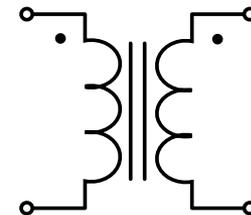


4. Индуктивно связанные элементы. Магнитное поле в каждом элементе создается не только током самого этого элемента, но и током другого элемента.



$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12}$ -потокосцепление 1 -го элемента

$\psi_{11} = L i_1$ -потокосцепление самоиндукции первого элемента

$\psi_{12} = M_{12} i_2$ -потокосцепление первого элемента, обусловленное током во втором элементе.

$\psi_2 = \psi_{22} + \psi_{21}$ -потокосцепление 2 -го элемента

$\psi_{22} = L_2 i_2$ -потокосцепление самоиндукции второго элемента

$\psi_{21} = M_{21} i_1$ -потокосцепление второго элемента, обусловленное током в первом элементе.

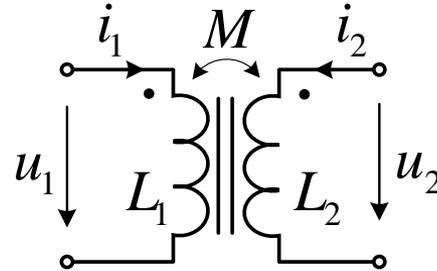
$M_{12} = M_{21} = M$ -коэффициент взаимной индукции (взаимная индуктивность)

Знак M зависит от направлений отсчета токов i_1 и i_2

Связь между токами и напряжениями

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$



Знак M зависит от направлений отсчета токов

Пусть в начальный момент времени токи равны нулю, а в момент времени t равны i_1 , i_2 и создают магнитное поле.

$W = \int_0^t (u_1 i_1 + u_2 i_2) dt = \dots$ - энергия, которую необходимо затратить

$$\dots = L_1 \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_1 di_1 + L_2 \int_{i_2(0)}^{i_2(t)} i_2 di_2 + M \left(\int_{i_2(0)}^{i_2(t)} i_1 di_2 + \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_2 di_1 \right) =$$

$$= \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M \left(i_1 \cdot i_2 - \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_2 di_1 + \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_2 di_1 \right) = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 \cdot i_2$$

Токи i_1 и i_2 зависят друг от друга через магнитную связь, а значит

$$\int_{i_1(0)}^{i_1(t)} i_2 di_1 \neq i_2 \int_{i_1(0)}^{i_1(t)} di_1$$

Выносить ток из под знака интеграла - нельзя

Итак, затраченная энергия:

$$W = \int_0^t (u_1 i_1 + u_2 i_2) dt = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2$$

Обозначим $x = \frac{i_1}{i_2}$

Тогда неравенство $W \geq 0$ соответствует $L_1 x^2 + 2Mx + L_2 \geq 0$

Дискриминант квадратичного полинома не положителен:

$$M^2 - L_1 L_2 \leq 0 \quad M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{и} \quad |M| \leq \frac{(L_1 + L_2)}{2}$$

$k_m = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ - коэффициент магнитной связи

связь отсутствует $k_m = 0$, связь максимальна $k_m = 1$

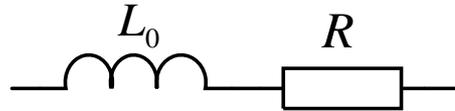
1.4. Реальные пассивные элементы цепей и их схемы замещения

Схема замещения - схема из идеальных элементов, используемая для описания свойств реального элемента.

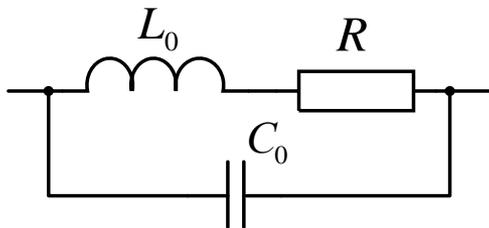
1. Резистор Основной параметр R - сопротивление

На высоких частотах:

а) Протекающий ток создает также и магнитное поле, хотя и небольшое, изменение которого вызывает появление ЭДС индукции

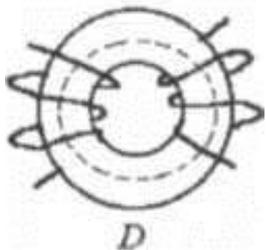


б) Токи смещения между выводами резистора, так как между ними существует переменное электрическое поле



