3. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

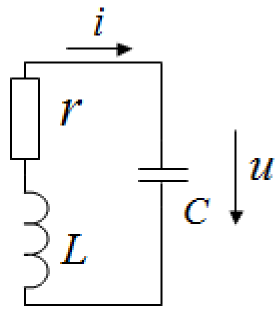
Вынужденные колебания — происходят под действием внешних сил, изменяющихся во времени, т.е. это — реакция системы (цепи) на внешнее колебательное воздействие.

Свободные колебания совершаются в отсутствие всякого внешнего воздействия; они происходят только за счет начального запаса энергии в самой системе.

Колебательные системы - запасенная энергия преобразуется из одного вида в другой, диссипация энергии мала. Колебания носят циклический (квазипериодический) характер, например, затухающая синусоида.

В режиме вынужденных гармонических колебаний в колебательной системе наблюдается явление резонанса: сильное возрастание амплитуды колебания, когда частота внешнего воздействия приближается к частоте свободного колебания самой системы.

3.1. Свободные колебания в LC-контуре



Свободные колебания не являются гармоническими, и к ним непосредственно метод КА не может быть применен.

$$L\frac{di}{dt}+ri+u=0,\quad i=C\frac{du}{dt}\quad \longrightarrow \quad LC\frac{d^2u}{dt^2}+rC\frac{du}{dt}+u=0$$

Обозначения: $\omega_0=1/\sqrt{LC}$, $\alpha=r/2L$ —> $\dfrac{d^2u}{dt^2}+2\alpha\dfrac{du}{dt}+\omega_0^2u=0$

Решение ищем в виде: $u(t)=Ae^{pt}$

$$Ae^{pt}(p^2+2\alpha p+\omega_0^2)=0$$

Характеристическое уравнение: $p^2+2\alpha p+\omega_0^2=0$

Корни : $p_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$

Каждый корень дает свое частное решение дифференциального уравнения. Общее же решение является их суперпозицией:

$$u(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad \text{—>} \quad \frac{i(t)}{C} = \frac{du}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$$

Для однозначного решения используем начальные условия:

$$u(0) = U_0 \qquad\qquad A_1 + A_2 = U_0$$

$$\text{—>}$$

$$i(0) = C\frac{du(0)}{dt} = I_0 \qquad\qquad p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{I_0}{C}$$

Значения U_0, I_0 однозначно определяют начальный запас энергии в цепи.

Характер свободного колебания зависит от соотношений между параметрами цепи. Здесь возможны три случая:

1. Апериодический (т.е. нециклический) режим:

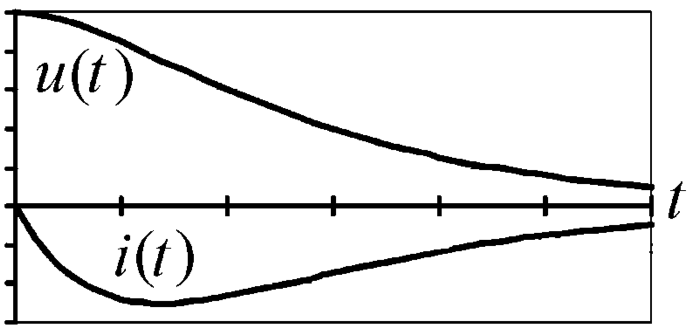
$$\alpha > \varpi_0 \quad \text{—>} \quad \frac{r}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{—>} \quad r > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{—>} \quad r > 2\rho$$

$\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ - характеристическое сопротивление контура

Оба корня вещественны и отрицательны:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{—>} \quad p_1 = -\alpha_1, \quad p_2 = -\alpha_2$$

Решение $\quad u(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$



$I_0 = 0 \qquad U_0 \neq 0$

При $t \to \infty$ напряжение и ток монотонно приближаются к нулю по экспоненте $\sim e^{-\alpha_m t}$

α_m - меньшая из величин α_1 и α_2

$\tau = \alpha_m^{-1}$ - постоянная времени цепи

2. Колебательный режим: $\alpha < \varpi_0$ —> $r < 2\rho$

Корни характеристического уравнения образуют комплексно сопряженную пару:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{—>} \quad p_1 = -\alpha + j\Omega, \quad p_2 = -\alpha - j\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

