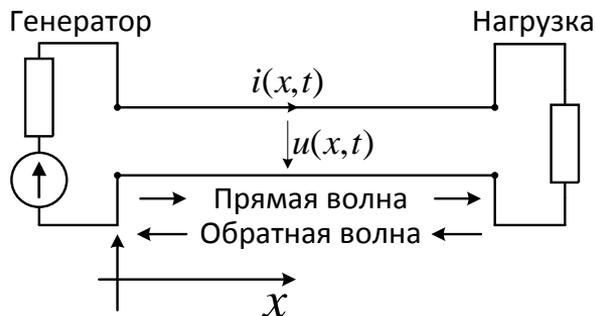


## 5. Волновые процессы в цепях с распределенными параметрами

### 5.1. Основы теории длинных линий

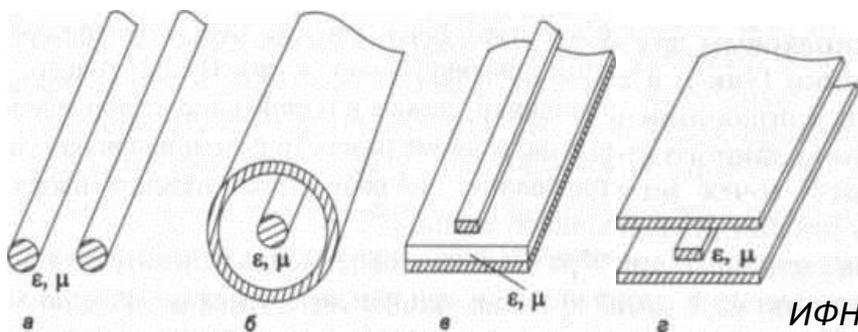
Длинные линии предназначены для транспортировки сигналов от источников энергии к удаленным нагрузкам.



1) Протяженность проводников в продольном направлении сравнима с длиной волны  $\lambda$ , и может заметно ее превосходить.

2) В поперечном сечении расстояние между проводами длиной линии должно быть существенно меньше  $\lambda$ .

Однородные длинные линии - поперечная структура и характеристики среды распространения волн не меняются в продольном направлении.



симметричная двухпроводная,  
коаксиальная,  
несимметричная полосковая,  
симметричная полосковая

Среда, в которой проложены проводники, характеризуется относительными проницаемостями: диэлектрической ( $\epsilon$ ) и магнитной ( $\mu$ ).

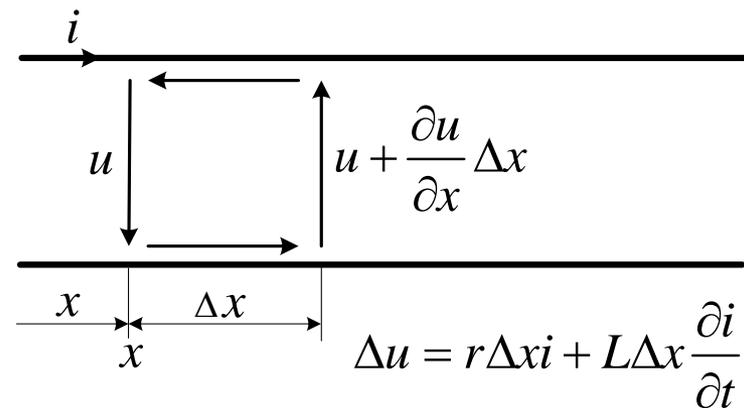
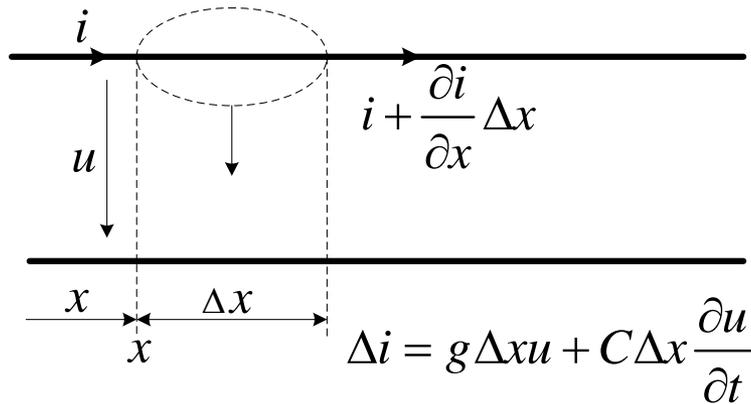
Строгое решение электродинамической задачи приводит к поперечным электромагнитным волнам, или TEM-волнам. Их свойства: векторы напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны направлению распространения (лежат в поперечном сечении длинной линии), *фазовая скорость* TEM волн не зависит от частоты и равна  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$ , где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме.

