2.3. Комплексные сопротивления и проводимости.

Комплексное сопротивление цепи (импеданс):

$$z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = r + jx$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{U} = z\dot{I}$$

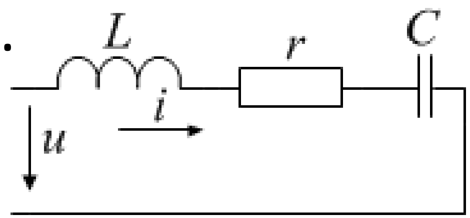
$$z = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \qquad |z| = \left|\frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}}\right| = \frac{U_m}{I_m}\left|e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}\right| = \frac{U_m}{I_m}$$

Модуль z равен отношению амплитуд напряжения и тока, а аргумент z — разности фаз напряжения и тока.

Комплексная проводимость цепи (адмитанс):

$$y = \frac{1}{z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = g + jb$$

Примеры:

1. 

$$z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

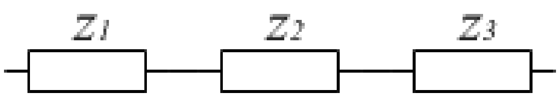
Активное сопротивление r

Реактивное сопротивление $x = \omega L - \dfrac{1}{\omega C} = x_L + x_C$

Индуктивное сопротивление $x_L = \varpi L > 0$

Емкостное сопротивление $x_C = -\dfrac{1}{\omega C} < 0$

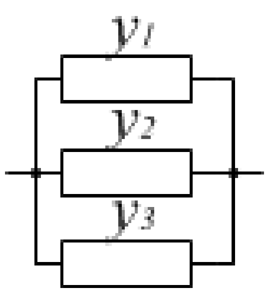
2. Последовательное соединение элементов



$$\dot{U} = z_1\dot{I} + z_2\dot{I} + z_3\dot{I} = (z_1 + z_2 + z_3)\dot{I}$$

$$z = \sum_{(k)} z_k \qquad R = \sum_{(k)} R_k, \quad L = \sum_{(k)} L_k, \quad \frac{1}{C} = \sum_{(k)} \frac{1}{C_k}$$

3. Параллельное соединение элементов

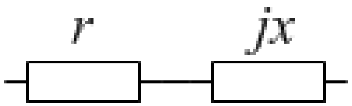


$$\dot{I} = y_1\dot{U} + y_2\dot{U} + y_3\dot{U} = (y_1 + y_2 + y_3)\dot{U}, \text{ т.е. } \quad y = \sum_{(k)} y_k$$

$$g = \sum_{(k)} g_k, \quad C = \sum_{(k)} C_k, \quad \frac{1}{R} = \sum_{(k)} \frac{1}{R_k}, \quad \frac{1}{L} = \sum_{(k)} \frac{1}{L_k}$$

$$jb_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L};\; jb_C = j\omega C$$, т. е. $$b_L < 0,\; b_C > 0$$

4. Пересчет последовательных схем в параллельные и обратно:

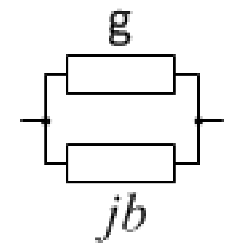


$$z = r + jx$$

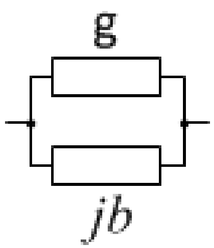
$$y = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = g + jb$$

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2}$$

$$b = -\frac{x}{r^2 + x^2}$$



Обратная задача:

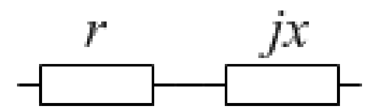


$$y = g + jb$$

$$z = \frac{1}{g + jb} = \frac{g - jb}{g^2 + b^2}$$

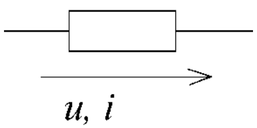
$$r = \frac{g}{g^2 + b^2}$$

$$x = -\frac{b}{g^2 + b^2}$$



Реактивные части z и y одной и той же цепи всегда имеют разные знаки, а у активных частей знаки всегда одинаковые (положительные, если цепь пассивна)

