

5.7. Входное сопротивление отрезка длинной линии

$$Z(x) = \dot{U}(x) / \dot{I}(x)$$

$$Z(x) = \frac{\dot{U}_a \cos(\beta x) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta x)}{j(\dot{U}_a / W) \sin(\beta x) + \dot{I}_a \cos(\beta x)} = W \frac{Z_a \cos(\beta x) + jW \sin(\beta x)}{jZ_a \sin(\beta x) + W \cos(\beta x)}$$

$$Z(x) = W \frac{Z_a + jW \operatorname{tg}(\beta x)}{W + jZ_a \operatorname{tg}(\beta x)} \quad \text{или} \quad \bar{Z}_l = \frac{\bar{Z}_a + j \operatorname{tg}(\beta l)}{1 + j \bar{Z}_a \operatorname{tg}(\beta l)}$$

1. $l = n \cdot \lambda / 2$ (l равна или кратна $\lambda / 2$) $\rightarrow \beta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$
 $\operatorname{tg} \pi = 0 \rightarrow Z_l = Z_a$

2. $l \ll \lambda \rightarrow \operatorname{tg}(\beta l) \approx 2\pi l / \lambda$ (можно пренебречь) $\rightarrow Z_l = Z_a$
(короткая линия ведет себя как два идеальных проводника)

3. Длина отрезка кабеля соразмерна с длиной волны \rightarrow условия функционирования генератора меняются в зависимости от соотношения l / λ .

Частный случай $Z_a = W \rightarrow Z_l = W \frac{W + jW \operatorname{tg}(\beta x)}{W + jW \operatorname{tg}(\beta x)} = W \frac{1 + j \operatorname{tg}(\beta x)}{1 + j \operatorname{tg}(\beta x)} = W$

$Z_l = W$ не зависимо от длины линии.

В линии устанавливается режим согласования.

4. $l = \lambda/4 \rightarrow \beta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$

$$Z_l = W \frac{Z_a + jW \operatorname{tg}(\beta l)}{W + jZ_a \operatorname{tg}(\beta l)} = W \frac{Z_a + jW \operatorname{tg}(\pi/2)}{W + jZ_a \operatorname{tg}(\pi/2)} = W^2 / Z_a = W^2 Y_a$$

Входная проводимость $Y(x) = 1/Z(x)$

Четвертьволновая линия совершает операцию преобразования комплексного сопротивления в комплексную проводимость.

$\bar{Z} = Z/W$ - нормированное, или относительное (по отношению к волновому сопротивлению W) сопротивление.

$\bar{Y} = 1/\bar{Z} = WY$ - нормированная, или относительная (по отношению к $1/W$) проводимость.

Для четвертьволновой линии $\bar{Z}_l = \bar{Y}_a$

5.8. Коэффициент отражения

$Z_a \neq W \rightarrow$ В линии присутствуют бегущие волны встречных направлений.

$\Gamma(x) = \dot{U}_{omp}(x) / \dot{U}_{nad}(x)$ - коэффициент отражения по напряжению

$$x = 0 \rightarrow \Gamma(0) = \dot{U}_{omp}(0) / \dot{U}_{nad}(0)$$

$\dot{U}(x) = \dot{U}_{nad}(0)\exp(j\beta x) + \dot{U}_{omp}(0)\exp(-j\beta x)$ - КА напряжения

$$\Gamma(x) = \frac{\dot{U}_{omp}(0)\exp(-j\beta x)}{\dot{U}_{nad}(0)\exp(j\beta x)} = \Gamma(0)\exp(-j2\beta x) \rightarrow |\Gamma(x)| = |\Gamma(0)|$$

$\Gamma_i(x)$ - коэффициент отражения по току

$$\Gamma_i(x) = \dot{I}_{omp}(x) / \dot{I}_{nad}(x) = \Gamma_i(0)\exp(-j2\beta x)$$

$$\frac{I_{omp}}{I_{nad}} = -\frac{U_{omp}}{U_{nad}} = -\Gamma \rightarrow \Gamma(x) = -\Gamma_i(x)$$

