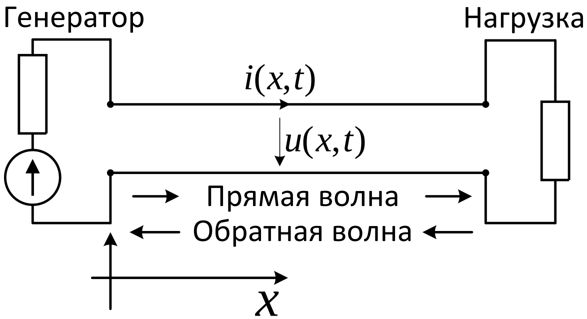
5. Волновые процессы в цепях с распределенными параметрами

5.1. Основы теории длинных линий

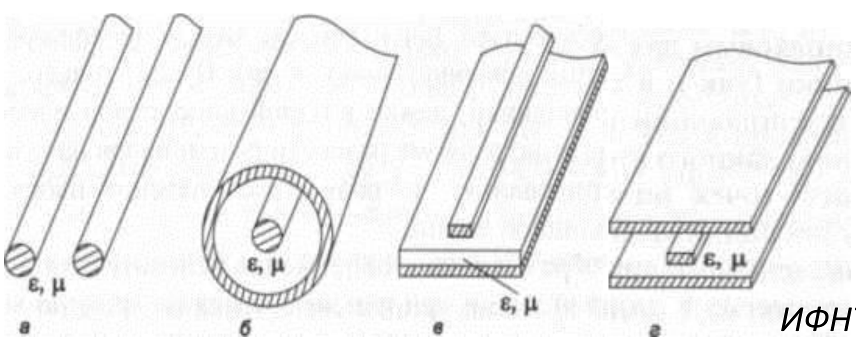
Длинные линии предназначены для транспортировки сигналов от источников энергии к удаленным нагрузкам.



1) Протяженность проводников в продольном направлении сравнима с длиной волны λ, и может заметно ее превосходить.

2) В поперечном сечении расстояние между проводами длинной линии должно быть существенно меньше λ.

Однородные длинные линии - поперечная структура и характеристики среды распространения волн не меняются в продольном направлении.



симметричная двухпроводная,
коаксиальная,
несимметричная полосковая,
симметричная полосковая

Среда, в которой проложены проводники, характеризуется относительными проницаемостями: диэлектрической (ε) и магнитной (μ).

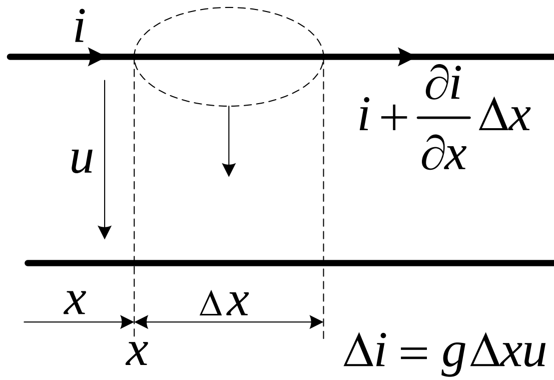
Строгое решение электродинамической задачи приводит к поперечным электромагнитным волнам, или ТЕМ-волнам. Их свойства: векторы напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны направлению распространения (лежат в поперечном сечении длинной линии), *фазовая скорость* ТЕМ волн не зависит от частоты и равна $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Квазистационарный характер электромагнитного поля в поперечном сечении длинных линий - распределение поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, в точности отвечает статическому (неизменному во времени) случаю. Это позволяет ввести для описания волновых процессов в длинных линиях понятия *напряжение* и *ток.*

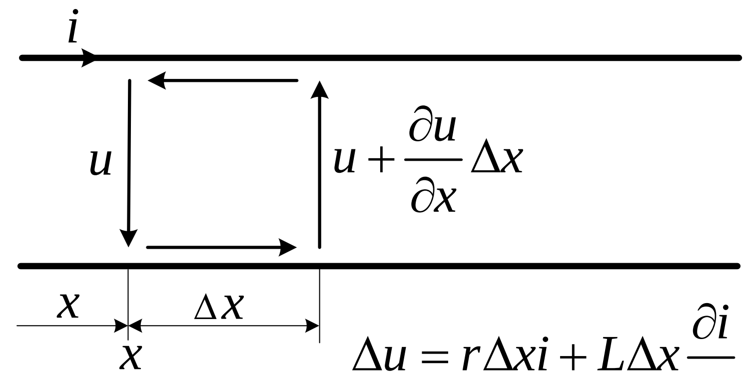
Результат интегрирования напряженности электрического поля (падение напряжения между проводниками длинной линии) одинаков для любого пути, лежащего в одной поперечной плоскости. Волновой характер процесса проявится в том, что ток и напряжение будут зависеть и от времени, и от продольной координаты.