2.4. Мощность в цепи гармонического тока



$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Мгновенная мощность:

$$p = ui = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

Используем: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

Средняя мощность (активная мощность):

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos\varphi = U_\partial I_\partial \cos\varphi \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i \qquad [P] = Bm$$

В пассивных двухполюсниках всегда $\boldsymbol{P \geq 0}$, в активных же может быть $\boldsymbol{P < 0}$ (мощность не поглощается, а отдается во внешнюю цепь)

Для пассивной цепи: $\dot{U} = z\dot{I},\ U_\partial = |z| I_\partial,\ P = I_\partial^2 |z| \cos\varphi = rI_\partial^2$

Аналогично:

$$r = \operatorname{Re} z = |z| \cos\varphi$$

$$\dot{I} = y\dot{U}, \quad I_\partial = |y| U_\partial, \quad P = U_\partial^2 |y| \cos\varphi = gU_\partial^2$$

r и $g > 0$ —> $\cos\varphi \geq 0$ —> $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$

Для сопротивления: $\varphi_u - \varphi_i = 0$ —> $\cos\varphi = 1$ —> $P = U_\partial I_\partial$

Для индуктивности: $\varphi_u - \varphi_i = \dfrac{\pi}{2}$ —> $\cos\varphi = 0$ —> $P = 0$

Для емкости: $\varphi_u - \varphi_i = -\dfrac{\pi}{2}$ —> $\cos\varphi = 0$ —> $P = 0$

$\cos\varphi$ - коэффициент мощности

Чем больше $\cos\varphi$, тем лучше используется оборудование.

<u>Полная</u> (кажущаяся) мощность: $S = U_\partial I_\partial$ $[S] =$ ВА (вольтампер)

<u>Реактивная</u> мощность: $Q = U_\partial I_\partial \cdot \sin\varphi$ $[Q] =$ ВАР (вольтампер реактивный)

Передача энергии определяется только величиной $\boldsymbol{P}$. Смысл $\boldsymbol{S}$ в том, что для питания нагрузки кроме мощности надо знать, какие напряжение и ток должен обеспечить генератор.

Смысл Q $$Q = I_\partial^2 |z| \sin\phi = I_\partial^2 x = -U_\partial^2 b \quad \text{т.к.}$$

$$\sin\phi = x/|z| = -b/|y|.$$

$$\text{Для } L: \qquad Q_L = \omega L I_\partial^2 = \omega \frac{L I_m^2}{2} = \omega W_L > 0;$$

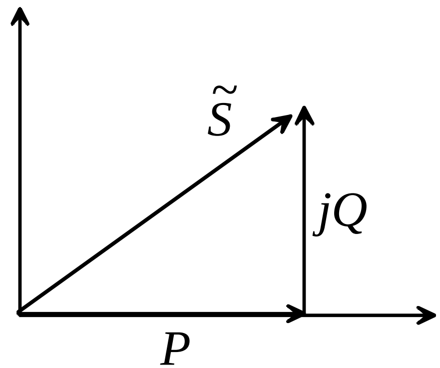
$$\text{для } C: \qquad Q_C = -\omega C U_\partial^2 = -\omega \frac{C U_m^2}{2} = -\omega W_C < 0.$$

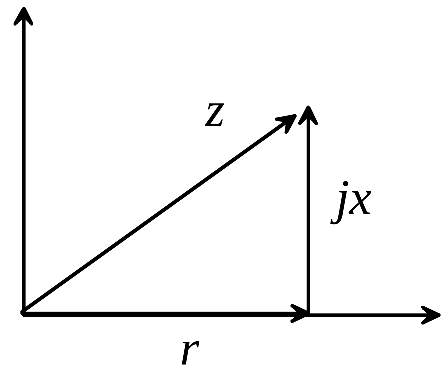
Для реактивных элементов Q пропорциональна максимальной энергии, запасаемой реактивным элементом. Если цепь содержит L и C, то $Q = Q_L + Q_C = \varpi(W_L - W_C)$

то есть Q пропорциональна разности энергий магнитного и электрического полей. Возможна полная их компенсация, и тогда Q=0, при этом $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{C}$ обмениваются энергией друг с другом. Если же нет компенсации, то происходит частичный обмен энергией между реактивными элементами и внешней цепью, что увеличивает $\boldsymbol{S=U_\partial I_\partial}$ по сравнению с $\boldsymbol{P}$.