Квазистационарный характер электромагнитного поля в поперечном сечении длинных линий - распределение поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, в точности отвечает статическому (неизменному во времени) случаю. Это позволяет ввести для описания волновых процессов в длинных линиях понятия *напряжение* и *ток*.

Результат интегрирования напряженности электрического поля (падение напряжения между проводниками длинной линии) одинаков для любого пути, лежащего в одной поперечной плоскости. Волновой характер процесса проявится в том, что ток и напряжение будут зависеть и от времени, и от продольной координаты.

Длинные линии — цепи с распределенными параметрами. Для описания электрических характеристик конкретных линий передачи используют параметры, приходящиеся на единицу длины линии — *погонные параметры*. Это: индуктивность ( $L$ ), емкость ( $C$ ), сопротивление ( $r$ ), проводимость ( $g$ ) и взаимная индуктивность ( $M$ ). Их единицы измерения отвечают физической природе величины, но берутся отнесенными к метру: Гн/м, Ф/м, Ом/м, См/м.

## 5.2 Дифференциальные уравнения длинной линии



Приращение тока по координате:  $-(\partial i / \partial x)\Delta x = g\Delta xu + C\Delta x(\partial u / \partial t)$

Приращение напряжения по координате:

$$-(\partial u / \partial x)\Delta x = r\Delta xi + L\Delta x(\partial i / \partial t)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Дифференциальные уравнения с частными производными и постоянными (для однородной линии) коэффициентами - телеграфные уравнения.

Волновые решения телеграфных уравнений линии без потерь

$$r = 0, \quad g = 0$$

$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t}$  Дифференцируем обе части первого уравнения по  $t$   
и обе части второго уравнения по  $x$ .

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v^2 = 1/(LC) \\ [v] = \text{м/с} \end{array}$$

Решения волновых уравнений представимо суммой двух волн, распространяющихся со скоростью  $v$  вдоль координаты  $x$  во встречных направлениях:

$$u(x, t) = u_{np}(t - x/v) + u_{обп}(t + x/v) \quad i(x, t) = i_{np}(t - x/v) + i_{обп}(t + x/v)$$

Волна с аргументом  $(t - x/v)$  движется со скоростью  $v^2 = 1/(LC)$  в положительном направлении оси  $x$ , волна с аргументом  $(t + x/v)$  распространяется с той же скоростью в обратном направлении, навстречу отсчетам  $x$ .

Подставим значения  $u$  и  $i$  в уравнения системы

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i_{np}(t - x/v)}{\partial x} \cdot \left(\frac{-1}{v}\right) + \frac{\partial i_{обп}(t + x/v)}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{v}\right) = -C \frac{\partial u_{np}(t - x/v)}{\partial t} - C \frac{\partial u_{обп}(t + x/v)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_{np}(t - x/v)}{\partial x} \cdot \left(\frac{-1}{v}\right) + \frac{\partial u_{обп}(t + x/v)}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{v}\right) = -L \frac{\partial i_{np}(t - x/v)}{\partial t} - L \frac{\partial i_{обп}(t + x/v)}{\partial t}$$

Равенства будут выполняться при любых  $t$  и  $x$ , если

$$u_{np}(t - x/v) = \frac{1}{Cv} i_{np}(t - x/v)$$

$$u_{обп}(t + x/v) = -Lv \cdot i_{обп}(t + x/v)$$

Волновое сопротивление  $W = \sqrt{L/C}$ , причем  $\frac{1}{Cv} = Lv = \sqrt{L/C} = W$

$$u_{np}/i_{np} = W \quad i(x, t) = i_{np} + i_{обр} = (u_{np} - u_{обр})/W$$

Для бесконечно длинной однородной линии в решении останутся только волны тока и напряжения, уходящие в бесконечность  $u_{np}, i_{np}$

В этом случае  $u(x, t) = W \cdot i(x, t)$

Для генератора подключенная к нему однородная длинная линия бесконечной длины эквивалентна вещественному сопротивлению  $W$  (волновому сопротивлению). Фрагмент однородной длинной линии без потерь, нагруженный сопротивлением, равным волновому, со стороны входных полюсов будет восприниматься как бесконечно длинная линия.

Скорость распространения волны  $v = 1/\sqrt{LC}$   
 Из теории электромагнитных волн  $v = c/\sqrt{\epsilon\mu} \rightarrow 1/\sqrt{LC} = c/\sqrt{\epsilon\mu}$

Распространение волн по проводам обусловлено распространением электромагнитной волны в пространстве, прилегающем к проводникам кабеля, которые, подобно рельсам, обеспечивают перенос энергии поля в заданном направлении.

