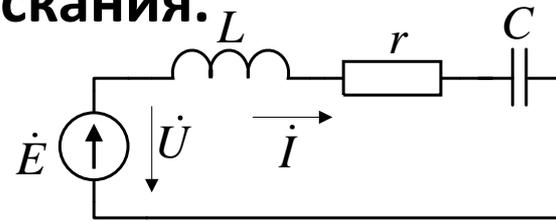


3.3. Частотные характеристики последовательного колебательного контура. Полоса пропускания.

Сопротивление контура $Z(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$



возможно рассматривать как коэффициент передачи, если I считать внешним воздействием, U – откликом.

$$z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + j\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega\omega_0 CL}\right) = r + j\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) =$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad Q = \frac{\rho}{r} = r \left[1 + j \frac{L}{r\sqrt{LC}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \right] = r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \right]$$

$\omega - \omega_0$ - абсолютная расстройка (от частоты резонанса)

$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ - относительная расстройка (ее часто выражают в %) вблизи частоты резонанса $|\delta| \ll 1$

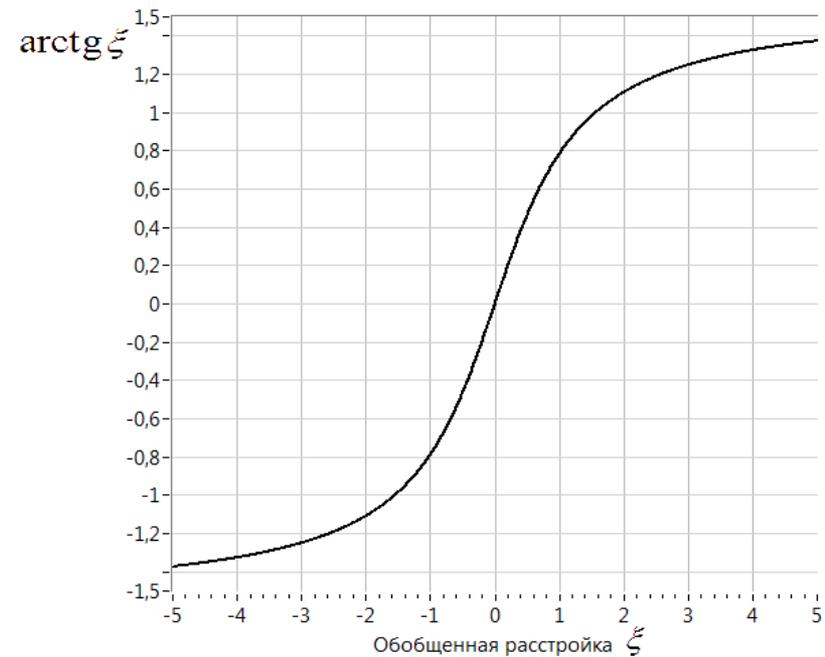
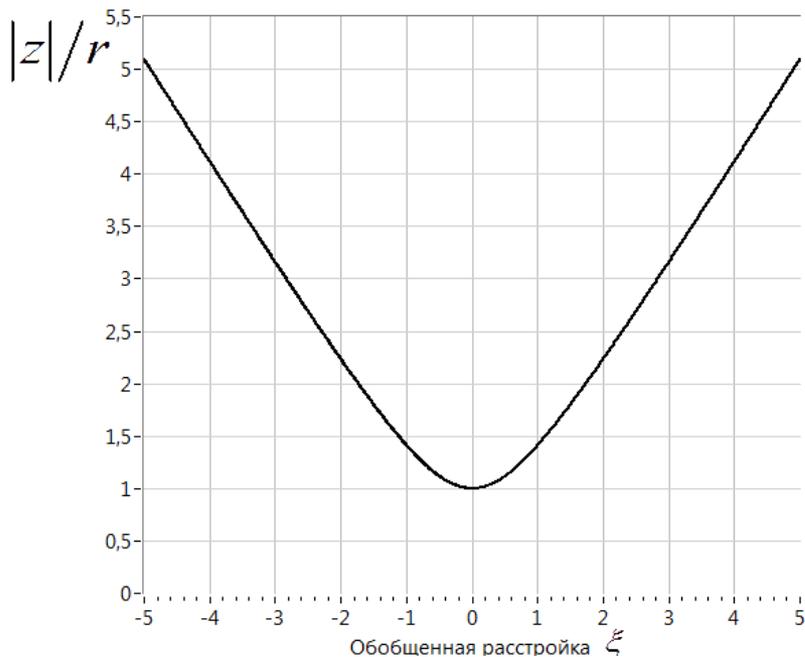
$\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ - обобщенная расстройка