Комплексная мощность $\tilde{S} = \dot{U}_{\partial}\dot{I}^{*}_{\partial} = \frac{1}{2}\dot{U}_{m}\dot{I}^{*}_{m} = U_{\partial}I_{\partial}e^{j\varphi} = P + jQ$

$$S = |\tilde{S}| = |\dot{U}_{\partial}\dot{I}^{*}_{\partial}|, \quad P = \mathrm{Re}\,\tilde{S} = \mathrm{Re}(\dot{U}_{\partial}\dot{I}^{*}_{\partial}), \quad Q = \mathrm{Im}\,\tilde{S} = \mathrm{Im}(\dot{U}_{\partial}\dot{I}^{*}_{\partial})$$





2.5. Уравнение баланса мощности

Уравнение баланса комплексной мощности: сумма комплексных мощностей, потребляемая всеми ветвями цепи, равна нулю:

$\sum\limits_{(n)} \dot{U}_{n}\dot{I}^{*}_{n} = 0,$ где n - номер ветви, $\dot{U}_{n}$ — напряжение на этой ветви,

$\dot{I}^{*}_{n}$ - ток этой ветви (комплексно сопряженный).

$\tilde{S} = P + jQ$ $\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{(n)} P_{n} = 0, \\ \sum\limits_{(n)} Q_{n} = 0, \end{array} \right.$

$\sum\limits_{(n)} P_{n} = 0,$ — уравнение баланса активной мощности

$\sum\limits_{(n)} Q_{n} = 0,$ — уравнение баланса реактивной мощности

Первое уравнение выражает закон сохранения энергии: средняя мощность, вырабатываемая всеми источниками (для них $P<0$), равна средней мощности, потребляемой остальными элементами (для них $P>0$). Второе уравнение не имеет столь наглядной энергетической трактовки.

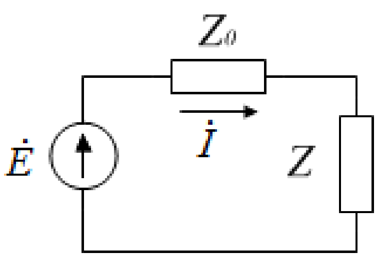
Справедливо также: $\sum\limits_{(n)} \dot{U}_n \dot{I}_n = 0$ (без комплексного сопряжения)

Баланс мгновенной мощности $\sum\limits_{(n)} u_n(t) \cdot i_n(t) = 0$

- колебания здесь не обязательно гармонические, а цепь не обязательно линейная — лишь бы выполнялись законы Кирхгофа.

Уравнения баланса мощности часто используют для контроля правильности найденного решения (расчета).

2.6. Условие передачи максимальной мощности от генератора в нагрузку



$z_0 = r_0 + jx_0$ - внутреннее сопротивление генератора

$z = r + jx$ - сопротивление нагрузки

Требуется определить z, при которой активная мощность максимальна

$P - \max$

$z - ?$

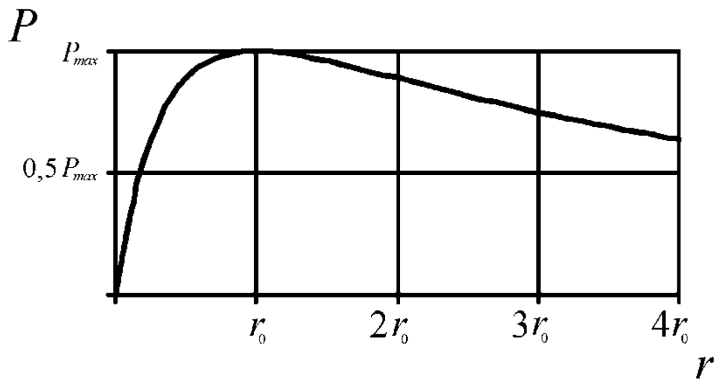
$$P = |\dot{I}_\partial|^2 r, \text{ где } \dot{I}_\partial = \frac{\dot{E}_\partial}{z + z_0} \quad \text{—>} \quad P = \frac{|\dot{E}_\partial|^2 r}{|z + z_0|^2} = \frac{E_\partial^2 r}{(r + r_0)^2 + (x + x_0)^2}$$

$$x = -x_0 \quad \text{—>} \quad P = \frac{E_\partial^2 r}{(r + r_0)^2} \quad \text{—>} \quad \frac{dP}{dr} = E_\partial^2 \frac{(r + r_0)^2 - r \cdot 2(r + r_0)}{(r + r_0)^4} = 0$$

$$r = r_0 \qquad r^2 + 2r \cdot r_0 + r_0^2 - 2r^2 - 2r \cdot r_0 = 0 \quad \text{—>} \quad r_0^2 - r^2 = 0$$