Длинные линии — цепи с распределенными параметрами. Для описания электрических характеристик конкретных линий передачи используют параметры, приходящиеся на единицу длины линии — *погонные параметры.* Это: индуктивность (L), емкость (C), сопротивление (r), проводимость (g) и взаимная индуктивность (M). Их единицы измерения отвечают физической природе величины, но берутся отнесенными к метру: Гн/м, Ф/м, Ом/м, См/м.

5.2 Дифференциальные уравнения длинной линии



$$\Delta i = g\Delta x u + C\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}$$



$$\Delta u = r\Delta x i + L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t}$$

Приращения тока по координате: $-(\partial i/\partial x)\Delta x = g\Delta x u + C\Delta x(\partial u/\partial t)$

Приращение напряжения по координате:

$$-(\partial u/\partial x)\Delta x = r\Delta x i + L\Delta x(\partial i/\partial t)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$$

Дифференциальные уравнения с частными производными и постоянными (для однородной линии) коэффициентами - телеграфные уравнения.

Волновые решения телеграфных уравнений линии без потерь

$r = 0, \quad g = 0$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t}$$

Дифференцируем обе части первого уравнения по t и обе части второго уравнения по x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$v^2 = 1/(LC)$$

$$[v] = м/с$$

Решения волновых уравнений представимо суммой двух волн, распространяющихся со скоростью v вдоль координаты x во встречных направлениях:

$$u(x,t) = u_{пр}(t - x/v) + u_{обр}(t + x/v) \qquad i(x,t) = i_{пр}(t - x/v) + i_{обр}(t + x/v)$$

Волна с аргументом $(t - x/v)$ движется со скоростью $v^2 = 1/(LC)$ в положительном направлении оси x, волна с аргументом $(t + x/v)$ распространяется с той же скоростью в обратном направлении, навстречу отсчетам x.

Подставим значения u и i в уравнения системы

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i_{пр}(t - x/v)}{\partial x}\cdot\left(\frac{-1}{v}\right) + \frac{\partial i_{обр}(t + x/v)}{\partial x}\cdot\left(\frac{1}{v}\right) = -C\frac{\partial u_{пр}(t - x/v)}{\partial t} - C\frac{\partial u_{обр}(t + x/v)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_{пр}(t - x/v)}{\partial x}\cdot\left(\frac{-1}{v}\right) + \frac{\partial u_{обр}(t + x/v)}{\partial x}\cdot\left(\frac{1}{v}\right) = -L\frac{\partial i_{пр}(t - x/v)}{\partial t} - L\frac{\partial i_{обр}(t + x/v)}{\partial t}$$

Равенства будут выполняться при любых t и x, если

$$u_{пр}(t - x/v) = \frac{1}{Cv} i_{пр}(t - x/v)$$

$$u_{обр}(t + x/v) = -Lv \cdot i_{обр}(t + x/v)$$

Волновое сопротивление $W = \sqrt{L/C}$, причем $\frac{1}{Cv} = Lv = \sqrt{L/C} = W$

$$u_{пр}/i_{пр} = W \qquad i(x,t) = i_{пр} + i_{обр} = (u_{пр} - u_{обр})/W$$

Для бесконечно длинной однородной линии в решении останутся только волны тока и напряжения, уходящие в бесконечность $u_{пр}, i_{пр}$

В этом случае $u(x,t) = W \cdot i(x,t)$

Для генератора подключенная к нему однородная длинная линия бесконечной длины эквивалентна вещественному сопротивлению W (волновому сопротивлению). Фрагмент однородной длинной линии без потерь, нагруженный сопротивлением, равным волновому, со стороны входных полюсов будет восприниматься как бесконечно длинная линия.

Скорость распространения волны $v = 1/\sqrt{LC}$

Из теории электромагнитных волн $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$

—> $1/\sqrt{LC} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$

Распространение волн по проводам обусловлено распространением электромагнитной волны в пространстве, прилегающем к проводникам кабеля, которые, подобно рельсам, обеспечивают перенос энергии поля в заданном направлении.