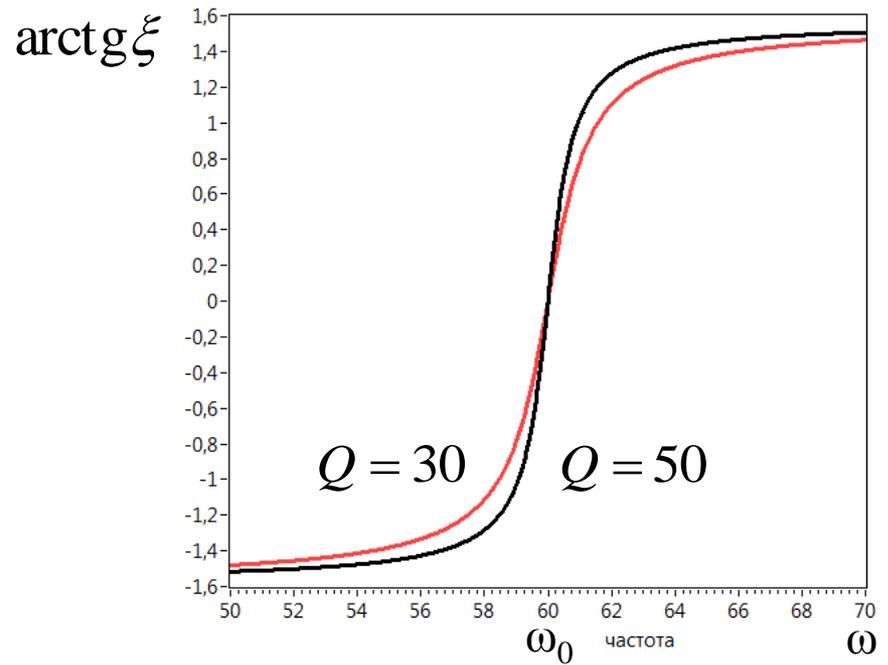
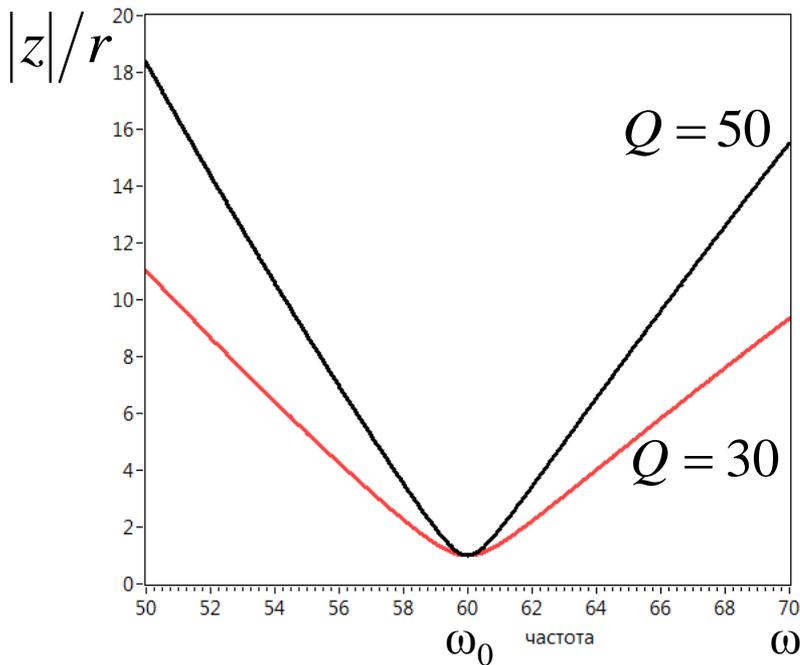
$$\xi = Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} = Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \frac{\omega + \omega_0}{\omega} \approx Q \cdot 2\delta.$$

При малых отклонениях ω от ω_0 обобщенная расстройка пропорциональна относительной (и абсолютной).

$$\omega : 0 \rightarrow \infty, \quad \rightarrow \quad \xi : -\infty \text{ до } +\infty$$

$$z = r(1 + j\xi) \quad \rightarrow \quad |z| = r\sqrt{1 + \xi^2}, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \xi$$





Зависимости $|z|/r$ и $\varphi = \arctg \xi$ от ω не симметричны.

