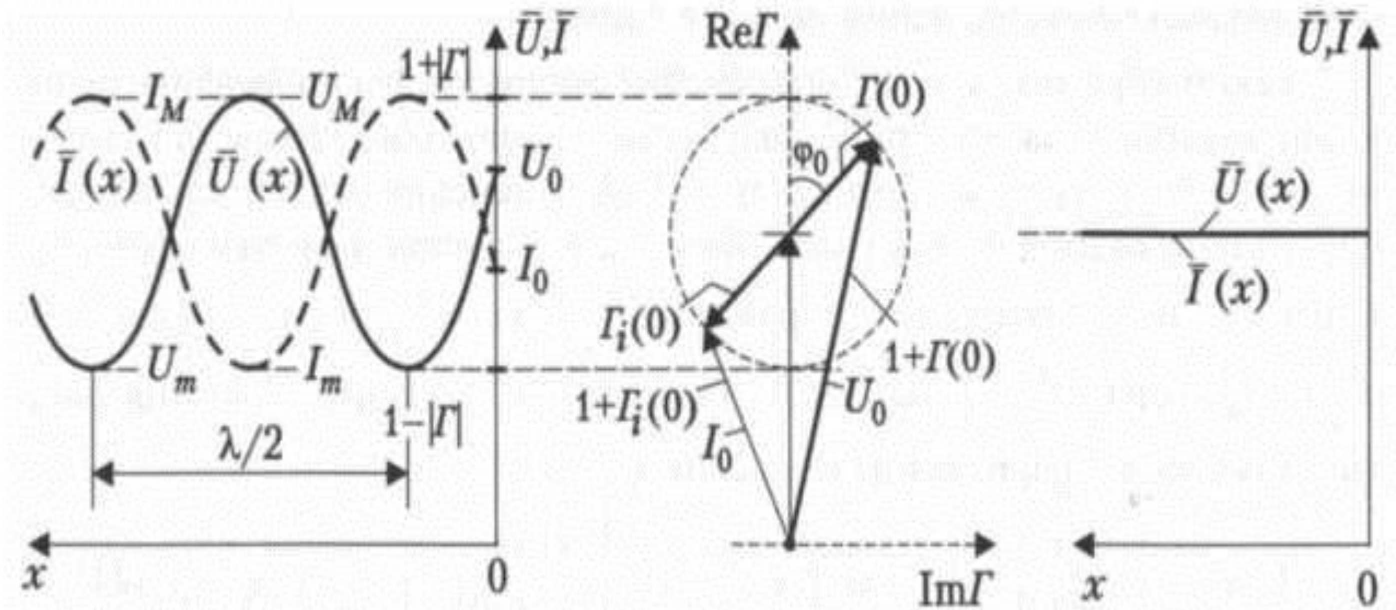
$|\Gamma(x)| = |\Gamma(0)|$ - длина вектора при вращении не меняется

Значение $\Gamma(0) = \dfrac{Z_a - W}{Z_a + W}$ определяется нагрузкой Z_a

$$\dot U(x)=\dot U_{пад}(x)(1+\Gamma(x)) \qquad \dot I(x)=\dot I_{пад}(x)(1-\Gamma(x))$$

Относительные амплитуды тока и напряжения в сечении x:

$$\left|\bar{\dot U}(x)\right|=\left|\frac{\dot U(x)}{\dot U_{пад}(x)}\right|=\left|1+\Gamma(x)\right| \qquad \left|\bar{\dot I}(x)\right|=\left|\frac{\dot I(x)}{\dot I_{пад}(x)}\right|=\left|1-\Gamma(x)\right|$$



Режим смешанных волн
$Z_a \neq W$

Режим согласования
(бегущих волн) $Z_a = W$

5.10. Коэффициенты стоячей волны и бегущей волны

Коэффициент стоячей волны (*КСВ)* есть отношение максимального значения функции распределения напряжения вдоль линии к минимальному значению той же функции.

$$КСВ = U_{MAX}/U_{MIN} = I_{MAX}/I_{MIN}$$

$$\left|\bar{\dot{U}}(x)\right| = \left|\frac{\dot{U}(x)}{\dot{U}_{пад}(x)}\right| = \left|1+\Gamma(x)\right| \text{ –> } \quad КСВ = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad \text{–> } \quad |\Gamma| = \frac{КСВ-1}{КСВ+1}$$

Коэффициент бегущей волны: $КБВ = 1/КСВ = U_{MIN}/U_{MAX} = I_{MIN}/I_{MAX}$

$1 \le КСВ < \infty$

$0 \le КБВ \le 1$

В режиме бегущей волны $КБВ=КСВ=1$.