$z = z_0^*$ — условие согласования генератора и нагрузки

$P_{\max} = \dfrac{E_\partial^2}{4r_0}$ — макс. мощность в нагрузке



$$P_{0\ \max} = \frac{E_{\partial}^2}{4r_0}$$ мощность в сопротивлении генератора

$КПД = 50\,\%$ - в режиме согласования

В электроэнергетике ставится задача получить заданную полезную мощность при минимальных затратах, для этого делают $r_0 << r$

В радиотехнике ставится задача - при имеющихся энергетических возможностях передать максимум полезной мощности в нагрузку.

Для многих реальных источников сопротивление z_0 не обязательно связано с реальными потерями мощности, оно есть лишь отношение $\dot{U}_{xx} / \dot{I}_{кз}$ (напряжения холостого хода к току короткого замыкания), не более того, и вместе с $\dot{E}$ служит для эквивалентного представления источника.

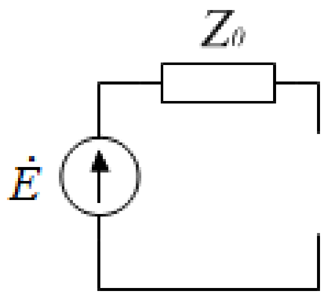


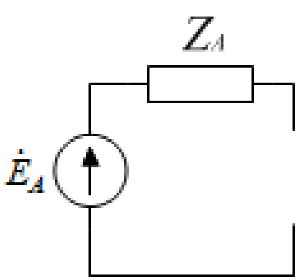
Схема эквивалентна источнику лишь в том смысле, что она позволяет правильно рассчитывать процессы во внешней цепи. Однако она не обязательно правильно отображает процессы в самом генераторе.

В электроэнергетике схема правильно отражает внутренние процессы в генераторе переменного тока.

$\dot{E}$ - ЭДС электромагнитной индукции,

$z_0 = r_0$ - омическое сопротивление обмотки, в которой затрачивается бесполезная мощность, превращающаяся в тепло.

В приемной антенне простая схема не соответствует эксперименту:

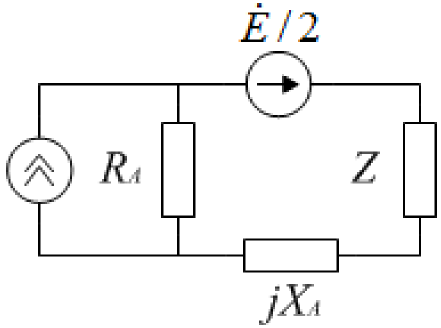


$\dot{E}_A$- ЭДС, наведенная в антенне падающей на нее волной

Z_A- входное сопротивление антенны в режиме передачи отражает излучение в пространство. В согласов. режиме половина мощности переизлучится в пространство, что не соответствует эксперименту.

Для устранения противоречия возможна другая схема:

$\dot{I}_Г = \dfrac{\dot{E}}{2R_A}$



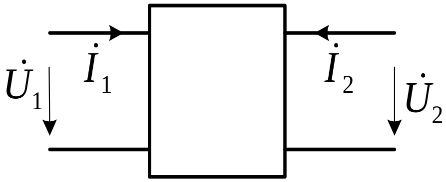
$\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{R_A + jX_A + z}$ - ток во внешней цепи такой же

Если $z = Z_A^*$ (антенна согласована с нагрузкой), токи через R_A от источника тока и ЭДС компенсируют друг друга. Мощность, расходуемая в R_A, равна нулю, соответственно, ***КПД=1***.

При рассогласовании мощность в R_A появляется и *КПД<1* за счет того, что антенна переизлучает часть мощности обратно в пространство.

В большинстве радиотехнических устройств стремятся по возможности обеспечить передачу максимальной мощности от генератора, т.е. осуществить режим согласования.

