4.11. Свойства преобразования Лапласа.

1) Взаимно-однозначное соответствие: $s(t) \div \hat{S}(p)$

2) Линейность преобразования Лапласа:

$s_1(t) + s_2(t) \div \hat{S}_1(p) + \hat{S}_2(p)$, а также $as(t) \div a\hat{S}(p)$

3) Аналитичность $\hat{S}(p)$:

если $s(t)$ удовлетворяет условию $\begin{cases} s(t) = 0, & \mathrm{t} < 0 \\ |s(t)| \le M \cdot e^{ct}, & \mathrm{t} > 0 \end{cases}$ M, $c - const$

–> $\hat{S}(p)$ - аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}(p)=\sigma>c$.

Функция $f(p)$ комплексного переменного p называется <u>аналитической (или регулярной)</u> в точке p_0 , если она обладает в этой точке производной

$$f'(p_0) = \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0}$$

причем данный предел не зависит от способа, по которому $p \to p_0$ в комплексной плоскости.

$f=p^2$ аналитическая на всей плоскости, так как $f'(p)=2p$ существует при любом p. Функция $f=|p|^2$ ни при каком p не аналитическая, хотя и непрерывная.

Интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по этому параметру, если получающийся в результате интеграл **сходится равномерно**.

$$\hat{S}(p)=\int_0^\infty s(t)e^{-pt}dt \;\; -> \;\; \frac{d}{dp}\hat{S}(p)=-\int_0^\infty s(t)te^{-pt}dt$$, причем $|s(t)|\leq Me^{ct}$

Экспонента $e^{(c\text{-}\sigma)t}$ при $\sigma>c$ «пересиливает» растущий множитель t, поэтому интеграл сходится равномерно по p при $\mathrm{Re}(p)>c$. Отсюда и вытекает существование производной —> аналитичность $\hat{S}(p)$

Свойства аналитических функций: 1. обладает производными любого порядка, 2. Зная функцию на любом замкнутом контуре (на плоскости), можно восстановить ее во всей области аналитичности.

Возможно аналитически продолжить лапласов образ из области $\mathrm{Re}(p)>c$, почти на всю комплексную плоскость p (единственным образом). $1(t) \div 1/p$ аналитична всюду, кроме точки $p=0$.

Точки, в которых функция перестает быть аналитической, называются **особыми точками** данной функции. Частным видом особых точек являются **полюсы**. Точка p_0 является полюсом функции $f(p)$, если

$$f(p) \to \frac{c}{(p-p_0)^n} \quad \text{при } p \to p_0$$

целое n называется порядком (кратностью) полюса

4) Дифференцирование и интегрирование $s(t)$:

$$\int_0^\infty \frac{ds}{dt} e^{-pt} dt = s(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty s(t)e^{-pt}dt = p\hat{S}(p) - s(0)$$

$$\frac{ds}{dt} \div p\hat{S}(p) - s(0)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \div p^2\hat{S} - ps(0) - s'(0)$$

$s(0)$ понимается как предел справа, т.е. $s(+0)$.

Интегрирование $s_1(t)=\int\limits_0^t s(t')dt'$ $\rightarrow$ $s(t)=\dfrac{ds_1}{dt}, \quad s_1(0)=0$

$$\hat{S}(p)=p\hat{S}_1(p) \quad \rightarrow \quad \hat{S}_1(p)=\frac{\hat{S}(p)}{p}$$

Итак $\int\limits_0^t s(t')dt' \div \dfrac{\hat{S}(p)}{p}$

5) Запаздывание по *t* и умножение на $e^{-\lambda t}$:

Пусть $s_1(t)=s(t-\tau)$, где $\tau>0$

$$\hat{S}_1(p)=\int\limits_0^\infty s(t-\tau)e^{-pt}dt=\int\limits_{-\tau}^\infty s(t')e^{-pt'}e^{-p\tau}dt'=e^{-p\tau}\int\limits_0^\infty s(t')e^{-pt'}dt'$$

$$s(t-\tau)\div e^{-p\tau}\hat{S}(p)$$

Пусть $s_2(t)=s(t)e^{-\lambda t}$, где $\lambda=\mathrm{const}$ (комплексное).

