4.4. Спектральный анализ простейших колебаний.

1) Прямоугольный импульс $s(t)=\begin{cases}1, & |t|\le \tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$

$$S(\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}dt=\frac{e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{+j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}=\frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

Спектральная плотность одиночного импульса совпадает с огибающей спектральных линий периодической последовательности таких же импульсов. Если увеличивать период повторения последовательности, то форма огибающей сохраняется, но спектральные линии располагаются все гуще, а их амплитуда уменьшается. В пределе, когда период $T\to\infty$, дискретный спектр переходит в непрерывный. Спектральная плотность $S(\omega)$ с ростом ω убывает как $1/\omega$(но немонотонно), это связано с наличием скачков в $s(t)$. Чем более гладкая $s(t)$, тем выше степень убывания $S(\omega)$ при $\omega\to\infty$: закономерность здесь такая же, как для коэффициентов ряда Фурье.

Для произвольного колебания $S(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)dt$ - площадь импульса

Для прямоугольного импульса $S(0)=\tau$

$S(\omega)$ обращается в нуль на частотах $\omega=2n\pi/\tau$, $n=\pm1,\pm2\ldots$

Замечание: Отрицательные частоты ω рассматриваются как переменная в $S(\omega)$. Если же иметь в виду число колебаний (или радиан) в секунду, то здесь f и ω — только положительные величины.

$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi/\tau}^{2\pi/\tau}|S|^2\,d\omega$ - Энергия импульса в полосе частот $-2\pi/\tau\le\omega\le+2\pi/\tau$ содержит более 90% всей энергии импульса.

$2\pi/\tau=\Delta\omega=2\pi F$ - условно считаем шириной спектра импульса.

Чем короче импульс, тем шире его спектр частот:

$$F=1/\tau$$

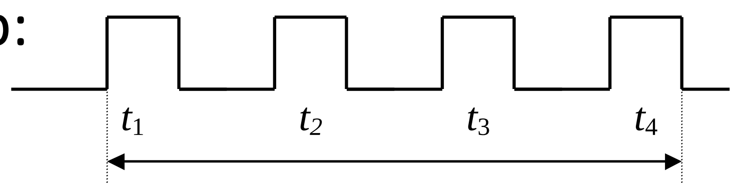
Для любого колебания $FT \geq C$

$\boldsymbol{T}$ - длительность колебания (с), $\boldsymbol{F}$ - ширина его спектра частот (Гц), $\boldsymbol{C}$ - константа, точное значение которой зависит от того, как условиться отсчитывать $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{F}$.

$s(t)$ и $S(\omega)$ не могут одновременно быть финитными функциями, т.е. обращаться в нуль вне конечного интервала t и ω.

Сверху произведение $\boldsymbol{FT}$ принципиально ничем не ограничено, оно может быть сколь угодно больше $\boldsymbol{C}$.

Пример:



пачка одинаковых импульсов

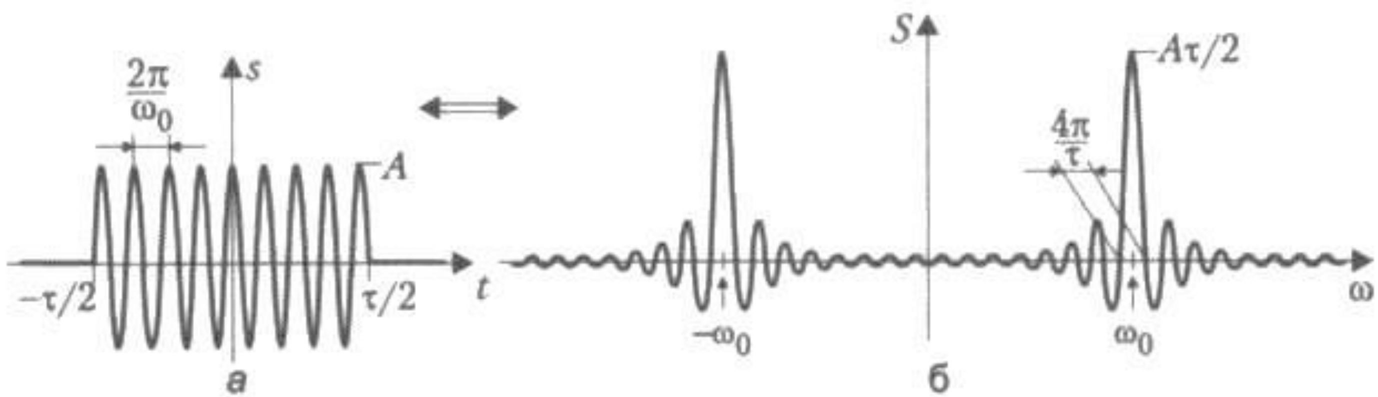
Сумма одиночных импульсов с разными задержками во времени (t_1, t_2,...).

$$s(t-\tau) \div S(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} \quad \text{—>} \quad S_n = S(\omega)\sum_{k=1}^{n} e^{-j\omega t_k}$$

Огибающая спектральной плотности имеет такую же протяженность, как для одиночного импульса. В то же время длительность всей пачки может быть $T \gg \tau$.