5.3. Волны в длинной линии в режиме гармонических колебаний

Под воздействием гармонической ЭДС частоты ω в однородной длинной линии без потерь установился стационарный режим.

$$\dot{U}(x) \quad \div \quad u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(x)\exp(j\omega t)\right]$$

$$\dot{I}(x) \quad \div \quad i(x,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{I}(x)\exp(j\omega t)\right]$$

Волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \dot{U}(x)$$

—>

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \qquad \frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \dot{I}(x)$$

Ищем решения уравнений в виде

$$\dot{U}(x) = A\exp(sx)$$

Характеристическое уравнение $s^2 = -(\omega/v)^2$

Фазовая постоянная (волновое число) $\beta = \omega/v$

—> $s^2 = -\beta^2$ —>

—> $s_1 = -j\beta$, $s_2 = +j\beta$ —> $\dot{U}(x) = A_1\exp(-j\beta x) + A_2\exp(+j\beta x)$

Подставляем $\dot{U}(x) = A_1 \exp(-j\beta x) + A_2 \exp(+j\beta x)$ в

$u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(x)\exp(j\omega t)\right]$ –>

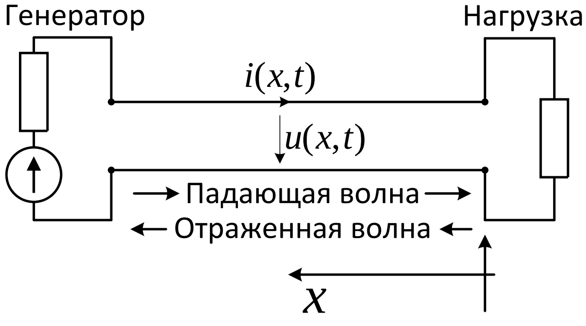
$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(x)e^{j\omega t}\right] = u_{пр} + u_{обр} = \left|\dot{U}_{пр}\right|\cos(\omega t - \beta x + \varphi_{пр}) + \left|\dot{U}_{обр}\right|\cos(\omega t + \beta x + \varphi_{обр})$$

Прямая волна двигается в направлении роста координаты x, обратная волна - против направления x.

Волну, движущуюся от генератора к нагрузке, принято называть *падающей,* обратную — *отраженной.*

Изменим направление отсчета координаты x — ее удобно отсчитывать от сечения нагрузки:

$$u(x,t) = u_{пад}(x,t) + u_{отр}(x,t) = \left|\dot{U}_{пад}\right|\cos(\omega t + \beta x + \varphi_{пад}) + \left|\dot{U}_{отр}\right|\cos(\omega t - \beta x + \varphi_{отр})$$



Константы $A_1 = \dot{U}_{пад}(0)$

$A_2 = \dot{U}_{отр}(0)$

Комплексные амплитуды напряжения и тока:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) + \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{пад}(x) + \dot{I}_{отр}(x) = \left[\dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) - \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)\right]/W$$

5.4. Фазовая скорость и длина волны в линии

$\omega t + \beta x + \varphi_{пад}$ - полная фаза падающей волны

$\omega t - \beta x + \varphi_{отр}$ - полная фаза отраженной волны

Уравнение движения фазового фронта —> полная фаза = Const

$\omega t + \beta x + \varphi_{пад} = Const$ - дифференцируем по времени —>

$\omega + \beta \dot{x} = 0$, $\dot{x}$ - скорость движения фазового фронта

$\dot{x} = -\omega/\beta$ - скорость движения фазового фронта падающей волны

$\dot{x} = \omega/\beta$ - скорость движения фазового фронта отраженной волны

Фазовая постоянная (волновое число) $\beta = \omega / v$ —> $\dot{x} = v$

Значение фазовой скорости совпадает с v — скоростью движения волны в линии (из решения волнового уравнения).

Скорость движения волны в линии (решение волнового уравнения) совпадает со скоростью движения фазового фронта:

$$v = 1 / \sqrt{LC} = c / \sqrt{\varepsilon\mu} = \omega / \beta$$

За время, равное периоду T, фазовый фронт смещается на расстояние $vT = \lambda = v 2\pi / \omega = 2\pi / \beta$

λ— *длина волны в линии* - расстояние между точками, в которых фазы колебаний отличаются на 2π, то есть $\beta\lambda=2\pi$. —> $\beta=2\pi/\lambda$

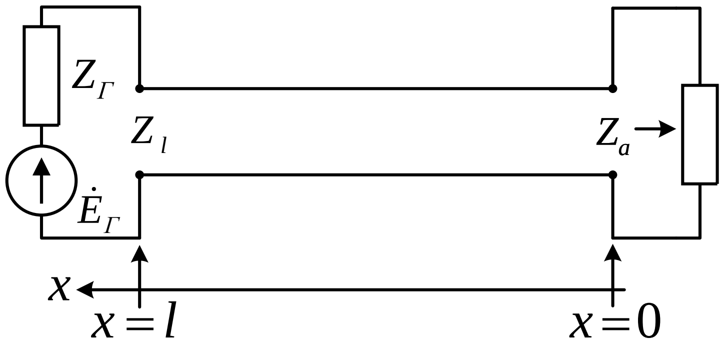
Длина волны в длинной линии будет такой же, как у волны, распространяющейся в однородном пространстве с теми же параметрами ε и μ. Если в линии передачи фазовая скорость равна $c / \sqrt{\varepsilon\mu}$, длина волны в ней в $\sqrt{\varepsilon\mu}$ раз короче длины волны в вакууме.