$$\hat{S}(p)=\int\limits_0^\infty s(t)e^{-\lambda t}e^{-pt}dt=\hat{S}(p+\lambda) \quad \rightarrow \quad s(t)e^{-\lambda t}\div\hat{S}(p+\lambda)$$

6) Свертка: $s(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int\limits_0^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau$

$$\hat{S}(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} \left(\int\limits_0^{\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau \right) dt = \int\limits_0^{\infty} s_1(\tau) \left(\int\limits_0^{\infty} s_2(t-\tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = \int\limits_0^{\infty} s_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \cdot \hat{S}_2(p)$$

Изменяем порядок интегрирования

$$s_1(t) * s_2(t) \div \hat{S}_1(p) \hat{S}_2(p)$$

7) Связь с преобразованием Фурье:

Пусть $s(t)$ удовлетворяет условиям
$$\left. \begin{aligned} &\int\limits_0^{\infty} |s(t)| dt < \infty \quad \text{(существует)}, \\ &s(t) = 0 \qquad \text{при } t < 0. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Фурье-образ

$$S(\omega) = \int\limits_0^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \hat{S}(p) \Big|_{p=j\omega}$$

является аналитической функцией при $\mathrm{Re}(p) > 0$.

При выполнении условий ($_*$) для $s(t)$ Фурье-образ переходит в лапласов образ, если заменить $j\omega$ на p, и обратно. Если условия ($_*$) не выполняются, то прямой связи между $S(\omega)$ и $\hat{S}(p)$ - нет.

$1(t) \div \hat{S}(p) = 1/p$ но **неверно**, что $1(t) \div S(j\omega) = 1/j\omega$ (по Фурье), так как $1/j\omega$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости на оси ω и не обладает Фурье-образом (в обычном смысле).

Нельзя считать, что преобразование Фурье есть частный случай преобразования Лапласа, поскольку при преобразовании Лапласа утрачиваются значения $s(t)$ при $t<0$, а преобразование Фурье их не утрачивает. Таким образом, преобразования Фурье и Лапласа применимы к разным классам функций, имеющим общее пересечение ($_*$), но не включающим один другого.

4.12. Применение преобразования Лапласа к анализу цепей (операторный метод).

Метод позволяет рассчитать процесс для $t>0$, если известно исходное состояние цепи при $t=0$ и все внешние источники при $t>0$.

1) Находим лапласовы образы источников $\hat{E}(p)$ и $\hat{I}(p)$

2) Находим лапласовы образы напряжений $\hat{U}(p)$ и (или) токов $\hat{I}_{out}(p)$ в интересующей ветви. Уравнения составляются по правилам, аналогичным методу КА (узловые потенциалы, контурные токи, закон Ома и т.д.), причем в этих уравнениях уже учтены начальные условия.

3) Обратное преобразование Лапласа, то есть находим $u(t)$, $i_{out}(t)$

Используется: формула разложения в сочетании со свойствами преобразования Лапласа, либо таблицы преобразований Лапласа.

Составление уравнений:

1) Нулевые начальные условия. $u = Ri \div \hat{U}(p) = R\hat{I}(p)$

$$u = L\frac{di}{dt} \div \hat{U}(p) = pL\hat{I}(p) \qquad u = \frac{1}{C}\int_0^t i dt \div \hat{U}(p) = \frac{1}{pC}\hat{I}(p)$$

То есть в методе КА делаем замену $j\omega$ на p.

$$\hat{U}(p) = z(p)\hat{I}(p) \quad -> \quad z(p) = \frac{\hat{U}(p)}{\hat{I}(p)}$$

$z(p)$ - операторное сопротивление двухполюсной цепи равно отношению лапласовых образов напряжения и тока при нулевых начальных условиях (эта оговорка существенна!).