Связь коэффициента отражения от конца линии (вычисленный в сечении нагрузки) с сопротивлением нагрузки Z_a ($x=0$)

$$\text{Используем: } \dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{над}}(0)\exp(j\beta x) + \dot{U}_{\text{отр}}(0)\exp(-j\beta x)$$
$$\dot{I}(x) = [\dot{U}_{\text{над}}(0)\exp(j\beta x) - \dot{U}_{\text{отр}}(0)\exp(-j\beta x)]/W$$

$$Z_a = \frac{\dot{U}_a}{\dot{I}_a} = W \frac{\dot{U}_{\text{над}}(0) + \dot{U}_{\text{отр}}(0)}{\dot{U}_{\text{над}}(0) - \dot{U}_{\text{отр}}(0)} = W \frac{1 + \Gamma(0)}{1 - \Gamma(0)}$$

$$\rightarrow \Gamma(0) = \frac{Z_a - W}{Z_a + W}$$

1. Режим бегущих волн

$$Z_a = W \rightarrow \Gamma(0) = 0$$

В линии, нагруженной на волновое сопротивление, отсутствует отраженная волна, и вся энергия, направляемая источником в длинную линию, потребляется нагрузкой.

2. Режим стоячих волн

2. Разомкнутая линия (х.х.) $Z_a \rightarrow \infty \rightarrow \Gamma(0) = \frac{Z_a - W}{Z_a + W} \rightarrow 1$

3. Короткозамкнутая линия (к.з.) $Z_a = 0 \rightarrow \Gamma(0) = \frac{Z_a - W}{Z_a + W} \rightarrow -1$

4. Линия, нагруженная на емкость $Z_a = jX_C$
или индуктивность $Z_a = jX_L$

$$\Gamma(0) = \frac{jX_C - W}{jX_C + W} \rightarrow |\Gamma(0)| = \frac{|jX_C - W|}{|jX_C + W|} = \frac{\sqrt{W^2 + X_C^2}}{\sqrt{W^2 + X_C^2}} = 1$$

Амплитуда отраженной волны в любом сечении длинной линии равна амплитуде падающей волны.

Входное сопротивление в сечении x линии

$$Z(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = W \frac{\dot{U}_{nad}(x) + \dot{U}_{omp}(x)}{\dot{U}_{nad}(x) - \dot{U}_{omp}(x)} = W \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}$$

Для любого сечения x :

$$\Gamma(x) = \frac{Z(x) - W}{Z(x) + W} \quad \Gamma_i(x) = \frac{Y(x) - 1/W}{Y(x) + 1/W}$$

Нормированное сопротивление и коэффициент отражения:

$$\Gamma(x) = \frac{\bar{Z}(x) - 1}{\bar{Z}(x) + 1} \quad \bar{Z}(x) = \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}$$

Нормированная (отнесенная к $1/W$) проводимость связана с коэффициентом отражения по току

$$\Gamma_i(x) = \frac{\bar{Y}(x) - 1}{\bar{Y}(x) + 1} \quad \bar{Y}(x) = \frac{1 + \Gamma_i(x)}{1 - \Gamma_i(x)}$$

$$\bar{Y}(x) = 1/\bar{Z}(x) = WY(x)$$

5.9. Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль линии

Картина распределения амплитуд тока и напряжения вдоль линии зависит от сопротивления нагрузки Z_a

$$\dot{U}(x)/\dot{U}_a = \cos(\beta x) + j(W/Z_a)\sin(\beta x)$$

$$\dot{I}(x)/\dot{I}_a = j(Z_a/W)\sin(\beta x) + \cos(\beta x)$$

$$\Gamma(x) = \Gamma(0)\exp(-j2\beta x) \quad \rightarrow$$

Вектор коэффициента отражения при переходе от сечения к сечению вращается на комплексной плоскости вокруг начала координат по ходу часовой стрелки.

