4.7. Условие неискаженной передачи через цепь.

Какова должна быть частотная передаточная функция цепи $K(j\omega)$, чтобы колебание (сигнал) произвольного вида $s_1(t)$ передавался через нее без искажений ?

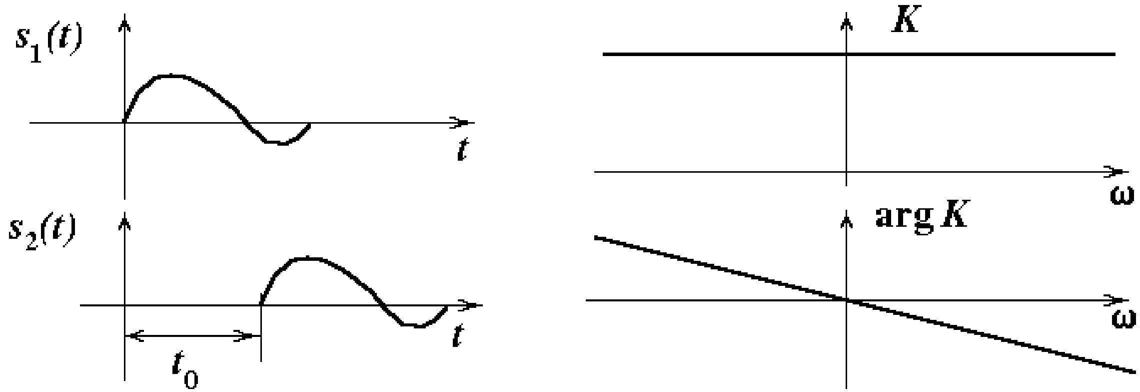
Допустимо: а) изменение уровня (размаха) сигнала,
б) размерность (напряжение в ток, или наоборот),
в) задержку во времени на постоянный интервал t_0.

$$s_2(t)=K_0\, s_1(t-t_0)$$

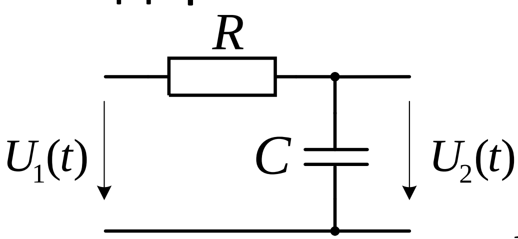
$$S_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} K_0 s_1(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} K_0 s_1(t_1)e^{-j\omega t_1}e^{-j\omega t_0}dt_1=K_0 e^{-j\omega t_0}S_1(\omega).$$

$$\rightarrow\ K(j\omega)=K_0 e^{-j\omega t_0} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |K(j\omega)|=K_0 \\ \arg K(j\omega)=-\omega t_0 \end{cases}$$

АЧХ неискажающей цепи есть константа, а ФЧХ — линейная функция во всей бесконечной полосе частот .

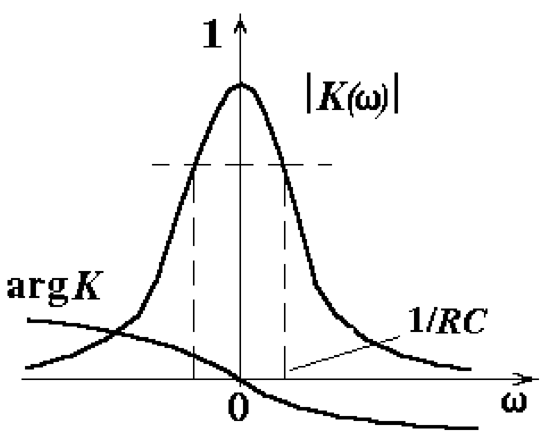


Для практических целей достаточно, чтобы цепь имела АЧХ, близкую к идеальной, только в той полосе частот, в которой содержится спектр сигнала (его существенная часть).