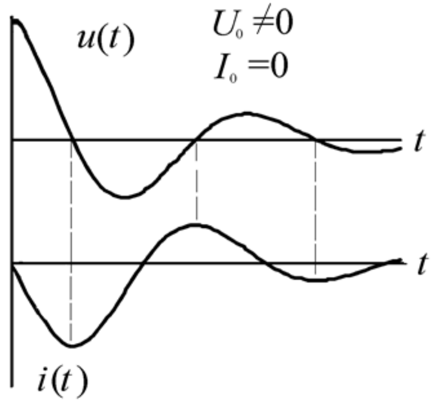
$$e^{(-\alpha \pm j\Omega)t} = e^{-\alpha t}(\cos\Omega t \pm j \sin\Omega t)$$

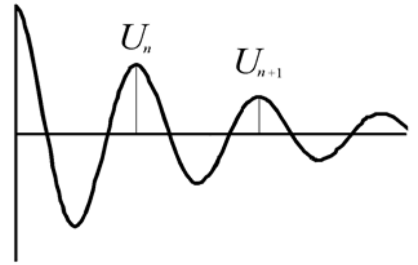
Решение имеет вид $u(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\Omega t + B_2 \sin\Omega t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \psi)$

Постоянные B_1 и B_2 или A и ψ находятся из начальных условий.

Процесс представляет собой колебание, близкое к синусоидальному, с экспоненциально убывающей амплитудой (колебательный режим).

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ -частота свободного колебания контура





$T_0 = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ - период колебания (точнее, период смены фаз, так как само колебание непериодическое)

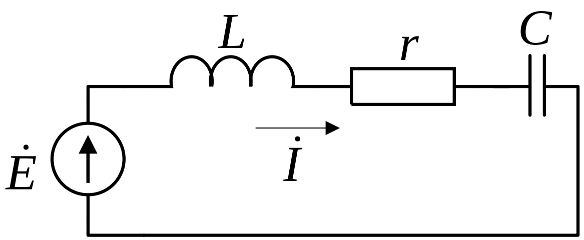
α - коэффициент затухания,

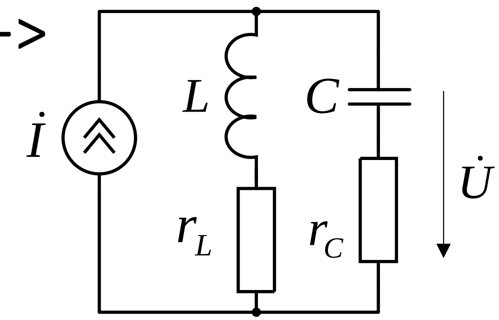
$\tau = \dfrac{1}{\alpha}$ - постоянная времени колебательного контура. За время t ордината огибающей уменьшается в *e* раз. При этом $u(t)$, $i(t)$ могут совершить много колебаний, если $\Omega >> \alpha$.

Изохронность: «период» T_0 (как и частота Ω), не зависит от начальных условий и не изменяется в процессе затухания амплитуды колебаний.

3.2. Вынужденные колебания в последовательном LC контуре

Последовательный и параллельный контуры —>





r - сопротивление собственных потерь контура
- сопротивление источника сигнала и
- сопротивление нагрузки (если оно есть)

Колебания гармонические —> метод комплексных амплитуд.

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{z} = \frac{\dot{E}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \qquad \left|\dot{I}\right| = \frac{\left|\dot{E}\right|}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$\boldsymbol{r} \ll \boldsymbol{x_L}$ или $|\boldsymbol{x_C}|$, то почти для всех частот (кроме области вблизи резонансной частоты):

$$|\dot{I}| = \frac{\left|\dot{E}\right|}{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|}$$

Область частот $x_L = |x_C|$ —> ток резко возрастает —> потерями уже пренебрегать нельзя:

$$\omega \to \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad \text{—>} \quad I_{\max} = E_m / r$$

ω_0- резонансная частота контура

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ - собственная частота контура

Реактивное сопротивление контура $j(\omega L - 1/\omega C)$

$\omega < \omega_0$ —> емкостной характер ($x<0$)

$\omega > \omega_0$ —> индуктивный характер ($x>0$)

$\omega = \omega_0$ —> чисто активное сопротивление,

Напряжение на r : $\dot{U}_r = r\dot{I} = \dot{E}$ $\quad U_{rm} = E_m$.