- 1) Входной сигнал эдс \dot{E} (внешнее воздействие),
выходной сигнал \dot{I}

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{z} = \frac{\dot{E}}{r(1+j\xi)} = \frac{\dot{I}_0}{1+j\xi}, \quad \text{где } \dot{I}_0 = \dot{E}/r \text{ - ток при резонансе}$$

$$\frac{\dot{I}}{\dot{I}_0} = \frac{1}{1+j\xi}, \quad \frac{I_m}{I_{m0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

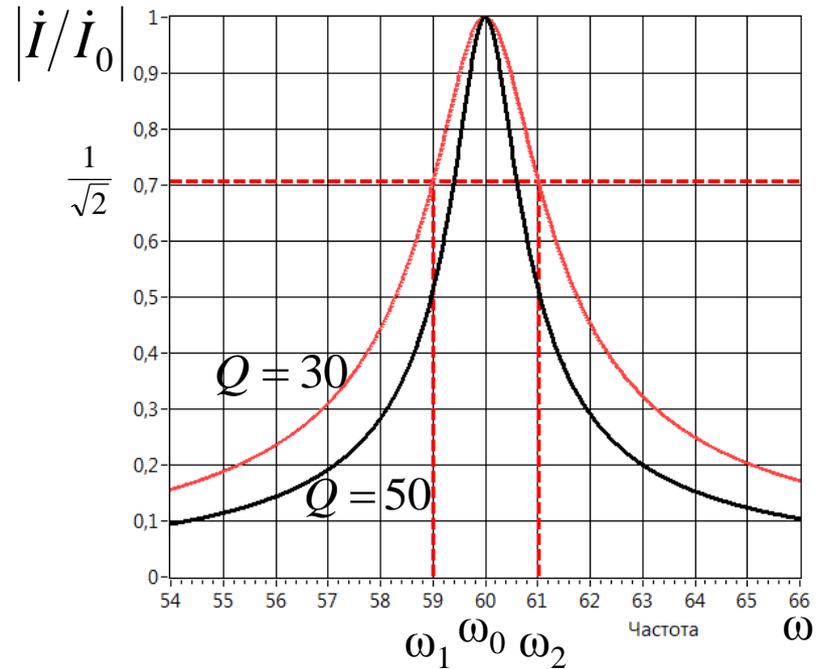
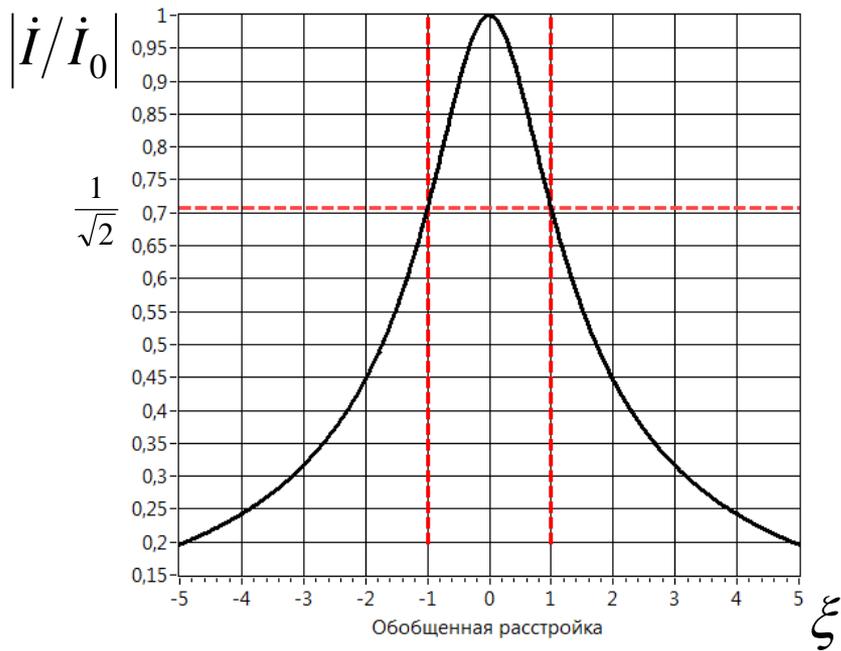


График зависимости $|i/i_0|$ от ξ симметричен,
от ω — несимметричен.