### 5.3. Волны в длинной линии в режиме гармонических колебаний

Под воздействием гармонической ЭДС частоты  $\omega$  в однородной длинной линии без потерь установился стационарный режим.

$$\dot{U}(x) \div u(x, t) = \operatorname{Re}[\dot{U}(x) \exp(j\omega t)]$$

$$\dot{I}(x) \div i(x, t) = \operatorname{Re}[\dot{I}(x) \exp(j\omega t)]$$

Волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \dot{U}(x)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad \frac{d^2 \dot{I}(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \dot{I}(x) \quad \text{Ищем решения уравнений в виде} \quad \dot{U}(x) = A \exp(sx)$$

Характеристическое уравнение  $s^2 = -(\omega/v)^2$  |  $\rightarrow s^2 = -\beta^2 \rightarrow$   
Фазовая постоянная (волновое число)  $\beta = \omega/v$

$$\begin{aligned} \rightarrow s_1 &= -j\beta & \rightarrow \dot{U}(x) &= A_1 \exp(-j\beta x) + A_2 \exp(+j\beta x) \\ \rightarrow s_2 &= +j\beta \end{aligned}$$

Подставляем  $\dot{U}(x) = A_1 \exp(-j\beta x) + A_2 \exp(+j\beta x)$  в

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[\dot{U}(x) \exp(j\omega t)] \rightarrow$$

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[\dot{U}(x) e^{j\omega t}] = u_{np} + u_{обp} = |\dot{U}_{np}| \cos(\omega t - \beta x + \varphi_{np}) + |\dot{U}_{обp}| \cos(\omega t + \beta x + \varphi_{обp})$$

Прямая волна двигается в направлении роста координаты  $x$ ,  
обратная волна - против направления  $x$ .

Волну, движущуюся от генератора к нагрузке, принято называть *падающей*, обратную — *отраженной*.

Изменим направление отсчета координаты  $x$  — ее удобно отсчитывать от сечения нагрузки:

$$u(x, t) = u_{над}(x, t) + u_{отp}(x, t) = |\dot{U}_{над}| \cos(\omega t + \beta x + \varphi_{над}) + |\dot{U}_{отp}| \cos(\omega t - \beta x + \varphi_{отp})$$



Константы  $A_1 = \dot{U}_{над}(0)$

$$A_2 = \dot{U}_{отp}(0)$$

Комплексные амплитуды напряжения и тока:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{на\delta}(0)\exp(j\beta x) + \dot{U}_{о\text{т}р}(0)\exp(-j\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{на\delta}(x) + \dot{I}_{о\text{т}р}(x) = [\dot{U}_{на\delta}(0)\exp(j\beta x) - \dot{U}_{о\text{т}р}(0)\exp(-j\beta x)]/W$$

#### 5.4. Фазовая скорость и длина волны в линии

$\omega t + \beta x + \varphi_{на\delta}$  - полная фаза падающей волны

$\omega t - \beta x + \varphi_{о\text{т}р}$  - полная фаза отраженной волны

Уравнение движения фазового фронта  $\rightarrow$  полная фаза = Const

$\omega t + \beta x + \varphi_{на\delta} = Const$  - дифференцируем по времени  $\rightarrow$

$\omega + \beta \dot{x} = 0$  ,  $\dot{x}$  - скорость движения фазового фронта

$\dot{x} = -\omega/\beta$  - скорость движения фазового фронта падающей волны

$\dot{x} = \omega/\beta$  - скорость движения фазового фронта отраженной волны

Фазовая постоянная (волновое число)  $\beta = \omega/v \rightarrow \dot{x} = v$

Значение фазовой скорости совпадает с  $v$  — скоростью движения волны в линии (из решения волнового уравнения).

Скорость движения волны в линии (решение волнового уравнения) совпадает со скоростью движения фазового фронта:

$$v = 1/\sqrt{LC} = c/\sqrt{\epsilon\mu} = \omega/\beta$$

За время, равное периоду  $T$ , фазовый фронт смещается на расстояние  $vT = \lambda = v2\pi/\omega = 2\pi/\beta$

$\lambda$  — длина волны в линии - расстояние между точками, в которых фазы колебаний отличаются на  $2\pi$ , то есть  $\beta\lambda = 2\pi \rightarrow \beta = 2\pi/\lambda$

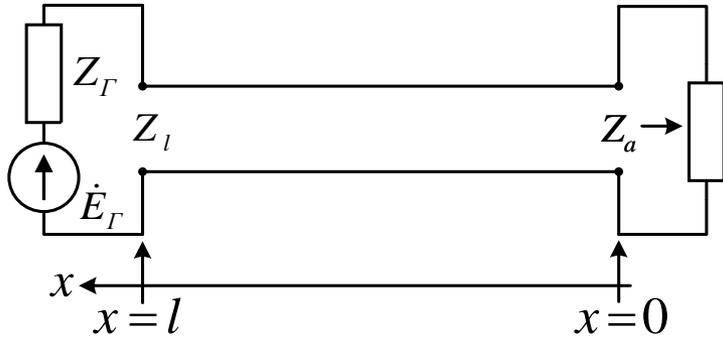
Длина волны в длинной линии будет такой же, как у волны, распространяющейся в однородном пространстве с теми же параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$ . Если в линии передачи фазовая скорость равна  $c/\sqrt{\epsilon\mu}$ , длина волны в ней в  $\sqrt{\epsilon\mu}$  раз короче длины волны в вакууме.