L_0 и C_0 - паразитные параметры

2. Катушка индуктивности. Основной параметр L - индуктивность



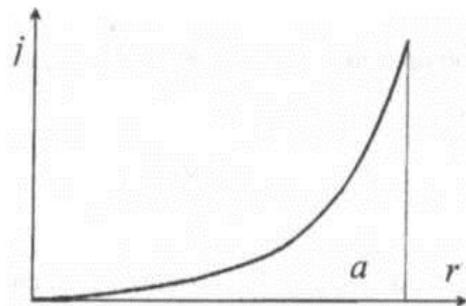
μ - относительная магнитная проницаемость среды внутри тороида

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

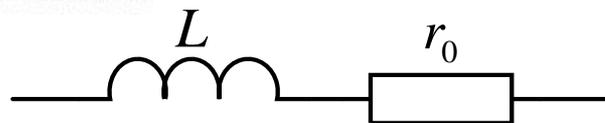
S - площадь поперечного сечения кольца

l - средняя длина силовой линии

$$L = \frac{\mu\mu_0 SN^2}{l}$$

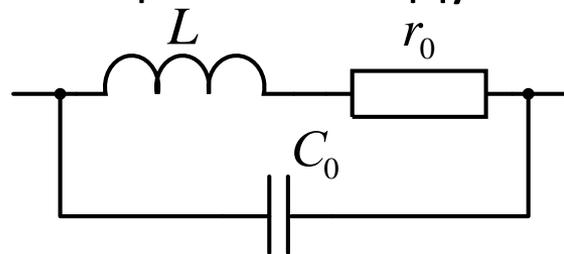


Поверхностный эффект (скин-эффект): плотность тока на высоких частотах максимальна вблизи поверхности и минимальна на оси провода: $j|_{r=a} \sim \sqrt{f}$



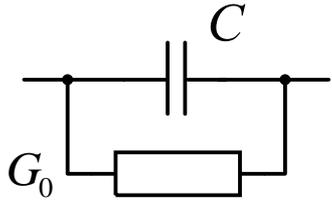
- схема замещения

На высоких частотах заметны токи смещения между витками катушки



r_0 и C_0 - паразитные параметры

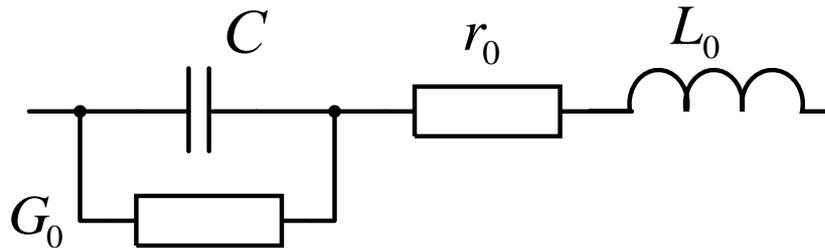
3. Конденсатор. Основной параметр C - емкость



G_0 - проводимость утечки, учитывает потери энергии в диэлектрике.
Существенно зависит от частоты.

r_0 - потери в обкладках конденсатора

L_0 - индуктивности обкладок конденсатора

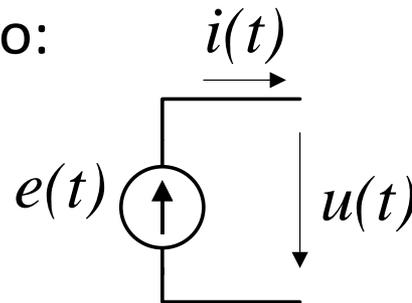


Рассмотренные схемы замещения обеспечивают описание реальных элементов всегда с некоторым приближением. Усложняя схему, можно добиться более точного описания, но при этом усложняется анализ цепи.