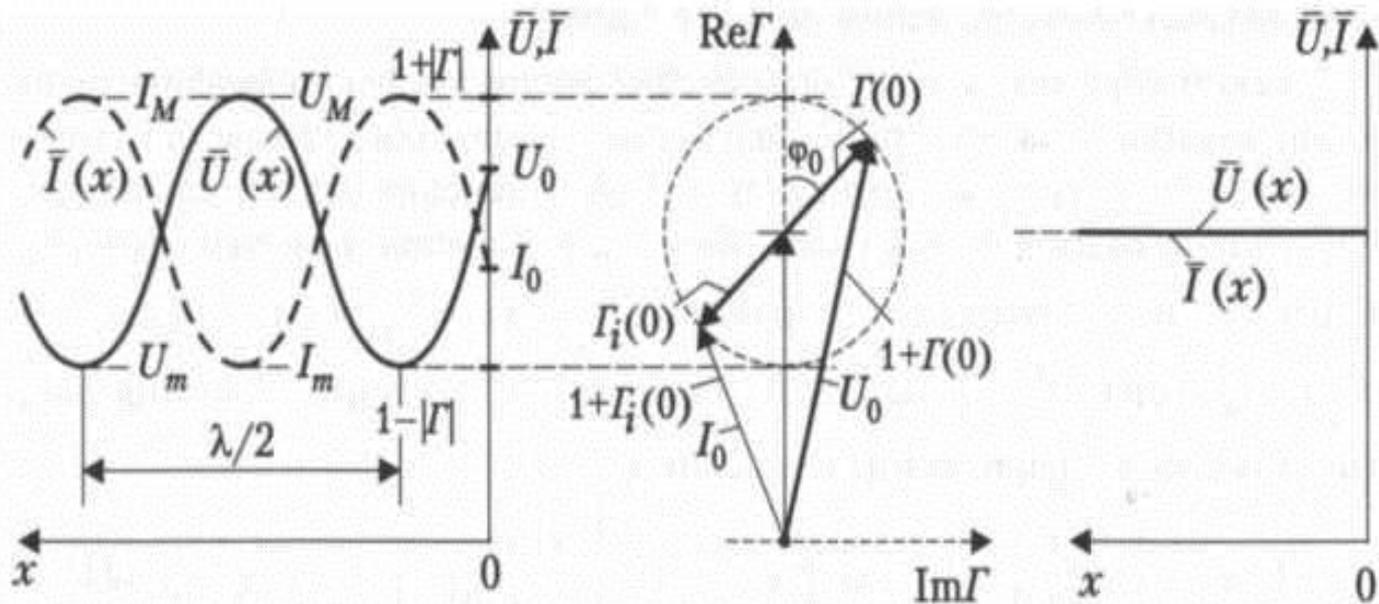
$$|\Gamma(x)| = |\Gamma(0)| \quad - \text{длина вектора при вращении не меняется}$$

Значение $\Gamma(0) = \frac{Z_a - W}{Z_a + W}$ определяется нагрузкой Z_a

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{na\partial}(x)(1 + \Gamma(x)) \quad \dot{I}(x) = \dot{I}_{na\partial}(x)(1 - \Gamma(x))$$

Относительные амплитуды тока и напряжения в сечении x :

$$\bar{U}(x) = \left| \frac{\dot{U}(x)}{\dot{U}_{na\partial}(x)} \right| = |1 + \Gamma(x)| \quad \bar{I}(x) = \left| \frac{\dot{I}(x)}{\dot{I}_{na\partial}(x)} \right| = |1 - \Gamma(x)|$$



Режим смешанных волн
 $Z_a \neq W$

Режим согласования
(бегущих волн) $Z_a = W$

5.10. Коэффициенты стоячей волны и бегущей волны

Коэффициент стоячей волны (KCB) есть отношение максимального значения функции распределения напряжения вдоль линии к минимальному значению той же функции.

$$KCB = U_{MAX} / U_{MIN} = I_{MAX} / I_{MIN}$$

$$\bar{U}(x) = \left| \frac{\dot{U}(x)}{\dot{U}_{nad}(x)} \right| = |1 + \Gamma(x)| \quad \rightarrow \quad KCB = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad \rightarrow \quad |\Gamma| = \frac{KCB - 1}{KCB + 1}$$

Коэффициент бегущей волны: $KBB = 1/KCB = U_{MIN} / U_{MAX} = I_{MIN} / I_{MAX}$

$$1 \leq KCB < \infty$$

$$0 \leq KBB \leq 1$$

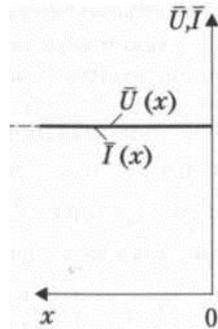
В режиме бегущей волны $KBB = KCB = 1$.

В сечениях линии, где напряжение максимально или минимально, сопротивление чисто активное (см. рис.)