Контур обладает частотно-избирательными свойствами. Он хорошо “пропускает” колебания, у которых $\omega \approx \omega_0$, и плохо пропускает колебания с частотами, далекими от ω_0 . На этом основано его использование в качестве простейшего полосового фильтра (ПФ).

Полоса пропускания контура на уровне $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимума АЧХ (соответствует снижению мощности на краях полосы в 2 раза относительно максимума при ω_0):

$$\frac{I_m}{I_{m0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \rightarrow \xi_{1,2} = \pm 1 \quad \text{Обозначим } x_{1,2} = \omega_{1,2}/\omega_0,$$

где ω_1 и ω_2 — граничные частоты.

$$\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad d = \frac{1}{Q} \text{ - затухание контура.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{x_1} = -d \\ x_2 - \frac{1}{x_2} = d \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1^2 + dx_1 - 1 = 0 \\ x_2^2 - dx_2 - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x_1 = -\frac{d}{2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}}, \quad x_2 = \frac{d}{2} + \sqrt{1 + \frac{d^2}{4}}.$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = x_2 - x_1 = d = 1/Q \rightarrow \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad \Delta\omega \text{ — полуширина}$$

полосы пропускания.

Чем выше нагруженная добротность, тем меньше ширина полосы пропускания, т.е. острее максимум резонансной характеристики. Дополнительные потери снижают добротность и приводят к расширению полосы пропускания.

2) Входной сигнал эдс \dot{E} (внешнее воздействие),
 выходной сигнал - напряжение на L или на C :

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_{L0}} = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\dot{I}}{\dot{I}_0}, \quad \left| \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_{L0}} \right| = \frac{\omega}{\omega_0} \left| \frac{\dot{I}}{\dot{I}_0} \right| = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{|1 + j\xi|} = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}$$

Вблизи резонансной частоты $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$, поэтому форма характеристики почти не отличается от рассмотренной выше для тока. Точный максимум $|U_L|$ наступает на частоте ω_L , чуть большей ω_0 .

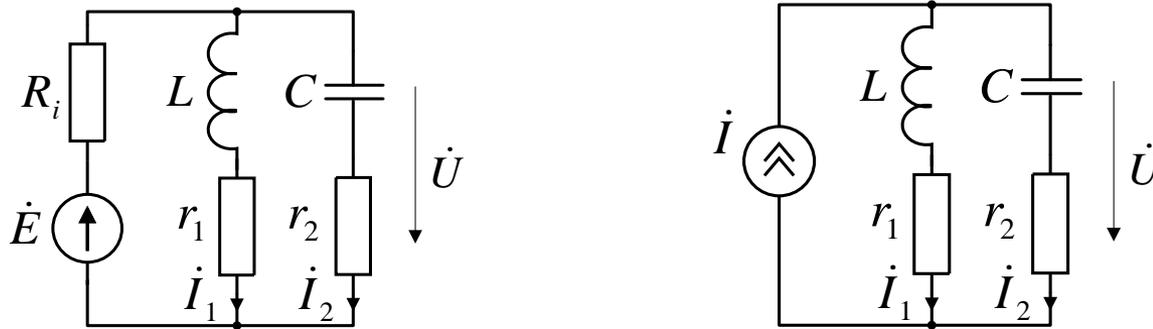
$$\text{Если } Q \gg 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_L - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{1}{(2Q)^2} \ll \frac{1}{Q} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$$

Относительное смещение максимума для $|U_L|$ ничтожно мало и практически его можно не учитывать.

$$\text{Аналогично} \quad \left| \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_{C0}} \right| = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad \rightarrow$$

Максимум $|U_C|$ смещен на $-1/(2Q)^2$ относительно ω_0 , что также можно не учитывать при расчетах и измерениях.

3.4. Резонанс в параллельном колебательном контуре.