Если импульсы не перекрываются, огибающая спектральной плотности имеет такую же протяженность, как для одиночного импульса. Длительность всей пачки может быть $\boldsymbol{T} >> \boldsymbol{\tau}$.

2) Радиоимпульс с прямоугольной огибающей



$1/f_0 << \tau$

$s_1(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$, где $s(t)$ — импульс из предыдущего примера (прямоугольный импульс).

$\omega_0 = 2\pi f_0$ - несущая частота.

$$s_1(t) = s(t)\cdot\cos(\omega_0 t) = s(t)\cdot\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \div \frac{1}{2}S(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}S(\omega+\omega_0)$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Свойство 6 : $s(t)\cdot e^{-j\omega_0\tau} \div S(\omega+\omega_0)$

$$S_1(\omega) = \frac{1}{2}S(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}S(\omega+\omega_0)$$

Спектр сдвинут на величину ω_0 по оси частот. Его существенная часть расположена в области ВЧ и занимает полосу $2F$, т.е. вдвое более широкую, чем у видеоимпульса.

Слагаемые в $S_1(\omega)$ не перекрываются и структура спектра радиоимпульса в окрестности ω_0 такая же, как у огибающей прямоугольного импульса в окрестности $\omega = 0$.

3) Треугольный импульс: $s_2(t)=\begin{cases}1-|t/\tau|, & |t|\le\tau\\ 0, & |t|>\tau\end{cases}$

Функция четная —>

$$S_2(\omega)=2\int_0^{\tau}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cos\omega t\,dt=2\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\frac{\sin\omega t}{\omega}\Bigg|_0^{\tau}+2\int_0^{\tau}\frac{\sin\omega t}{\omega}\frac{dt}{\tau}=2\frac{1-\cos\omega\tau}{\omega^2\tau}=\tau\frac{\sin^2\frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$$

$S_2(\omega)$ убывает на ∞ как $1/\omega^2$, поскольку $s_2(t)$ не имеет скачков.

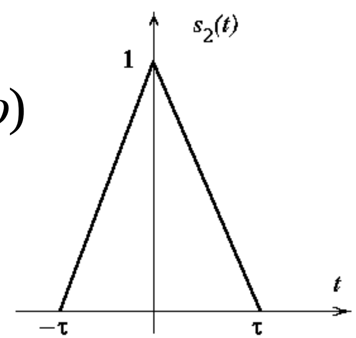
Вспоминаем спектр прямоугольного импульса: $S(\omega)=\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$ —>

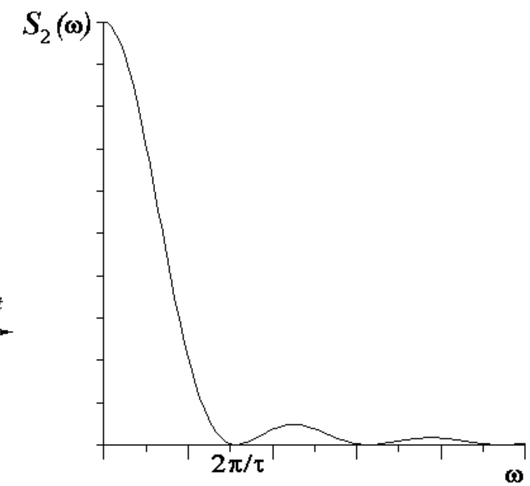
$S_2(\omega)=\frac{1}{\tau}S(\omega)\cdot S(\omega)$ —> Свойство 8

$$s_1(t)*s_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s_1(\tau)s_2(t-\tau)d\tau\div S_1(\omega)\cdot S_2(\omega)$$