2.7. Комплексный коэффициент передачи.



$\dot{F}_2$ -реакция (ток или напряжение) цепи на внешнее воздействие $\dot{F}_1$ (ток или напряжение).

$\dot{K}(j\omega) = \dfrac{\dot{F}_2}{\dot{F}_1}$ - комплексный коэффициент передачи, (передаточная функция или передаточная характеристика).

$\dot{K}(j\omega)$ - может быть безразмерным, может иметь размерность сопротивления или проводимости

Зависимость $\left|\dot{K}(j\omega)\right|$ от частоты - <u>Амплитудно-частотная</u> характеристика (АЧХ) цепи.

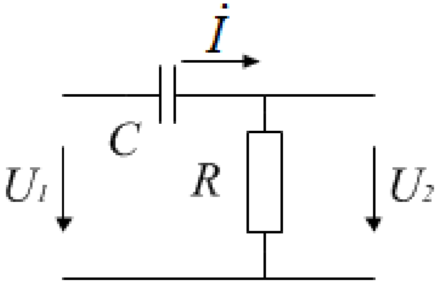
Полоса пропускаемых частот — область частот, в которой $\left|\dot{K}(j\omega)\right|$ снижается не более чем в $\boldsymbol{M}$ раз относительно максимального значения.

$M = \sqrt{2}$ - соответствует снижению мощности в два раза.

Зависимость $\arg \dot{K}(j\omega)$ от частоты - <u>Фазо-частотная</u> характеристика (ФЧХ) цепи.

Примеры расчета простейших цепей:

а) Дифференцирующая цепь



$$\dot U_1 = \dot I\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right), \quad \dot U_2 = \dot I R = \dot U_1 \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \dot U_1 \frac{j\omega RC}{1 + j\omega CR}$$

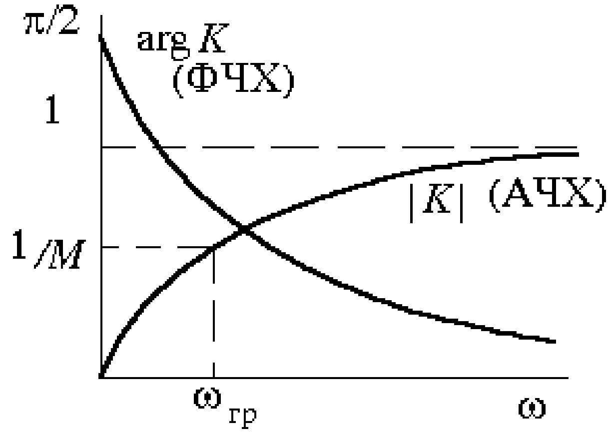
$$K(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega CR}$$ -передаточная функция

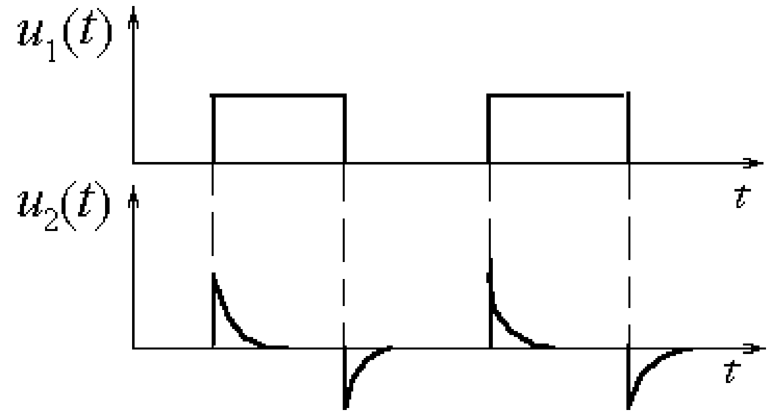
АЧХ: $$\left|K(j\omega)\right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Выделим вещественную и мнимую части:

$$K(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega CR} = \frac{j\omega RC \cdot (1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2} = \frac{(\omega CR)^2 + j\omega RC}{1 + (\omega CR)^2}$$

ФЧХ: $$\arg \dot K(j\omega) = arctg \frac{1}{\omega RC}$$





Цепь одинаково хорошо пропускает высокие частоты, но ослабляет низкие, а постоянную составляющую напряжения ($\omega=0$) совсем не пропускает - простейший фильтр верхних частот (ФВЧ).