Фазовая скорость не зависит от частоты колебаний. —> Информационные сигналы сложного спектрального состава должны распространяться без искажений по длинной линии, не имеющей потерь.

### **5.5. Процессы в линиях без потерь при разных нагрузках**

Рассмотрим однородную длинную линию без потерь, в которой реализован режим гармонических колебаний с частотой  $\omega$ . Результирующее напряжение в каждом сечении длинной линии является суперпозицией напряжений падающей и отраженной волн и зависит от соотношения их амплитуд и фаз. Поэтому при заданных параметрах возбуждения (при заданной падающей волне) характер изменения напряжения и тока вдоль по линии определяется амплитудой и фазой отраженной волны. Параметры отраженной волны определяются условиями в сечении нагрузки. Анализ поведения напряжения и тока вдоль однородной линии сводится к вычислению отраженной волны при известном сопротивлении нагрузки.

## 5.6. Уравнения передачи для фрагмента длинной линии



Параметры линии —  $L$  и  $C$  или  $W$  и  $\beta$  — известны.

$Z_a$  - сопротивление в сечении нагрузки

$$\dot{U}_a / \dot{I}_a = Z_a$$

Получим соотношения, связывающие токи и напряжения в произвольном сечении линии.

Используем решения для КА в длинной линии:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{nad}(0) \exp(j\beta x) + \dot{U}_{omp}(0) \exp(-j\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{nad}(x) + \dot{I}_{omp}(x) = [\dot{U}_{nad}(0) \exp(j\beta x) - \dot{U}_{omp}(0) \exp(-j\beta x)] / W$$

В сечении нагрузки ( $x=0$ ):

$$\dot{U}_a = \dot{U}_{nad}(0) + \dot{U}_{omp}(0) \quad \dot{I}_a = \dot{I}_{nad}(0) + \dot{I}_{omp}(0) = (\dot{U}_{nad}(0) - \dot{U}_{omp}(0)) / W$$

Подставляем в уравнения

$$e^{j\beta x} = \cos(\beta x) + j \sin(\beta x) \quad \text{и} \quad e^{-j\beta x} = \cos(\beta x) - j \sin(\beta x)$$

Значения комплексных амплитуд напряжения и тока в любом сечении  $x$  через ток и напряжение на нагрузке:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_a \cos(\beta x) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = j(\dot{U}_a / W) \sin(\beta x) + \dot{I}_a \cos(\beta x)$$

$l$  - длина линии (расстояние между генератором и нагрузкой)

$x=l$  – сечение генератора

Уравнения передачи четырехполюсника, связывающие напряжение  $\dot{U}_l$  и ток  $\dot{I}_l$  на его входных полюсах, с аналогичными величинами на выходе ( $\dot{U}_a$  и  $\dot{I}_a$ ):

$$\begin{aligned} \dot{U}_l &= \dot{U}_a \cos(\beta l) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta l) \\ \dot{I}_l &= j(\dot{U}_a / W) \sin(\beta l) + \dot{I}_a \cos(\beta l) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{U}_l \\ \dot{I}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & jW \sin(\beta l) \\ j \frac{\sin(\beta l)}{W} & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{I}_a \end{pmatrix}$$

*Матрица передачи отрезка длиной линии.*

При нагрузке линии волновым сопротивлением  $\dot{U}_a = W\dot{I}_a$

Из  $\dot{U}_l = \dot{U}_a \cos(\beta l) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta l)$  следует  $\dot{U}_l = \dot{U}_a \exp(j\beta l)$

Передаточная функция  $K(j\omega)$  отрезка линии длиной  $l$

$$K(j\omega) = \dot{U}_a / \dot{U}_l = \exp(-j\omega\sqrt{LC} \cdot l)$$

Используем  $1/\sqrt{LC} = \omega/\beta \rightarrow \beta = \omega\sqrt{LC}$

Амплитудно-частотная характеристика  $|K(j\omega)| = 1$

Фазо-частотная характеристика  $\arg K(j\omega) = -\omega\sqrt{LC} \cdot l$

→

Соответствует условиям реализации неискажающей цепи, задерживающей выходной сигнал на время  $\sqrt{LC} \cdot l$

При включении в сечение нагрузки сопротивления  $W$  отраженной волны в линии не будет.