1.5 Источники тока и напряжения

1. Идеальный источник напряжения (ЭДС) или генератор ЭДС - двухполюсный активный элемент, напряжение на котором не зависит от тока, протекающего через него:

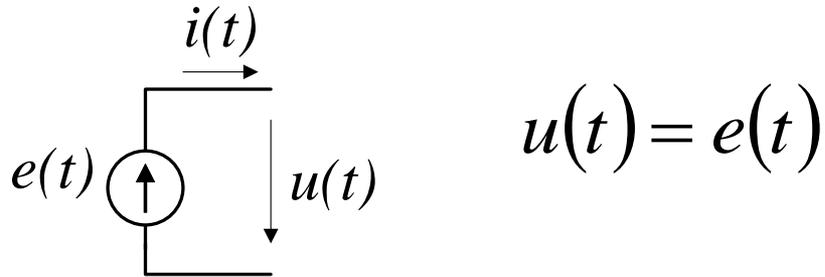
$$u(t)|_{i \neq 0} = u_{xx}(t)|_{i=0}$$



Внутри источника под действием сторонних сил положительные заряды движутся от «-» к «+», а отрицательные — в обратном направлении.

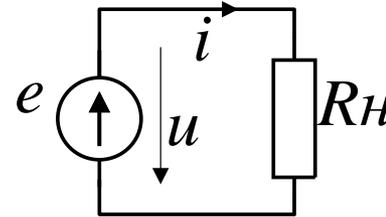
Электродвижущая сила (ЭДС) - величина, численно равная работе, совершаемой сторонними силами по переносу единичного положительного заряда внутри источника. Направлена от «-» к «+». Во внешней цепи ток направлен от «+» к «-», работа по перемещению единичного положительного заряда между зажимами равна напряжению, которое отсчитывается от «+» к «-».

Энергия, полученная цепью, равна работе сторонних сил.

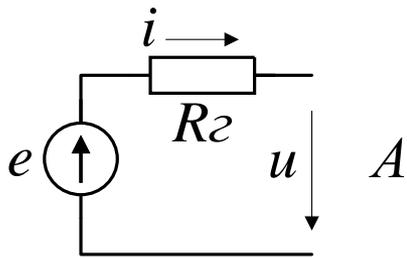


Идеальный источник напряжения может развивать бесконечную мощность, поскольку величина тока не ограничена.

$$p = ui = \frac{u^2}{R_n} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad R_n \rightarrow 0$$

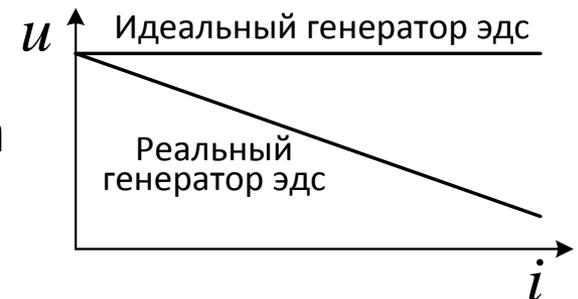


Реальный источник:



R_2 - «внутреннее»
сопротивление генератора

$$u = e - R_2 i$$



Мощность конечна при любой нагрузке. Схема замещения справедлива для любой внешней цепи.

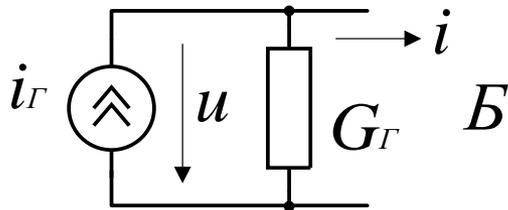
2. Идеальный источник тока, или генератор тока, — активный двухполюсный элемент, ток через который не зависит от напряжения на его зажимах.

$$i_{\Gamma}(t)|_{u \neq 0} = i_{\text{кз}}(t)|_{u=0} \text{ ток короткого замыкания}$$

Идеальный генератор тока способен развивать бесконечную мощность

$$p = ui = R_H i^2 \rightarrow \infty \text{ при } R_H \rightarrow \infty$$

Реальный источник тока

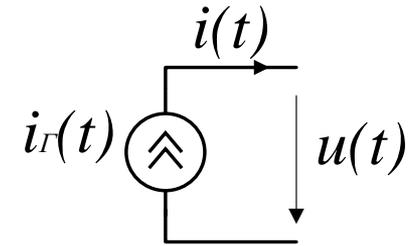
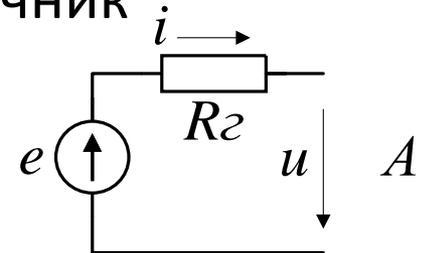