Фазовая скорость не зависит от частоты колебаний. —> Информационные сигналы сложного спектрального состава должны распространяться без искажений по длинной линии, не имеющей потерь.

5.5. Процессы в линиях без потерь при разных нагрузках

Рассмотрим однородную длинную линию без потерь, в которой реализован режим гармонических колебаний с частотой ω. Результирующее напряжение в каждом сечении длинной линии является суперпозицией напряжений падающей и отраженной волн и зависит от соотношения их амплитуд и фаз. Поэтому при заданных параметрах возбуждения (при заданной падающей волне) характер изменения напряжения и тока вдоль по линии определяется амплитудой и фазой отраженной волны. Параметры отраженной волны определяются условиями в сечении нагрузки. Анализ поведения напряжения и тока вдоль однородной линии сводится к вычислению отраженной волны при известном сопротивлении нагрузки.

5.6. Уравнения передачи для фрагмента длинной линии



Параметры линии — L и C или W и β — известны.

Z_a - сопротивление в сечении нагрузки

$$\dot{U}_a / \dot{I}_a = Z_a$$

Получим соотношения, связывающие токи и напряжения в произвольном сечении линии.

Используем решения для КА в длинной линии:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) + \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{пад}(x) + \dot{I}_{отр}(x) = \left[\dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) - \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)\right]/W$$

В сечении нагрузки ($x=0$):

$$\dot{U}_a = \dot{U}_{пад}(0) + \dot{U}_{отр}(0) \qquad \dot{I}_a = \dot{I}_{пад}(0) + \dot{I}_{отр}(0) = \left(\dot{U}_{пад}(0) - \dot{U}_{отр}(0)\right)/W$$

Подставляем в уравнения

$$e^{j\beta x} = \cos(\beta x) + j\sin(\beta x) \quad \text{и} \quad e^{-j\beta x} = \cos(\beta x) - j\sin(\beta x)$$

Значения комплексных амплитуд напряжения и тока в любом сечении x через ток и напряжение на нагрузке:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_a \cos(\beta x) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = j(\dot{U}_a / W)\sin(\beta x) + \dot{I}_a \cos(\beta x)$$

l - длина линии (расстояние между генератором и нагрузкой)

$x=l$ – сечение генератора

Уравнения передачи четырехполюсника, связывающие напряжение $\dot{U}_l$ и ток $\dot{I}_l$ на его входных полюсах, с аналогичными величинами на выходе ($\dot{U}_a$ и $\dot{I}_a$):

$$\dot{U}_l = \dot{U}_a \cos(\beta l) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta l)$$

$$\dot{I}_l = j(\dot{U}_a / W)\sin(\beta l) + \dot{I}_a \cos(\beta l)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \dot{U}_l \\ \dot{I}_l \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos(\beta l) & jW \sin(\beta l) \\ j\dfrac{\sin(\beta l)}{W} & \cos(\beta l) \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{I}_a \end{pmatrix}$$

Матрица передачи отрезка длинной линии.

При нагрузке линии волновым сопротивлением $\dot{U}_a = W\dot{I}_a$

Из $\dot{U}_l = \dot{U}_a \cos(\beta l) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta l)$ следует $\dot{U}_l = \dot{U}_a \exp(j\beta l)$

Передаточная функция $K(j\omega)$ отрезка линии длиной l

$$K(j\omega) = \dot{U}_a / \dot{U}_l = \exp\left(-j\omega\sqrt{LC} \cdot l\right)$$

Используем $1/\sqrt{LC} = \omega/\beta$ –> $\beta = \omega\sqrt{LC}$

Амплитудно-частотная характеристика $|K(j\omega)| = 1$

–>

Фазо-частотная характеристика $\arg K(j\omega) = -\omega\sqrt{LC} \cdot l$

Соответствует условиям реализации неискажающей цепи, задерживающей выходной сигнал на время $\sqrt{LC} \cdot l$

При включении в сечение нагрузки сопротивления W отраженной волны в линии не будет.