Напряжение на L и C : $\dot{U}_L = j\omega_0 L\dot{I}$, $\dot{U}_C = \dfrac{1}{j\omega_0 C}\dot{I}$ —> $\dot{U}_L = -\dot{U}_C = j\rho\dot{I}$,

где $\rho = \omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ - характеристическое («волновое») сопротивление контура.

$$\omega = \omega_0 \qquad U_{Lm} = U_{Cm} = \rho I = \rho \frac{E_m}{r} = QE_m,$$

$$Q = \frac{\rho}{r}$$ - добротность контура

Типичное значение Q в радиодиапазоне — от $30 \div 40$ до 200

При резонансе напряжения на L и C противоположны по фазе и компенсируют друг друга, а их амплитуды в Q раз больше амплитуды ЭДС. Резонанс в последовательном контуре иногда называют резонансом напряжений.

$$u_C = U_m \sin \omega t \quad -> \quad \dot{U}_m = -jU_m \quad -> \quad \varphi_{uc} - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad -> \quad \varphi_i = 0 \quad -> \quad \dot{I}_m = I_m \quad ->$$

$$i = I_m \cos \omega t \quad -> \quad I_m = \omega C U_m$$

Запасенная энергия $\quad W_L(t) = \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega t, \quad W_C(t) = \frac{1}{2} C U_m^2 \sin^2 \omega t$

Общий запас энергии $\quad W_\rho = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 C^2 U_{Cm}^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2$

$$W_L(t) + W_C(t) = W_\rho (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = W_\rho = \text{const.}$$

Происходит колебательный обмен энергией между индуктивностью и емкостью, причем общий запас энергии сохраняется. Источник *E* компенсирует потери энергии в сопротивлении.

Активная мощность $P = \frac{1}{2} r I_m^2$

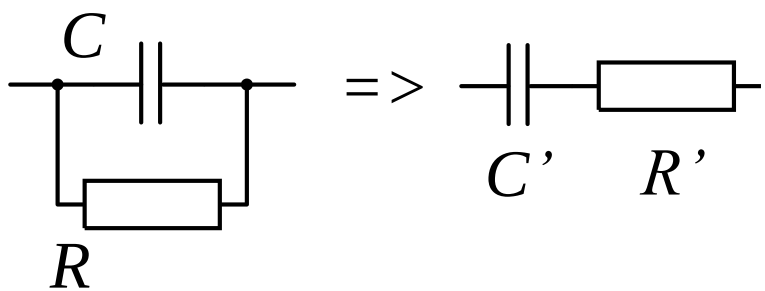
$W_r = PT$ - потери энергии за один период колебаний

$$\frac{W_\rho}{W_r} = \frac{L I_m^2 \omega_0}{r I_m^2 2\pi} = \frac{Q}{2\pi} \quad \rightarrow \quad Q = 2\pi \frac{W_\rho}{W_r}$$

$d = \frac{1}{Q}$ - затухание контура, $Q = \frac{\rho}{r}$

В общем случае $r = r_{собств} + r_{внеш}$, где $r_{собств}$ обусловлено потерями в самих элементах контура, а $r_{внеш}$ — потерями в сопротивлениях источника и нагрузки.

Если сопротивление нагрузки или потерь включено параллельно L или C, то его надо пересчитать в эквивалентное последовательное соединение.



$$d = \frac{r_{собств} + r_{внеш}}{\rho}$$ - общее затухание—> $$Q = \frac{1}{d}$$ нагруженная добротность

$$\frac{r_{собств}}{\rho} = d_{собств}$$ - собственное затухание —> $$Q_{собств} = \frac{1}{d_{собств}}$$

-собственная добротность контура

$$Q < Q_{собств}$$