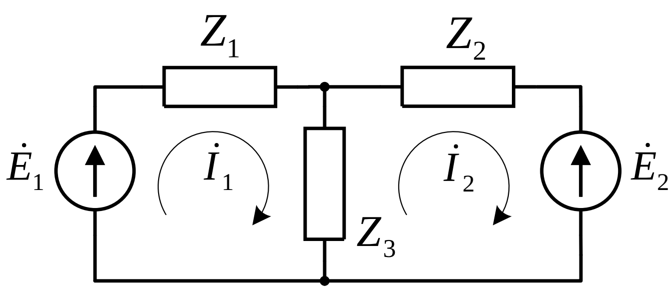
При использовании законов Кирхгофа число уравнений равно числу ветвей. Для уменьшения числа уравнений (и неизвестных величин) используют методы контурных токов, узловых потенциалов и эквивалентных генераторов.

2.8. Метод контурных токов.

Вместо токов ветвей вводятся вспомогательные так называемые контурные токи. При этом ток в каждой ветви либо совпадает с одним из контурных токов, либо является алгебраической суммой нескольких контурных токов.

Пример: $n=p-q+1=2$ - независимых контуров



2-ой закон Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = z_1\dot{I}_1 + z_3(\dot{I}_1 - \dot{I}_2), \\ -\dot{E}_2 = z_3(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + z_2\dot{I}_2. \end{cases}$$

По 1-му закону Кирхгофа ток через z_3 равен: $(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = (z_1 + z_3)\dot{I}_1 - z_3\dot{I}_2, \\ -\dot{E}_2 = -z_3\dot{I}_1 + (z_2 + z_3)\dot{I}_2 \end{cases}$$

$z_1 + z_3$ - собственное сопротивление первого контура

$-z_3$ - сопротивление связи первого и второго контуров. Знак минус у сопротивления связи появляется вследствие того, что в общей ветви направления контурных токов были выбраны противоположными.

Общий случай:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 + \ldots + z_{1n}\dot{I}_n \\ \dot{E}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 + \ldots + z_{2n}\dot{I}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{E}_n = z_{n1}\dot{I}_1 + z_{n2}\dot{I}_2 + \ldots + z_{nn}\dot{I}_n \end{cases}$$

n - число независимых контуров,

$\dot{I}_k$ - контурный ток k-го контура,

$\dot{E}_k$ - контурная ЭДС (сумма всех ЭДС, действующих в k-м контуре, с учетом их направлений по отношению к направлению контурного тока),

z_{kk} - собственное сопротивление k-го контура (сумма сопротивлений всех его ветвей, все со знаком «+»)

$z_{km}\ (k \neq m)$ - сопротивление связи *k*-го и *m*-го контуров (сопротивление общей ветви со знаком «+», если токи $\dot{I}_k$ и $\dot{I}_m$ в ней направлены одинаково, и со знаком «–», если противоположно; оно равно нулю, если контуры *k* и *m* не имеют общих элементов).

Итак, с помощью 1-го закона Кирхгофа выражаются токи ветвей через контурные токи и подставляются в уравнения 2-го закона Кирхгофа. Число неизвестных (и число уравнений) по данному методу равно числу независимых контуров, т.е. меньше, чем число всех ветвей.

Решение:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dot{E}_1 & z_{12} & . & z_{1n} \\ \dot{E}_2 & z_{22} & . & z_{2n} \\ . & . & . & . \\ \dot{E}_n & z_{n2} & . & z_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} z_{11} & \dot{E}_1 & . & z_{1n} \\ z_{21} & \dot{E}_2 & . & z_{2n} \\ . & . & . & . \\ z_{n1} & \dot{E}_n & . & z_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{и т.д.,}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & . & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & . & z_{2n} \\ . & . & . & . \\ z_{n1} & z_{n2} & . & z_{nn} \end{vmatrix}$$ - главный определитель системы

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + \ldots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{n1}}{\Delta}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + \ldots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{n2}}{\Delta}$$

$$\dot{I}_n = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} + \ldots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{nn}}{\Delta}$$

- разложение числителя по элементам столбца, содержащего ЭДС.

Δ_{km} - алгебраическое дополнение элемента z_{km} определителя Δ (произведение минора этого элемента на $(-1)^{k+m}$)

$$\Delta_{km} = (-1)^{k+m} \left| \begin{array}{ccc|cc} z_{11} & \ldots & z_{1m} & \ldots & z_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{k1} & \ldots & z_{km} & \ldots & z_{kn} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n1} & \ldots & z_{nm} & \ldots & z_{nn} \end{array} \right|$$

отмеченные строка и столбец вычеркиваются

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^{n} \dot{E}_m \Delta_{mk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$ - общее решение

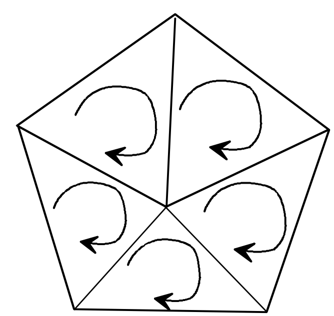
Замечания:

1. Если схема содержит идеальные генераторы тока, то эти токи целесообразно выбирать в качестве контурных, тогда число неизвестных контурных токов уменьшается на число известных токов генераторов.