$$i = -G_{\Gamma} u + i_{\Gamma}$$

$$u = \frac{i_{\Gamma}}{G_{\Gamma}} - \frac{i}{G_{\Gamma}}$$

Реальный источник напряжения

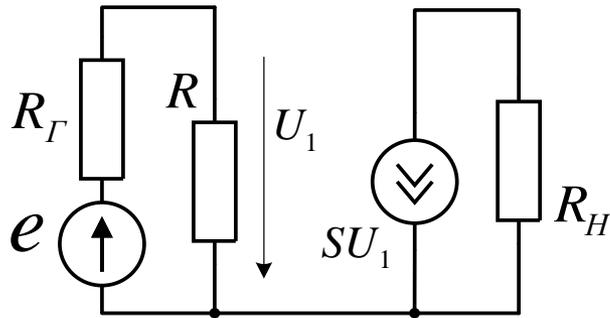
$$u = e - R_2 i$$



Преобразование источников тока и напряжения: обе схемы А и Б эквивалентны по отношению к внешней цепи, если выполняется условие

$$G_{\Gamma} = \frac{1}{R_2} \quad i_{\Gamma} = \frac{e}{R_2}$$

3. Зависимые (неавтономные) источники тока и напряжения

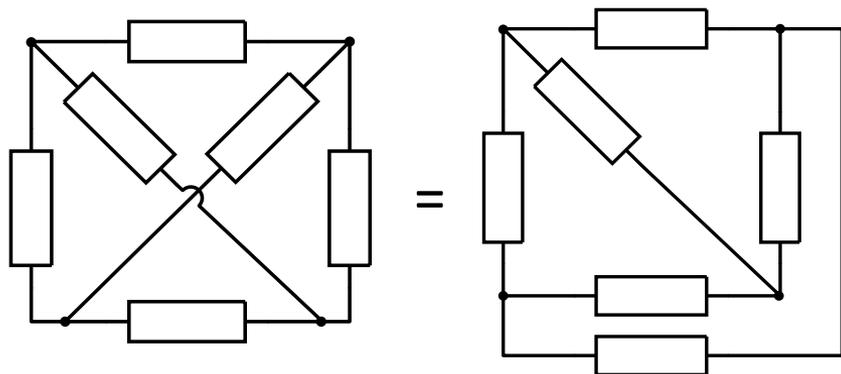


ЭДС (или ток) зависимого источника может быть пропорциональна току или напряжению в каком-то другом участке цепи, т.е. управляться величиной этого тока (напряжения).

1.6 Структура схемы электрической цепи.

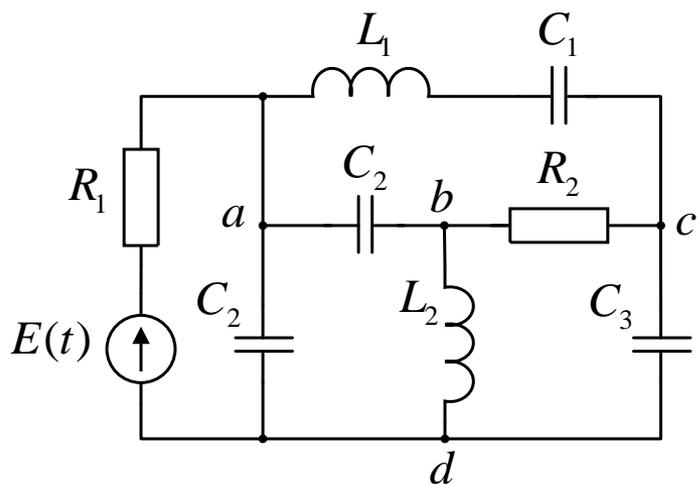
Цепи с сосредоточенными параметрами - протяженность каждого элемента в пространстве не имеет никакого значения для решаемой задачи (не входят в выражения для напряжений и токов ввиду квазистационарности полей).