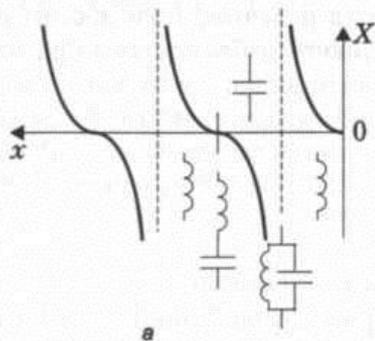
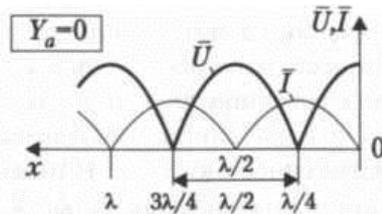
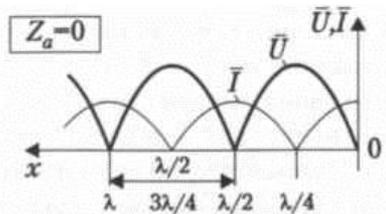
$$Z(x) = W \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{R}_{MAX} &= \frac{R_{MAX}}{W} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = KCB \\ \bar{R}_{MIN} &= \frac{R_{MIN}}{W} = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = KBB \end{aligned}$$

В других сечениях линии входное сопротивление принимает комплексные значения, причем: $R_{MIN} \leq |Z(x)| \leq R_{MAX}$

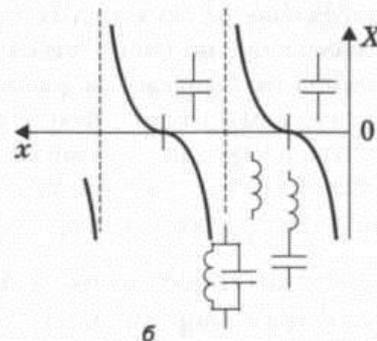
Режим бегущих волн:



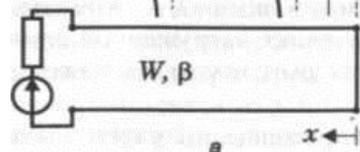
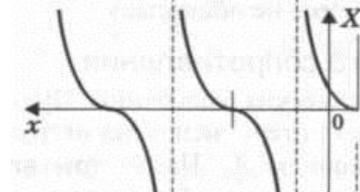
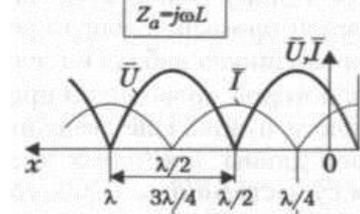
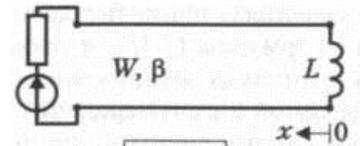
Режим стоячих волн:



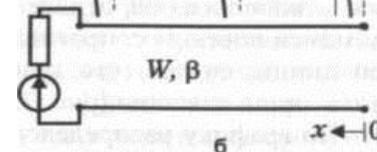
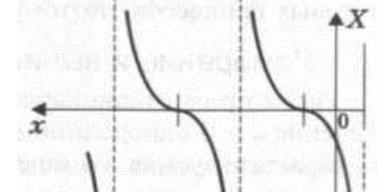
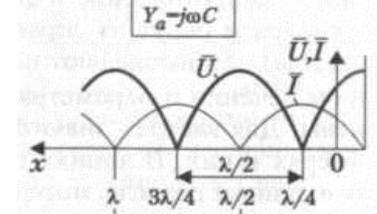
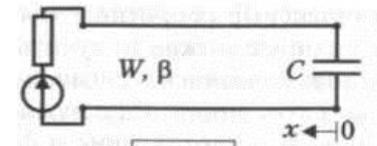
К.З.



Х.Х.