2. При наличии в схеме параллельных ветвей, не содержащих ЭДС, замена их одним эквивалентным комплексным сопротивлением сокращает число контуров.

3. В планарной схеме всегда можно выбрать систему независимых контуров так, что во всех сопротивлениях связи токи смежных контуров будут направлены встречно. Например, для этого достаточно взять в качестве независимых контуров так называемые ячейки, и направить все контурные токи по часовой стрелке (или все — против).

В непланарной схеме в общем случае не представляется возможным иметь в общих ветвях только разности контурных токов.

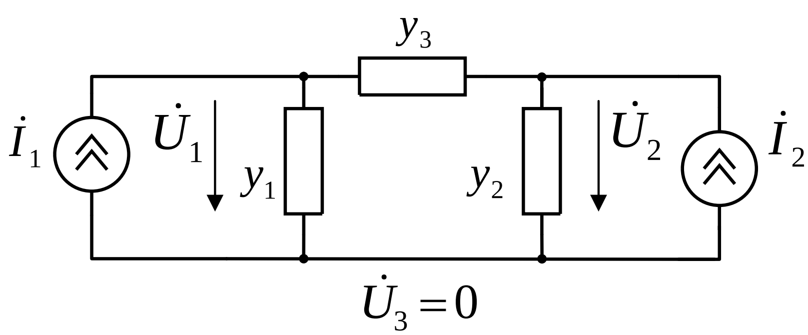


2.9. Метод узловых потенциалов.

Отыскиваются потенциалы узлов —>

—> определяются напряжения на ветвях и токи в них.

Пример:



$\dot U_3 = 0$ - опорный узел

По 1-му закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot I_1 = y_1\dot U_1 + y_3(\dot U_1 - \dot U_2) \\ \dot I_2 = y_2\dot U_2 + y_3(\dot U_2 - \dot U_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot I_1 = (y_1 + y_3)\dot U_1 - y_3\dot U_2 \\ \dot I_2 = -y_3\dot U_1 + (y_2 + y_3)\dot U_2 \end{cases}$$

В общем случае, если схема содержит q узлов, получается $q{-}1$ уравнений:

$$\begin{cases} \dot I_1 = y_{11}\dot U_1 + y_{12}\dot U_2 + \ldots + y_{1,q-1}\dot U_{q-1} \\ \dot I_2 = y_{21}\dot U_1 + y_{22}\dot U_2 + \ldots + y_{2,q-1}\dot U_{q-1} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot I_{q-1} = y_{q-1,1}\dot U_1 + y_{q-1,2}\dot U_2 + \ldots + y_{q-1,q-1}\dot U_{q-1} \end{cases}$$

Последний q-й узел принят за опорный (базисный), выбор опорного узла произволен.

$\dot{I}_k$ - суммарный ток всех источников, втекающих в k-й узел (берутся только те источники, которые непосредственно соединены с данным узлом)

y_{kk} - собственная проводимость k-го узла (сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в данном узле)

y_{km} - проводимость связи между k-м и смежным с ним m-м узлом (сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих эти узлы, взятая всегда со знаком «минус» при выбранном направлении отсчета узловых потенциалов к базовому узлу, независимо от того, является ли схема планарной или непланарной)

Решение: $\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{q-1}\dot{I}_m\Delta_{mk}, \quad k=1,2,\ldots,q-1,$ Δ - определитель системы

Δ_{mk} - алгебраическое дополнение элемента y_{mk}

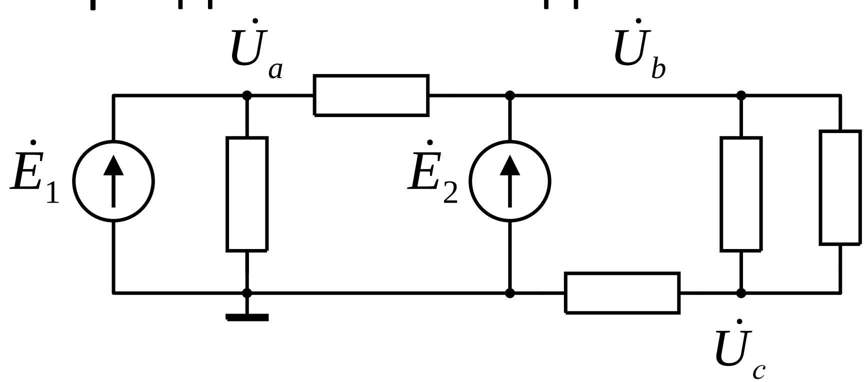
Замечания:

1. Уравнение для узловых потенциалов записаны в предположении, что схема содержит только источники тока. Если имеются источники напряжения, то их надо предварительно заменить эквивалентными источниками тока:

$$\dot{I}_{\text{г}} = \dot{E} y_{\text{г}}$$

2. При наличии ветвей с идеальными ЭДС ($y_{\text{г}}$ $=\infty$) удобно базисный узел выбрать так, чтобы эти ветви к нему непосредственно примыкали, тогда противоположные узлы этих ветвей будут иметь уже известные узловые потенциалы, т.е. число неизвестных уменьшается.