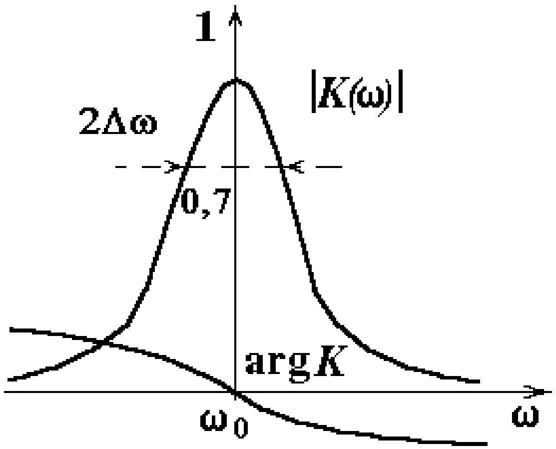
Пример:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}, \ |K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \ \arg K(j\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega RC)$$



В полосе $0 < \omega < 1/RC$ АЧХ изменяется от 1 до $1/\sqrt{2}$ (немного), а ФЧХ близка к линейной зависимости.

LC контур:



$$K(j\omega)=\frac{K_0}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}=\frac{K_0}{1+j\xi}$$

$$\begin{cases}|K(j\omega)|=\dfrac{K_0}{\sqrt{1+\xi^2}}\\ \arg K(j\omega)=-arctg\xi\end{cases}$$

В полосе пропускания $2\Delta\omega = \omega/Q$ неравномерность АЧХ 3 дБ, а ФЧХ близка к линейной. Такая цепь может использоваться для радиосигналов или квазигармонических колебаний. Если спектр колебания расположен в окрестности ω и занимает полосу частот, не превышающую $2\Delta\omega$, то искажения будут незначительны.

4.8. Импульсная характеристика цепи. Интеграл суперпозиции.

В **частотной области** цепь осуществляет операцию умножения Фурье-образа колебания на передаточную характеристику цепи:

$$S_2(\omega) = K(j\omega)\cdot S_1(\omega)$$

Какое при этом само колебание $s_1(t)$?

Предположим, что существует такая функция $k(t)$, что $k(t) \div K(j\omega)$

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt$$ - прямое преобразование Фурье

Свойство 8: $$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau \div S_1(\omega)\cdot S_2(\omega)$$ —>

$$s_2(t) = s_1(t) * k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) s_1(t-\tau) d\tau$$

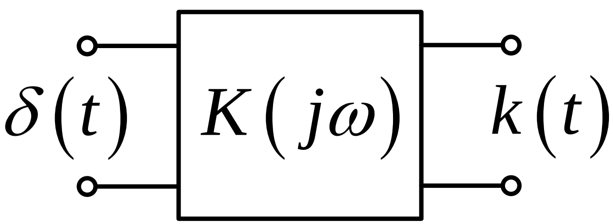
Функция $k(t)$, как и $K(j\omega)$, определяется свойствами самой цепи и не зависит от конкретного внешнего воздействия.

Рассмотрим входной сигнал в виде δ-функции: $s_1(t) = \delta(t)$ –>

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = k(t)$$ –>

$k(t)$ есть отклик цепи при действии на ее входе δ-функции.

$k(t)$ - импульсная характеристика (ИХ) цепи, или импульсный отклик



$$K(j\omega) \div k(t)$$

Импульсная характеристика связана с частотной передаточной функцией преобразованием Фурье.

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{-j\omega t}dt \qquad k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Интеграл суперпозиции: $$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)s_1(t-\tau)d\tau$$

Если известна ИХ цепи возможно вычислить отклик цепи на любое внешнее воздействие $s(t)$.

Происхождение названия «интеграл суперпозиции»: значение s_2 в каждый момент времени t равно сумме взвешенных значений s_1, взятых в разные моменты $t–\tau$ с весом $k(\tau)$. Это обусловлено инерционностью цепи, цепь как бы «помнит», что было с ней некоторое время тому назад.

<u>Принцип причинности</u>: отклик на внешнее воздействие не может появиться раньше вызвавшей его причины (в данном случае ею является импульс $\delta(t)$):

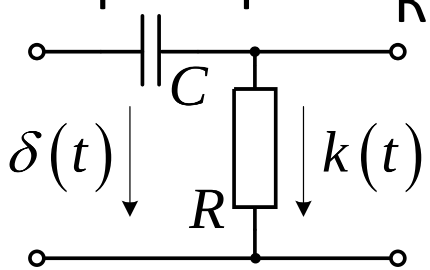
$$k(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0$$

ИХ $k(t)$ - свободное колебание цепи, возбужденное кратковременным импульсным воздействием. Если цепь пассивна и обладает диссипативными потерями, то $k(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Цепь может не обладать ИХ (в классе обычных функций):

Если $k(t)$ — обычная функция, удовлетворяющая достаточным условиям представления ее в виде интеграла Фурье, то на основании $k(t) \div K(j\omega)$ можно показать, что $K(j\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$. Однако в теории рассматриваются и такие цепи, у которых $K(j\omega)$ этому условию не удовлетворяет.