$$\left|\dot{K}(j\omega)\right|_{\max} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\omega_{ГР}RC}{\sqrt{1+(\omega_{ГР}RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \longrightarrow$$

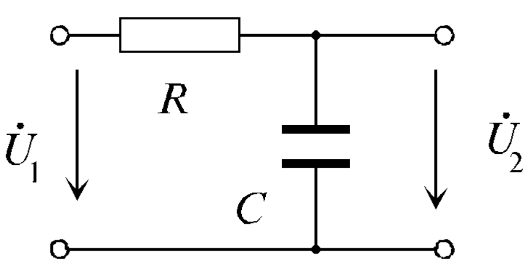
$$2\left(\omega_{ГР}RC\right)^2 = 1 + (\omega_{ГР}RC)^2 \quad \longrightarrow \quad \varpi_{ГР} = \frac{1}{RC}$$

При ω < $\omega_{гр}$ имеем $K(j\omega)\approx j\omega RC$. Умножению КА на $j\omega$ соответствует дифференцирование во времени самого колебания. Поэтому на частотах ω < $\omega_{гр}$ данная цепь работает как <u>дифференцирующая цепь</u>:

$$u_2(t) \approx RC\,\frac{du_1}{dt}$$

Дифференцирование осуществляется тем точнее, чем меньше ω по сравнению с $\omega_{гр}$, сигнал при этом сильно ослабляется.

б) Интегрирующая цепь:



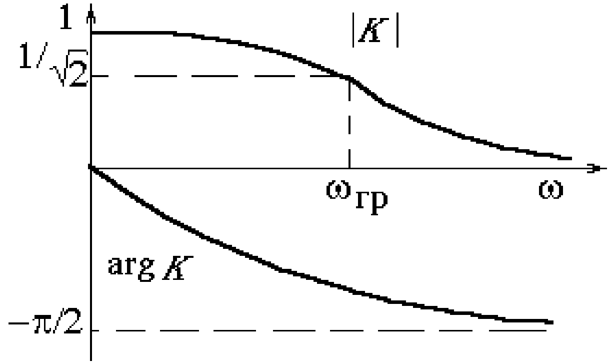
$$\dot U_2 = \frac{\dot I}{j\omega C} = \dot U_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}, \text{ откуда } K(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

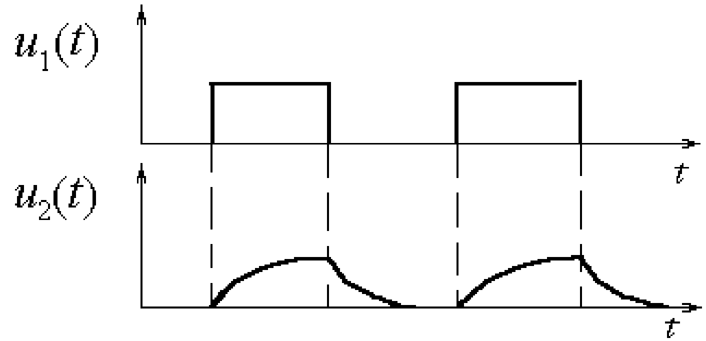
АЧХ: $|\dot K(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$

АЧХ при малых ω находится на уровне около 1, а далее уменьшается как $1/\omega$

ФЧХ: $\arg \dot K(j\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega RC)$

ФЧХ начинается от 0 и стремится к $-\pi/2$.





Граничная частота $\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega_{ГР}RC)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ —> $\omega_{ГР} = \dfrac{1}{RC}$

Простейший фильтр нижних частот (ФНЧ)

$0 < \varpi < \varpi_{ГР}$ - сигнал почти не искажается.

$\varpi > \varpi_{ГР}$ —> $\dot{K}(j\omega) \approx \dfrac{1}{j\omega RC}$ —> деление на $j\omega$ означает интегрирование колебания во времени (<u>интегрирующая цепь</u>):

$$u_2(t) \approx \frac{1}{RC}\int u_1(t)dt$$

Интегрирование эта цепь выполняет приближенно, оно тем точнее, чем дальше ω от $\omega_{гр}$, но при этом цепь вносит значительное ослабление сигнала.