$y(p) = 1/z(p)$ - операторная проводимость цепи.

$$K(p) = \left.\frac{\hat{S}_2(p)}{\hat{S}_1(p)}\right|_{i(0),u(0)=0}$$ - операторный коэффициент передачи (передаточная функция)

Получается из комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ путем замены $j\omega \Rightarrow p$.

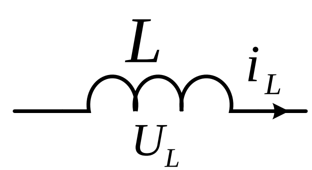
2) Не нулевые начальные условия:

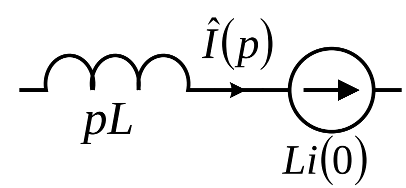
Индуктивность $u = L\dfrac{di}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} \div p\hat{S}(p) - s(0)$$

—> $\hat{U}(p) = pL\hat{I}(p) - Li(0)$ —>

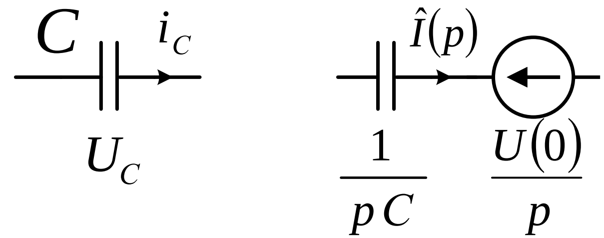
$$\hat{I}(p) = \frac{\hat{U}(p)}{pL} + \frac{i(0)}{p}$$





Емкость $u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i dt' + u(0)$ $\quad \rightarrow \quad \hat{U}(p) = \frac{1}{pC}\hat{I}(p) + \frac{u(0)}{p}$

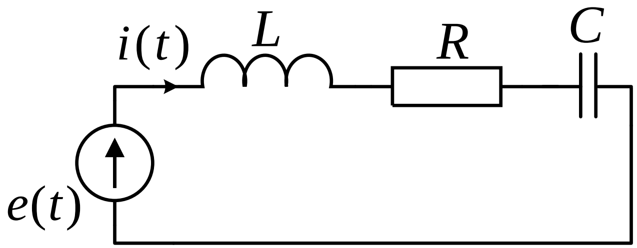
$$\int_0^t s(t')dt' \div \frac{\hat{S}(p)}{p}$$

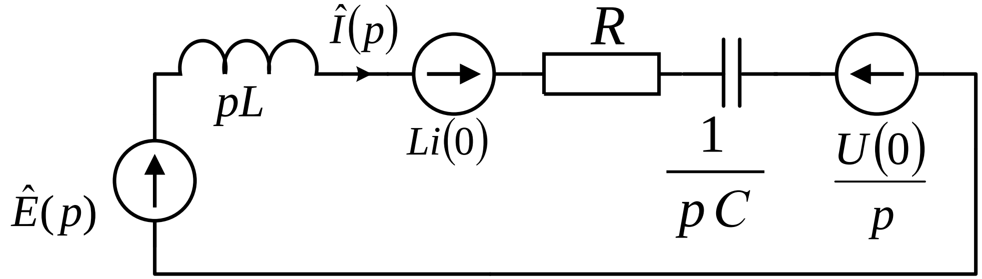


Заряженную к моменту $t=0$ емкость можно заменить такой же незаряженной емкостью, добавив к ней последовательно генератор постоянного напряжения, равного начальному значению напряжения на емкости, а индуктивность с начальным током можно заменить индуктивностью с нулевым начальным условием, включив параллельно ей генератор постоянного тока, равного начальному значению тока.

В эквивалентных схемах вспомогательные источники самостоятельного физического смысла не имеют, а являются неотъемлемыми составными частями самих элементов.