$$Z_l = j\omega L$$



$$Z_l = 1/j\omega C$$

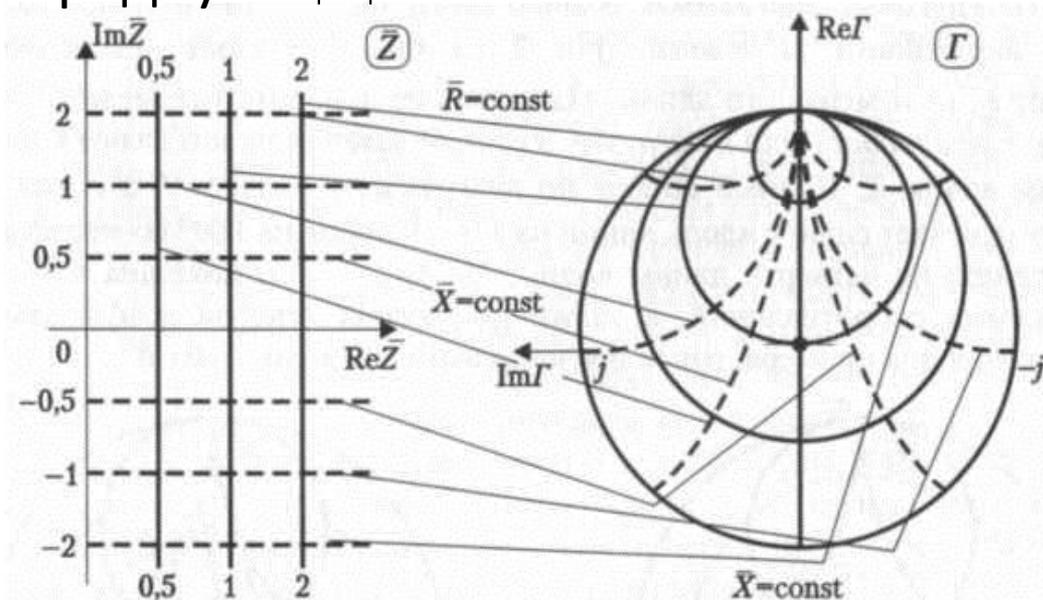
5.11. Круговые диаграммы сопротивлений и проводимостей

Согласно теории функций комплексной переменной, дробно-линейная функция

$$\Gamma = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1}$$

осуществляет конформное отображение прямоугольной сетки линий $\bar{R} = Const$ $\bar{X} = Const$ плоскости комплексной переменной $\bar{Z} = \bar{R} + j\bar{X}$ в окружности на плоскости комплексной переменной Γ .

При этом правая полуплоскость ($\bar{R} \geq 0$) отображается в круг единичного радиуса $|\Gamma| \leq 1$

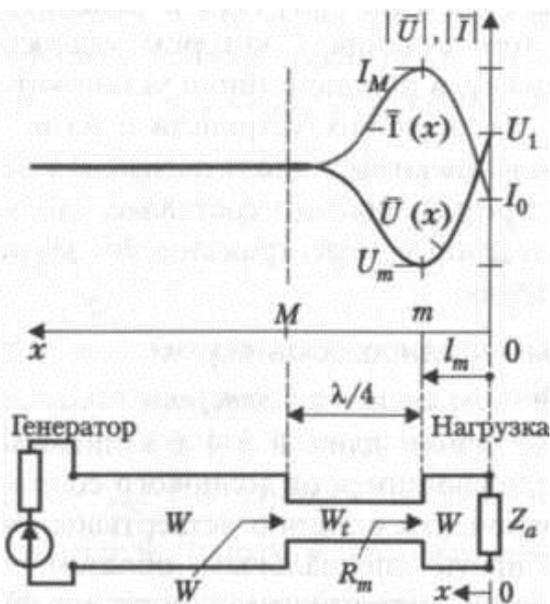


5.12. Согласование длинной линии с нагрузкой

Режим бегущей волны является наиболее практичным для осуществления передачи энергии от генератора к нагрузке, т.к. при этом обеспечиваются:

- 1) наименьшие частотные искажения сигнала,
- 2) наибольший коэффициент полезного действия,
- 3) наибольшая допустимая передаваемая мощность (определяется пробивным напряжением кабеля).

Согласование четвертьволновым трансформатором:



Место включения в линию четвертьволнового трансформатора — сечение, где входное сопротивление чисто активное (экстремумы).

$$l = \lambda/4 \rightarrow Z_l = W^2 / Z_a \rightarrow$$

Подбираем W_{tr} так, что $W = W_{tr}^2 / R_m \rightarrow$

$$W_{tr} = \sqrt{WR_m} = W \sqrt{KBВ}$$

Одношлейфное согласование:

Отрезок длиной линии (шлейф) включается в сечение **b**, где активная часть нормированной проводимости $\bar{G}_{\text{линии}} = 1$.

$$\bar{Y}_{\text{линии}} = \bar{G}_{\text{линии}} + j\bar{B}_{\text{линии}}$$

Длиной шлейфа компенсируют реактивность линии в этом сечении

$$B_{\text{линии}} = -B_{\text{шлейфа}}$$

Тогда в сечении **b**: $\bar{Y}_b = 1 + j0$