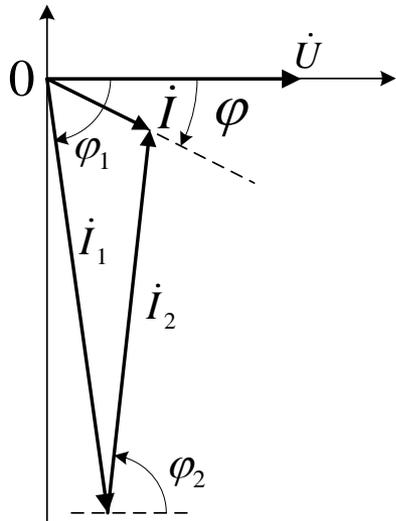


Контур питается от идеального генератора тока \dot{I}

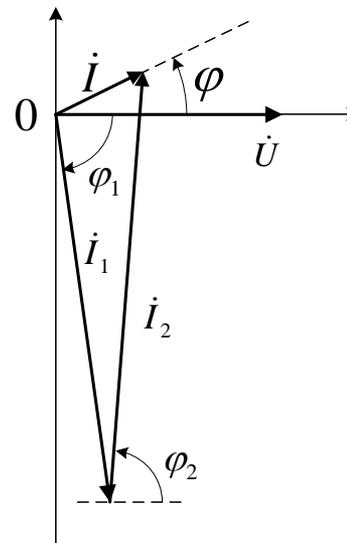
$$r_1 \ll \omega L, \quad r_2 \ll 1/\omega C.$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{r_1 + j\omega L} = \frac{\dot{U}}{\sqrt{r_1^2 + (\omega L)^2}} e^{j\varphi_1} \approx \frac{\dot{U}}{\omega L} e^{j\varphi_1}, \quad \varphi_1 = -\arctg \frac{\omega L}{r_1} \approx -\frac{\pi}{2}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{r_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\dot{U}}{\sqrt{r_2^2 + (1/\omega C)^2}} e^{j\varphi_2} \approx \omega C \dot{U} e^{j\varphi_2}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{1}{r_2 \omega C} \approx +\frac{\pi}{2}$$



$$\omega L < \frac{1}{\omega C} \rightarrow \varphi < 0$$



$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \rightarrow \varphi > 0$$

$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ \rightarrow амплитуды токов I_1 , I_2 практически одинаковы и намного больше амплитуды общего тока I .

Резонанс токов в параллельном контуре: в контуре замыкается токи I_1 , I_2 в Q раз больше, чем втекающий в контур общий ток I

Точная частота резонанса - частота, при которой сдвиг фаз между напряжением и током на входе равен нулю.

$$\varphi = 0 \rightarrow \operatorname{Im} y = \operatorname{Im} (y_1 + y_2) = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{r_1 + j\omega L} = \frac{r_1 - j\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2}, \quad y_2 = \frac{1}{r_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{r_2 + j\frac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

$$\frac{\omega_p L}{r_1^2 + (\omega_p L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega_p C}}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2} \rightarrow \omega_p^2 LC \left[r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2 \right] = r_1^2 + (\omega_p L)^2 \rightarrow$$

$$\omega_p^2 LC r_2^2 + \frac{L}{C} = r_1^2 + \omega_p^2 L^2 \rightarrow \omega_p^2 LC \left(r_2^2 - \frac{L}{C} \right) = r_1^2 - \frac{L}{C} \rightarrow \omega_p^2 = \frac{1}{LC} \frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho^2 - r_2^2}$$

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - (r_1/\rho)^2}{1 - (r_2/\rho)^2}} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Поправка к частоте имеет второй порядок малости $\sim 1/Q^2$

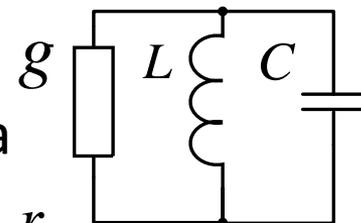
Поскольку при резонансе $\text{Im}(y) = 0$, то равна нулю суммарная реактивная мощность (компенсируются реактивные мощности ветвей). Отсюда вытекает, что L и C обмениваются энергией без участия источника, причем общая запасенная энергия не меняется во времени — как и в последовательном контуре.