Пример:



Коэффициент передачи $K(j\omega) = \dfrac{R}{R + 1/j\omega C} \to 1$

при $\omega \to \infty$

=> ИХ в виде обычных функций не существует

Однако, ИХ существует в виде специальных функций и равна:

$$k(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC}$$

ИХ есть предел, к которому стремится отклик цепи на входной импульс единичной площади, когда длительность импульса стремится к нулю. Если такового предела нет, то ИХ в обычном понимании не существует.

4.9. Переходная характеристика цепи, ее связь с импульсной характеристикой.

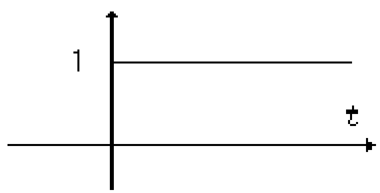
Рассмотрим функцию $K_1(j\omega) = \dfrac{K(j\omega)}{j\omega}$ –> $S_2(j\omega) = j\omega \cdot K_1(j\omega) S_1(\omega)$

Предположим, что $K_1(j\omega)$ обладает Фурье-образом $h(t) \div K_1(j\omega)$

Если существует ИХ $k(t) \div K(j\omega)$, то и $h(t)$ тоже существует, но $h(t)$ может существовать и тогда, когда ИХ нет (хотя тоже не всегда).

Используем свойства 7 и 8: $s_2(t) = \dfrac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s_1(t-\tau)\,d\tau = \dfrac{d}{dt}\big(h(t) * s_1(t)\big)$

Функция единичного скачка — $1(t)$:



$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Связь функции единичного скачка и δ-функции

$$1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \delta(t')\,dt'$$

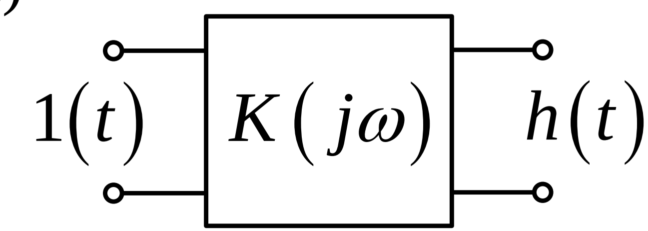
Примем $s_1(t) = 1(t)$ –>

$$s_2(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)1(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\left(\int_{-\infty}^{t}\delta(t'-\tau)dt'\right)d\tau = \ldots$$

$$\ldots\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t'-\tau)dt'd\tau = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = h(t)$$

$h(t)$ - реакция цепи на единичный скачок $1(t)$

$h(t)$ - <u>переходная характеристика</u> цепи (ПХ).



По принципу причинности $h(t)=0$ при $t<0$.

$$s_2(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s_1(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_{0}^{\infty} h(\tau)s_1(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)s_1(\tau)d\tau$$

Если, кроме того, $s_1(t)$ начинается от $t=0$, то в обоих интегралах пределы будут от 0 до t.

В случае, когда цепь обладает ИХ, из $K_1(j\omega) = \dfrac{K(j\omega)}{j\omega}$ получаем:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t')dt', \qquad k(t) = \frac{d}{dt}h(t)$$

- формулы, выражающие связь ПХ и ИХ. В этом случае $h(t)$ — непрерывная функция (даже если $k(t)$ имеет скачки).

$$s_2(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)s_1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)s_1(\tau)d\tau$$

Для отыскания ИХ можно сначала найти ПХ, а затем использовать $k(t) = \dfrac{d}{dt}h(t)$