В сечениях линии, где напряжение максимально или минимально, сопротивление чисто активное (см. рис.)

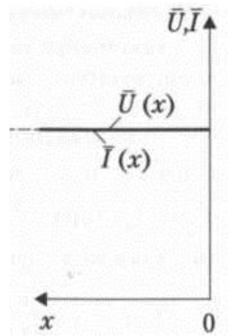
$$Z(x) = W\frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)} \quad \text{–>}$$

$$\bar{R}_{MAX} = \frac{R_{MAX}}{W} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = КСВ$$

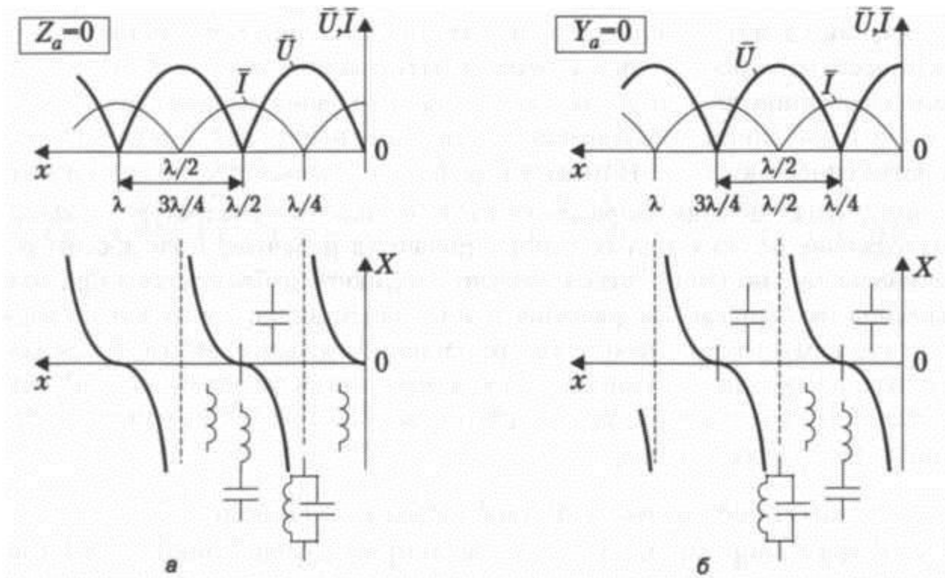
$$\bar{R}_{MIN} = \frac{R_{MIN}}{W} = \frac{1-|\Gamma|}{1+|\Gamma|} = КБВ$$

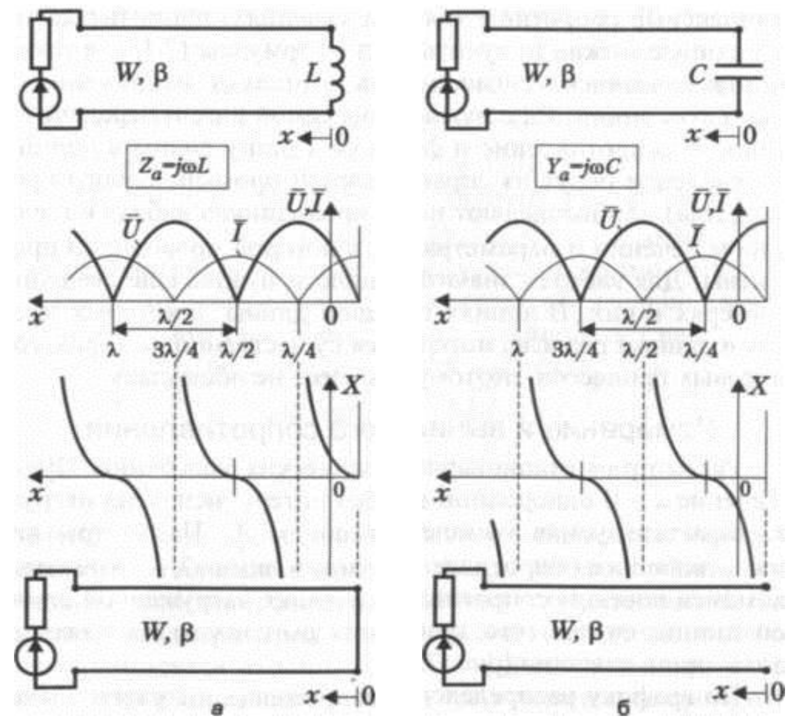
В других сечениях линии входное сопротивление принимает комплексные значения, причем: $R_{MIN} \le |Z(x)| \le R_{MAX}$

Режим бегущих волн:



Режим стоячих волн:





к.з. х.х. $Z_l = j\omega L$ $Z_l = 1/j\omega C$