Пример:





При $t > 0$ ток в цепи подчиняется уравнению

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = e(t) \;\; \text{—>} \;\; pL\hat{I}(p) - Li(0) + R\hat{I}(p) + \frac{1}{pC}\hat{I}(p) + \frac{u_C(0)}{p} = \hat{E}(p)$$

—> $\hat{I}(p) = \dfrac{\hat{E}(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{pL + R + 1/(pC)}$ —> находим $i(t)$ по $\hat{I}(p)$

Результат зависит от $\hat{E}(p)$, т.е. от конкретного вида колебания $e(t)$.

В решении автоматически учитываются начальные условия $i(0)$ и $u_C(0)$.

4.13. Свойства передаточной функции цепи.

$s_1(t)$ — внешнее воздействие на цепь, $s_2(t)$ — отклик цепи на это воздействие.

$$S_2(\omega) = K(j\omega)S_1(\omega)$$

$K(j\omega)$ - частотный коэффициент передачи

Перейдем с числовой оси ω на плоскость комплексного переменного $p=\sigma+j\omega$ (комплексная частота).

$K(p)$ - операторный коэффициент передачи

$$K(p) = \int_0^{\infty} k(t)e^{-pt}dt$$

$k(t)$ - импульсная характеристика цепи

Функции $K(j\omega)$ и $K(p)$ являются соответственно преобразованиями Фурье и Лапласа импульсной характеристики $k(t)$ (ИХ).

$s_1(t)=0$ при $t<0$ и начальные условия нулевые —>

$$\hat{S}_2(p) = K(p)\hat{S}_1(p)$$

Общие свойства функции $K(p)$:

1) $k(t)$ — вещественная —> $K(p^*)=K^*(p)$.

Модуль K и $\mathrm{Re}(K)$ - четные функции ω,
$\arg(K)$ и $\mathrm{Im}(K)$ - нечетные функции ω.

2) $K(p)$ аналитична на всей плоскости за исключением конечного или счетного множества особых точек.

3) Если цепь пассивна и обладает потерями, то все особые точки $K(p)$ лежат левее мнимой оси: $\mathrm{Re}(p)<0$. В случае чисто реактивной цепи без потерь $K(p)$ может иметь особые точки на самой мнимой оси.

Дальнейшие свойства относятся только к цепям с сосредоточенными параметрами.

4) $K(p)$ является рациональной функцией, т.е. дробью вида

$$K(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$$

где $A(p)$, $B(p)$ — полиномы с вещественными коэффициентами.

Все особые точки $K(p)$ — полюсы, они равны корням знаменателя $B(p)$, число их конечно. Все особые точки вещественны или образуют комплексно сопряженные пары.
У пассивной цепи все полюсы располагаются в левой полуплоскости p или на мнимой оси.

5) При $p\to\infty$ $K(p)$ или ограничена, или растет как p, т.е. степень числителя $A(p)$ не может превышать степень знаменателя $B(p)$ более чем на единицу.

6) Функция $K(p)$ определяется расположением своих нулей и полюсов на комплексной плоскости.

Все полюсы — это комплексные частоты свободных колебаний. При возбуждении свободного колебания $e^{p_i t}$ в любом участке цепи оно будет наблюдаться во всей цепи (исключение составляют некоторые особые случаи). Входной импульс $\delta(t)$ имеет бесконечно широкий спектр частот, поэтому отклик $k(t)$ будет содержать сумму всех свободных колебаний.

Нули - частоты бесконечного затухания (колебание не проходит на выход цепи).

7) Поскольку $z(p)=1/y(p)$, то нули $z(p)$ являются полюсами $y(p)$, и наоборот. Но все полюсы лежат в левой полуплоскости, значит, и нули тоже — в левой полуплоскости. Кроме того, степени $A(p)$ и $B(p)$ либо равны, либо отличаются ровно на 1.

8) Мощность, потребляемая пассивной цепью в режиме гармонических колебаний, не может быть отрицательной, отсюда $\mathrm{Re}(z(j\omega))>0$, $\mathrm{Re}(y(j\omega))>0$.