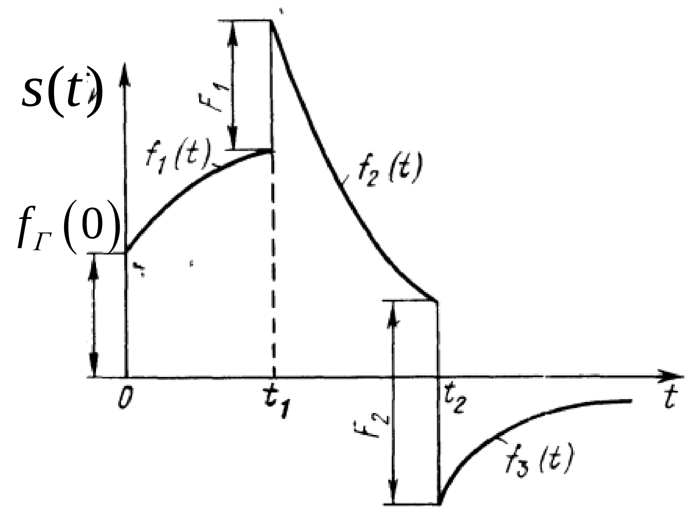
Если же сама ПХ $h(t)$ имеет скачки (например, при t=0), то ИХ не существует, поскольку ПХ недифференцируема.

Действие на входе цепи $1(t)$ равносильно включению в момент t=0 источника постоянного напряжения (или тока). При этом ПХ описывает переходный процесс от состояния с нулевыми токами и напряжениями во всех ветвях к состоянию установившихся токов и напряжений.

ПХ позволяет применить интеграл суперпозиции к более широкому классу цепей, чем ИХ, однако сама ПХ тоже существует не всегда. Например, если рассматривать ток i через емкость C как реакцию на напряжение, то ПХ не существует, поскольку скачок u_C невозможен при конечном токе. В этом случае $K(j\omega)=j\omega C$, $K_1(j\omega)=C$ и не стремится к нулю при $\omega\to\infty$.

Частотная передаточная функция $K(j\omega)$ **существует всегда**, если в цепи есть потери. При этом ИХ и ПХ могут не существовать.

Интеграл суперпозиции (он же интеграл Дюамеля) можно применять для расчета прохождения сигналов через цепи.
В случае входных функций с разрывами (например, импульсов) выходной сигнал определяется:



1) $s(t) = f_1(t)$ при $0 \le t \le t_1$
не включая скачок F_1

$$s_2(t) = f_Г(0)h(t) + \int_0^t f'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$f'_1(\tau) = \left.\frac{df_1(t)}{dt}\right|_{t=\tau}$$

2) $s(t) = f_2(t)$ при $t_1 < t < t_2$,
не включая скачок F_2

$$s_2(t) = f_Г(0)h(t) + \int_0^{t_1} f'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + F_1 h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t} f'_2(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$f'_2(\tau) = \left.\frac{df_2(t)}{dt}\right|_{t=\tau}$$

3) $s(t) = f_3(t)$ при $t_2 < t \le \infty$

$$s_2(t) = f_Г(0)h(t) + \int_0^{t_1} f'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + F_1 h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f'_2(\tau)h(t-\tau)d\tau -$$

$$-F_2 h(t-t_2) + \int_{t_2}^{t} f'_3(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad f'_3(\tau) = \left.\frac{df_3(t)}{dt}\right|_{t=\tau}$$

4.10. Преобразование Лапласа

$$\hat{S}(p) = \int_0^\infty s(t) e^{-pt} dt$$

где $p=\sigma+j\omega$ —комплексное число. Функция $\hat{S}(p)$ называется Лапласовым образом (или изображением) функции $s(t)$.

Преобразование Лапласа применимо, если функция $s(t)$ кусочно-непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} s(t) = 0, & \mathrm{t} < 0 \\ |s(t)| \le M \cdot e^{ct}, & \mathrm{t} > 0 \end{cases}$$

где M, c — вещественные числа.

Оценка: $$|\hat{S}(p)| \le \int_0^\infty M e^{ct} e^{-\sigma t} dt = \frac{M}{\sigma - c}$$ при $\sigma > c$

Преобразование Лапласа сходится в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}(p) = \sigma > c$.

Преобразование Лапласа можно применять не только к убывающим или ограниченным функциям, но и даже к растущим при $t \to \infty$ не быстрее экспоненты, в частности, к любым полиномам, показательным функциями и др.