При последовательном соединении через все элементы течет одинаковый ток, при параллельном — все элементы находятся под одинаковым напряжением.



Планарная цепь - провода нигде не перекрещиваются.
 Непланарная цепь - провода перекрещиваются.

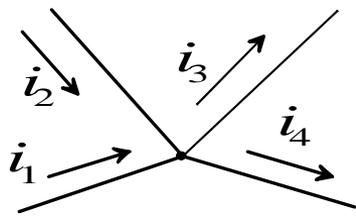
Узел — точка, где соединяются провода от трех и большего числа элементов, Ветвь — путь между двумя смежными узлами, проходящий через один или несколько последовательно соединенных элементов, Контур — любой замкнутый путь, проходящий по ветвям (не более одного раза по каждой).



Пример: 4 узла (a, b, c, d), и 7 ветвей
 Общий случай: p ветвей и q узлов
 Число контуров $s = p - q + 1$.

1.7 Законы Кирхгофа

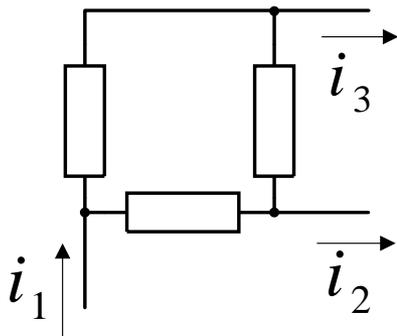
Первый закон Кирхгофа (вытекает из равенства нулю полного тока через замкнутую поверхность, окружающую узел): алгебраическая сумма токов, входящих в любой узел, равна нулю: $\sum_{(m)} i_m = 0$, i_m - ток m -ой ветви.



$$i_3 + i_4 - i_1 - i_2 = 0$$

Вытекающим токам удобнее присваивать знак «минус»

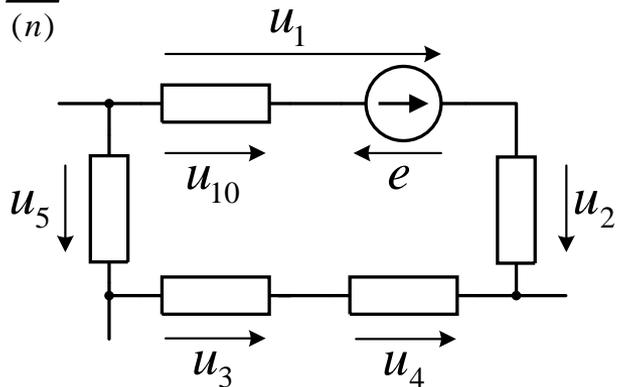
Обобщение: Для любой замкнутой поверхности, охватывающей любую часть схемы, алгебраическая сумма втекающих токов, равна нулю.



$$i_3 + i_2 - i_1 = 0$$

Второй закон Кирхгофа: в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех ветвях равна нулю:

$$\sum_{(n)} u_n = 0$$



Пример:

$$(u_{10} - e) + u_2 + (-u_4 - u_3) - u_5 = 0$$

$$(u_{10} - e) = u_1$$

Второй закон Кирхгофа вытекает из равенства нулю магнитного потока через контур, поскольку путь контура проходит только через внешние зажимы элементов, а магнитные поля считаются сосредоточенными внутри индуктивных элементов.

Кол-во независимых уравнений по 1-му закону Кирхгофа: $q-1$

По 2-му: $s=p-q+1$,

Итого: $(q-1)+p-q+1=p$

Для каждой ветви можем написать соотношение между током и напряжением, вытекающее из свойств элементов, содержащихся в этой ветви – это еще p – уравнений. Всего имеем $2p$ уравнений, Количество неизвестных тоже $2p$ (токи и напряжения ветвей).

Если в каких либо ветвях есть источники тока, то в этих ветвях значения токов равно токам источников. Количество уравнений по 2-му закону Кирхгофа сокращается на число источников тока.

Для полного описания процессов в цепи достаточно уравнений, которые получаются из законов Кирхгофа и из соотношений связи между током и напряжением для каждого элемента.

Для многополюсного элемента (транзистор, трансформатор) учитываются уравнения связи между токами и напряжениями на его зажимах, а для всех участков цепи должны выполняться законы Кирхгофа.