9) Реактансная теорема (теорема Фостера).

Если двухполюсник чисто реактивный (без потерь), то
$\mathrm{Re}(z(j\omega))=0$, $\mathrm{Re}(y(j\omega))=0$

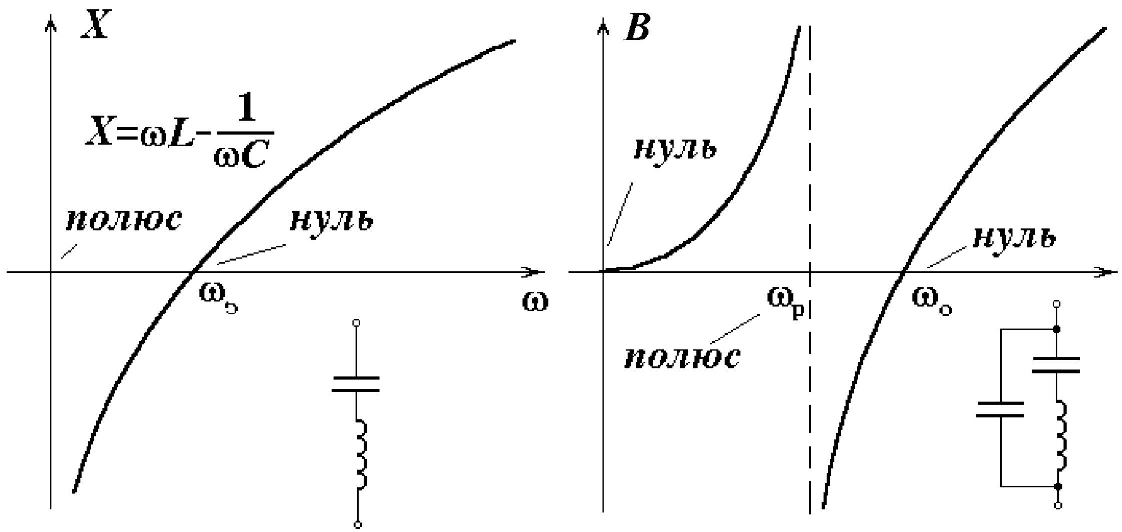
$z(j\omega)=jx(j\omega)$, причем $x(j\omega)$ — нечетная функция, следовательно, $|m-n|=1$ (степени числителя и знаменателя всегда отличаются ровно на единицу). Отсюда вытекает, что $p=0$ является либо нулем, либо полюсом $z(p)$. То же и для $y(p)$.

Проводимость чисто реактивного двухполюсника: $y(j\omega)=jb(j\omega)$

Теорема Фостера: Если двухполюсник чисто реактивный (без потерь), то на мнимой оси во всех точках непрерывности

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} > 0 \qquad \frac{\partial b}{\partial \omega} > 0$$

—> нули и полюса чередуются.



4.14. Переходные процессы в электрических цепях.

К **стационарным режимам** относят установившиеся процессы, имеющие регулярный характер, в частности, периодические колебания, а также режим покоя, когда все токи и напряжения постоянны во времени.

Изменение колебательного режима или состояния покоя происходит при подключении к цепи или отключении от нее источников, а также при всевозможных переключениях внутри самой схемы.

Переходные процессы наблюдаются при переходе от одного стационарного режима к другому.

Решение уравнений в новом стационарном состоянии будет представлять собой сумму вынужденного и свободного колебаний $s(t) = s_{вын}(t) + s_{св}(t)$

$s_{св}(t)$ необходимо, чтобы удовлетворить начальным условиям.

Начальные условия $u_C(+0)=u_C(-0)$ и $i_L(+0)=i_L(-0)$

Наиболее удобный аппарат для анализа переходных процессов — преобразование Лапласа.

Переходные процессы играют большую роль в устройствах импульсной и цифровой техники, поскольку их длительность определяет быстродействие этих устройств.