Ток и напряжение на внешних зажимах контура:

$$(r_1/\rho)^2 \ll 1 \quad (r_2/\rho)^2 \ll 1$$

Проводимость контура $y = g + jb = \frac{r_1 - j\omega L}{(\omega L)^2} + \frac{r_2 + j/\omega C}{(1/\omega C)^2} \rightarrow$

$$g = \frac{r_1}{(\omega L)^2} + r_2(\omega C)^2, \quad jb = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$



Этим уравнениям соответствует эквивалентная схема

При $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \rightarrow g \approx g_0 = \frac{r_1}{(\omega_0 L)^2} + r_2(\omega_0 C)^2 = \frac{r_1 + r_2}{\rho^2} = \frac{r}{\rho^2}$

Эквивалентное сопротивление контура $R_0 = \frac{1}{g_0} = \frac{\rho^2}{r} = Q\rho = Q^2 r$

Собственная добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0 C}{g_0} = \frac{1/\omega_0 L}{g_0} = \frac{\rho^2}{\rho r} = \frac{\rho}{r}, \quad d = \frac{r}{\rho} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q}, \quad \text{затухание } d=1/Q$$

где $Q_1 = \frac{\omega_0 L}{r_1}$ — добротность катушки индуктивности,

$Q_2 = \frac{1}{\omega_0 C r_2}$ — добротность конденсатора.

$$g_0 = \frac{1}{Q\rho}, \quad R_0 = Q\rho = Q^2 r$$

$$Q = 2\pi \frac{W_\rho}{W_r}$$

Входное сопротивление параллельного контура при резонансе является активным и в Q раз больше ρ .

У последовательного контура сопротивление при резонансе в Q раз меньше ρ .

Частотные характеристики параллельного колебательного контура

$$jb = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = j\omega_0 C \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega L \omega_0 C} \right) = \frac{j}{\rho} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{j \cdot Q}{\rho \cdot Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \dots$$

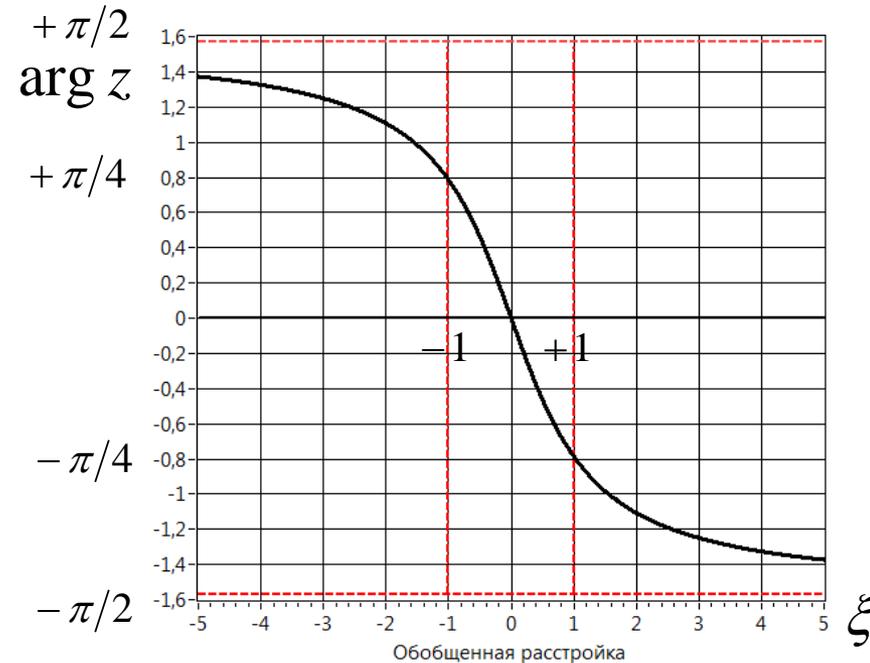
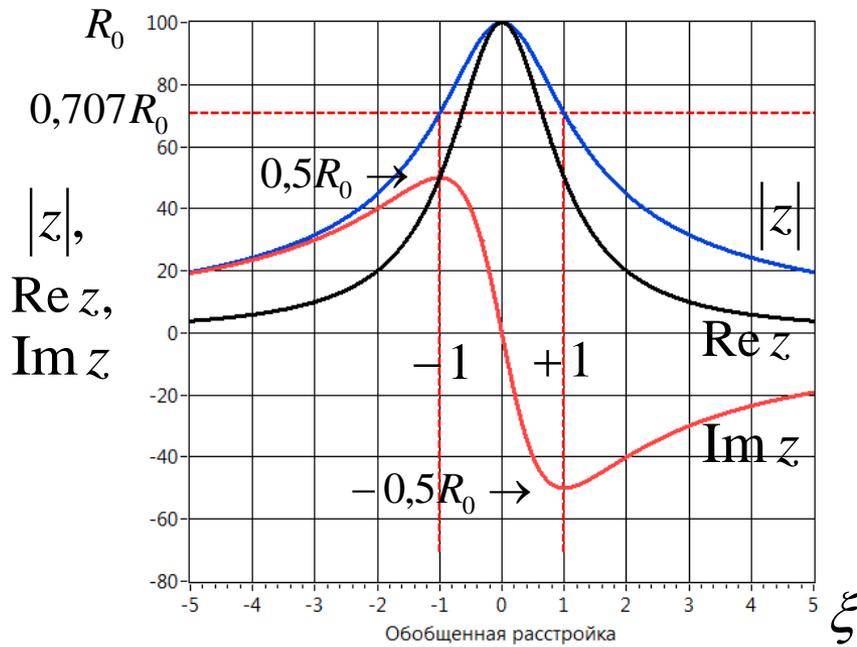
$$g_0 = \frac{r}{\rho^2} \quad Q = \frac{\rho}{r} \quad \xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad \dots = \frac{j}{\rho Q} \xi = \frac{j r}{\rho^2} \xi = j g_0 \xi$$