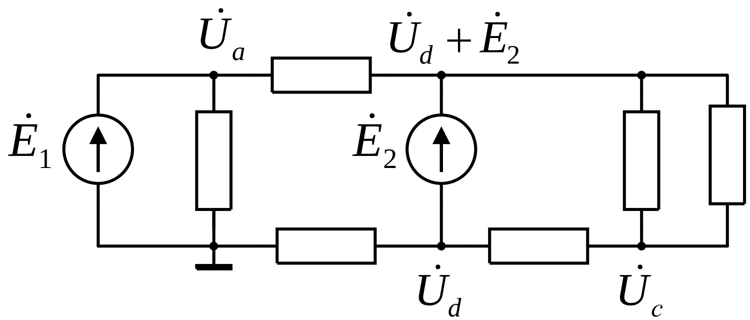
Пример: здесь только один неизвестный потенциал $\dot{U}_C$



$$\dot{U}_a = \dot{E}_1$$

$$\dot{U}_b = \dot{E}_2$$

3. Если не удается «заземлить» все ветви с идеальными ЭДС, т.е. остаются ветви с ЭДС, не примыкающие к базисному узлу, то к системе уравнений для неизвестных потенциалов следует добавить дополнительные уравнения, связывающие разности потенциалов узлов с известными ЭДС.



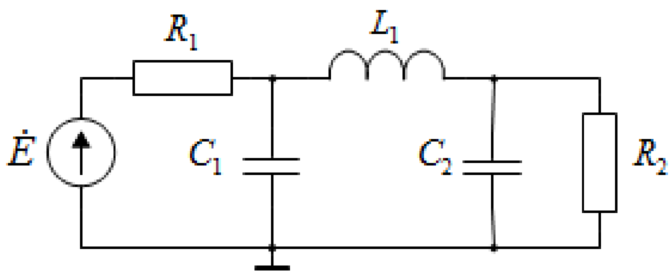
$$\dot{U}_a=\dot{E}_1$$

$$\dot{U}_b=\dot{U}_d+\dot{E}_2$$

Уравнения получаются из 1-го закона Кирхгофа для токов, которые выражены через потенциалы узлов с учетом 2-го закона.

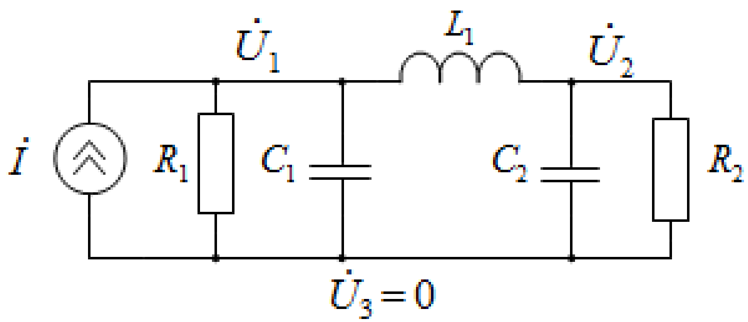
Если схема содержит q узлов и n независимых контуров, то при $n<q-1$ удобнее метод контурных токов, а при $n>q-1$ — метод узловых потенциалов.

Пример (ФНЧ на *LC*):



Три независимых контура и q–1=2 независимых узла, т.е. удобнее метод узловых потенциалов.

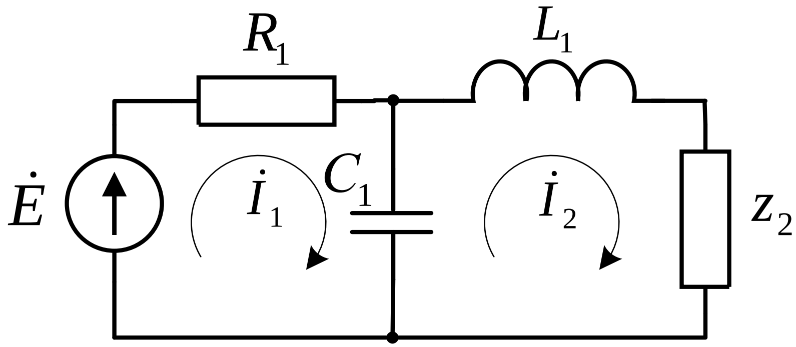
$\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{R_1}$ - заменяем источник $\dot{E}$



$$\left.\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{E}}{R_1} = y_{11}\dot{U}_1 + y_{12}\dot{U}_2 \\ 0 &= y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned}\right\}$$

$$y_{11} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}, \qquad y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{j\omega L_1}, \qquad y_{22} = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_1}.$$

Другое решение: Параллельные ветви R_2, C_2 не содержат ЭДС и их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением z_2



$$z_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

Число независимых контуров сокращается до двух и по методу контурных токов получится система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E} &= z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \\ 0 &= z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 \end{aligned}\right\}$$

$$z_{11} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}, \qquad z_{12} = z_{21} = -\frac{1}{j\omega C_1}, \qquad z_{22} = z_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}.$$