Для применения преобразования Фурье к функции $s(t)$ необходима абсолютная интегрируемость $s(t)$ на всей оси, т. е. сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt$

Процессы в цепи описываются линейными дифференциальными уравнениями, и из теории этих уравнений следует, что поведение цепи при $t>0$ однозначно определяется заданием всех внешних воздействий, начиная с $t=0$, и состоянием цепи в момент $t=0$ (т.е. значениями токов в индуктивностях и напряжениями на емкостях). Каким путем цепь пришла к данному состоянию — **для дальнейшего не играет никакой роли**.

Если интересуют колебания только для $t>0$, то можно без ограничения общности считать, что при $t<0$ колебания отсутствовали, а с момента $t=+0$ они возбуждаются под действием заданных начальных условий и внешних источников.

Преобразование Лапласа можно применять для расчета колебаний, начиная с любого (фиксированного) момента, если известно состояние цепи в этот момент.

Примеры преобразования Лапласа:

1) **Функция единичного скачка** $s(t)=1(t)$ –> $\hat{S}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}dt=\dfrac{1}{p}$

Интеграл сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(p)>0$ (не включается мнимая ось). При $\mathrm{Re}(p)\leq 0$ интеграл расходится, однако получившаяся функция $1/p$ (если отвлечься от ее происхождения) имеет смысл при всех p, исключая $p=0$ (особая точка).

2) Линейная функция $s(t)=t$ (при $t>0$, 0 - при $t<0$):

$$\hat{S}(p)=\int_0^\infty te^{-pt}dt=\left.\frac{te^{-pt}}{(-p)}\right|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{e^{-pt}}{(-p)}dt=\frac{1}{p^2}$$

Интеграл сходится при $\mathrm{Re}(p)>0$, однако полученная функция может рассматриваться при всех p, кроме $p=0$.

3) Показательная функция $s(t)=e^{\alpha t}$, где α — любое число, в том числе комплексное (колебательный процесс):

$$\hat{S}(p)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt=\frac{1}{p-\alpha}$$ если $\mathrm{Re}(\alpha)<\mathrm{Re}(p)$

4) δ -функция: $$\hat{S}(p)=\int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}dt=\int_{-\infty}^\infty \delta(t)e^{-pt}dt=e^{-p\cdot 0}=1$$

Используем определение δ –функции: $$\int_{-\infty}^\infty f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

Восстановление функции $s(t)$ по ее лапласову образу $S(p)$ - формула разложения (частный случай, когда $S(p)$ представляет собой рациональную дробь): $\hat{S}(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$

A и *B* —полиномы:

$$A(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0, \qquad B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0$$

Предположим, что а) степень $A(p)$ меньше степени $B(p)$ ($m<n$); б) полином $B(p)$ имеет только простые корни p_i (нет кратных корней) т.е. для $i=1,2,\ldots,n$: $B(p_i)=0$, но $B'(p_i)\neq 0$.

Дробь A/B можно разложить в сумму простейших дробей

$$\hat{S}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{p - p_i}$$

Находим коэффициент C_1 : умножим на $p-p_1$, устремим $p \to p_1$

$$(p - p_1)\frac{A(p)}{B(p)} = C_1 + (p - p_1)\sum_{i=2}^{\infty} \frac{C_i}{p - p_i} \to C_1$$

$$(p-p_1)\frac{A(p)}{B(p)} = C_1 + (p-p_1)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{C_i}{p-p_i} \to C_1$$

По правилу Лопиталя: $C_1 = A(p_1)\lim_{p\to p_1}\frac{p-p_1}{B(p)} = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}$

Аналогично находим все коэффициенты C_i

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{p-p_i}$$

$$\left(e^{\alpha t} \div \frac{1}{p-\alpha}\right)$$

-> $s(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{A(p_i)}{B'(p_i)}e^{p_i t}$ - формула разложения

$B'(p_i)$ - производная от $\boldsymbol{B}$ по p при $p = p_i$

p_i - корни уравнения $B(p) = 0$

Формула разложения в случае корня $p = 0$:

$$\frac{A(p)}{pB_1(p)} \div \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{A(p_i)}{p_i B_1'(p_i)}e^{p_i t}$$

p_i - корни уравнения $B_1(p) = 0$

$B_1'(p_i)$ - производная от $B_1(p)$ по p при $p = p_i$