Итак $y = g_0(1 + j\xi) \rightarrow z = \frac{R_0}{1 + j\xi}$

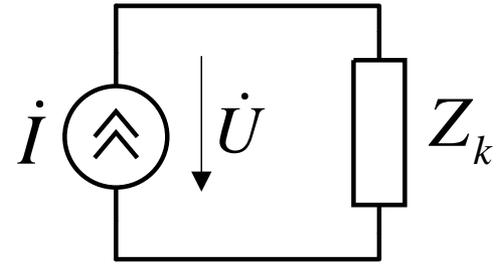
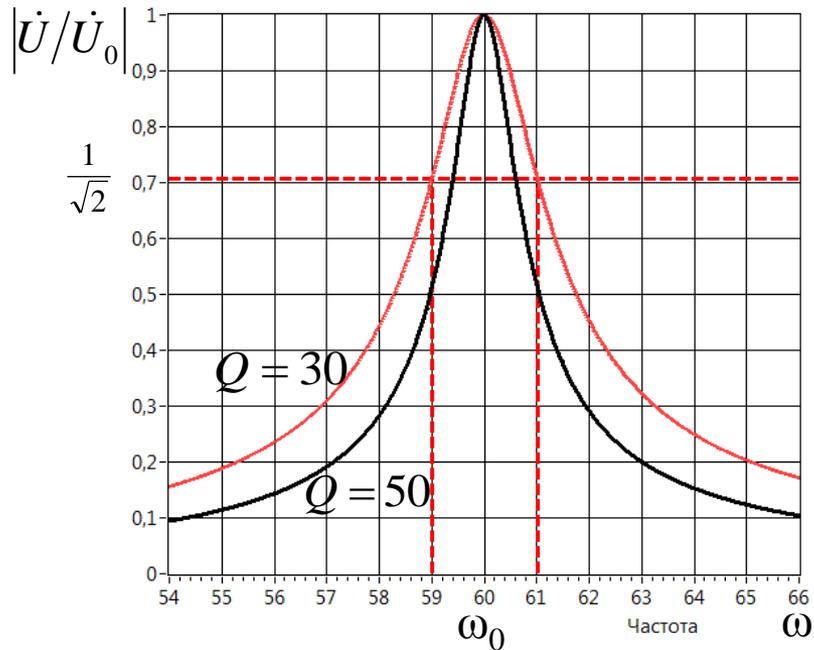
Частотные свойства $z(\xi)$ возможно рассматривать как коэффициент передачи, если I считать внешним воздействием, U – откликом.

$$\dot{U} = zI, \quad z = \frac{R_0}{1 + j\xi} = \frac{R_0(1 - j\xi)}{1 + \xi^2} \rightarrow \operatorname{Re} z = \frac{R_0}{1 + \xi^2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{\xi R_0}{1 + \xi^2}$$

$$|z| = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad \arg z = -\operatorname{arctg} \xi$$



Величины $|z|$ и $Re z$ максимальны при $\xi = 0$, $Im z$ проходит через 0 и имеет экстремумы ($\pm R_0/2$) при $\xi = -1$ (индуктивный характер) и $\xi = +1$ (емкостной).



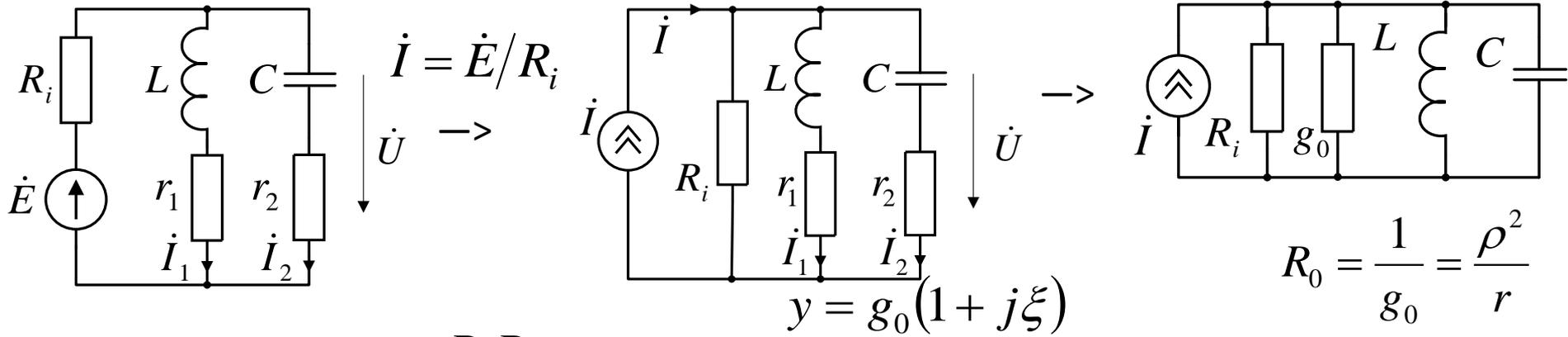
$$\frac{\dot{U}}{\dot{U}_0} = \frac{z\dot{I}}{R_0\dot{I}_0} = \frac{1}{1+j\xi} \cdot \frac{\dot{I}}{\dot{I}_0}$$

Схема питается от идеального генератора тока $\rightarrow \frac{\dot{I}}{\dot{I}_0} = 1 \rightarrow \frac{\dot{U}}{\dot{U}_0} = \frac{1}{1+j\xi}$

Для последовательного контура было получено $\frac{\dot{I}}{\dot{I}_0} = \frac{1}{1+j\xi}$

\rightarrow полоса пропускания параллельного контура $\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$

Рассмотрим параллельный контур с источником \dot{E}



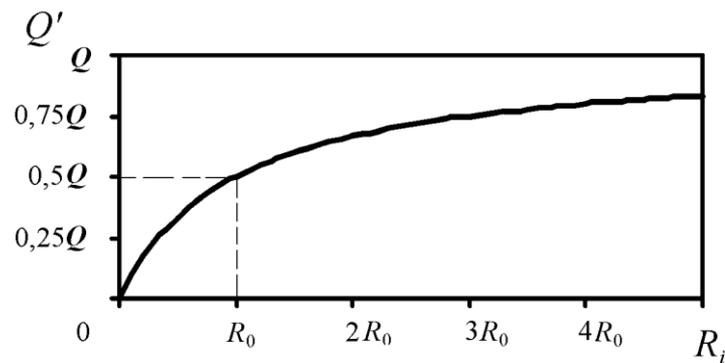
$$R_0 // R_i \rightarrow R'_0 = \frac{R_0 R_i}{R_0 + R_i} \rightarrow \text{нагруженная добротность } Q' = R'_0 / \rho$$

$$\rightarrow z' = \frac{R'_0}{1 + j\xi'}, \quad \xi' = Q' \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \rightarrow \dot{U} = z' \dot{I} = \dot{E} \frac{z'}{R_i},$$

$$Q' = \frac{R'_0}{\rho} = \frac{R_0 \cdot R_i}{\rho(R_0 + R_i)} = \frac{Q}{1 + R_0 / R_i}$$

Чем меньше R_i , тем сильнее нагружается контур и снижается добротность Q' , соответственно расширяется полоса

пропускаемых частот $2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q'}$.



Такое же действие оказывает и подключение внешней нагрузки

Ток \dot{I} в общей ветви контура $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R_i + z} \rightarrow$

амплитуда тока имеет минимум на резонансной частоте.

Снижению нагрузки на контур со стороны R_i способствует применение так называемого сложного контура.