$$s_2(t)=[s(t)*s(t)]\frac{1}{\tau}$$

$s_2(t)$ является сверткой двух прямоугольных импульсов



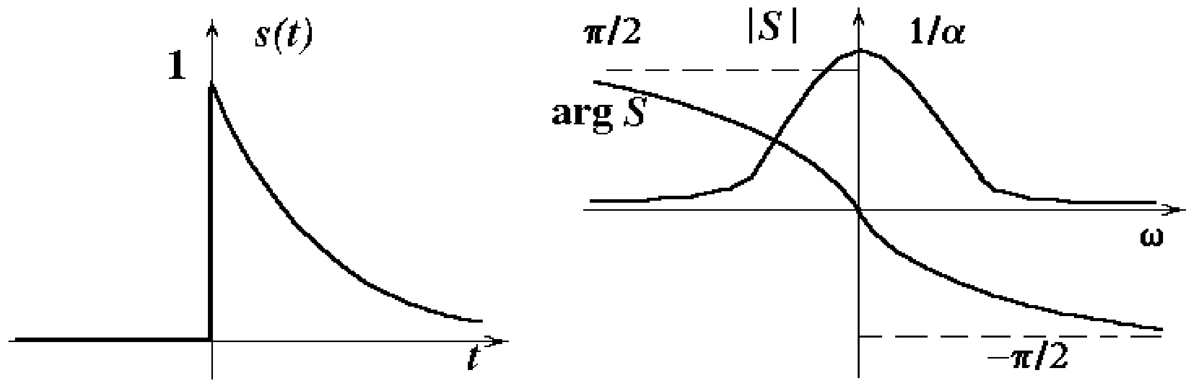


4) Экспоненциальный импульс: $s(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\alpha t}, & t\ge 0\end{cases}$

Спектральная плотность:

$$S(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt=-\frac{1}{\alpha+j\omega}\cdot e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$|S(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}},\quad \arg S=-\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{\alpha}$$



Форма зависимости $S(\omega)$ как у АЧХ резонансного контура (лоренцева кривая), причем $S\approx 1/\omega$ при $\omega\to\infty$.

Чем больше α, т. е. короче импульс, тем шире его спектр.

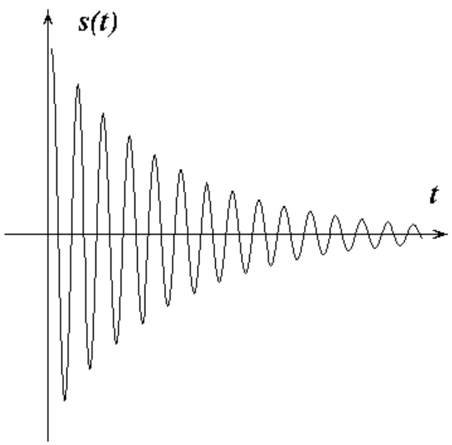
5) Затухающая синусоида: $s(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t, & t\ge 0\end{cases}$

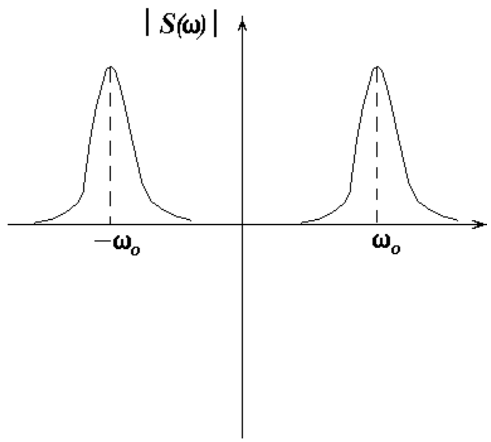
При $t\ge 0$:

$$s(t)=e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t=e^{-\alpha t}\cdot\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}=\frac{1}{2}e^{-(\alpha-j\omega_0)t}+\frac{1}{2}e^{-(\alpha+j\omega_0)t}$$

Спектральная плотность:

$$S(\omega)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(e^{-(\alpha-j\omega_0+j\omega)t}+e^{-(\alpha+j\omega_0+j\omega)t}\right)dt=\frac{1/2}{\alpha+j(\omega-\omega_0)}+\frac{1/2}{\alpha+j(\omega+\omega_0)}$$





Спектр сосредоточен вблизи частоты ω_0. Если $\alpha \ll \omega_0$ —>

относительная ширина спектра мала: $\Delta\omega/\omega \ll 1$ —>

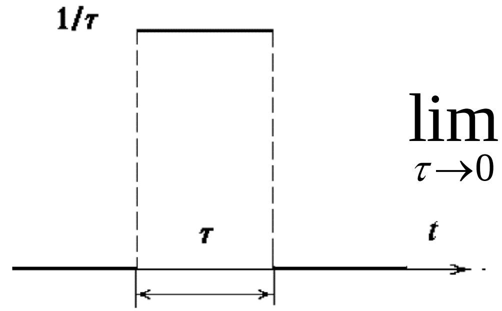
имеем квазигармоническое колебание.

4.5. Дельта-функция.

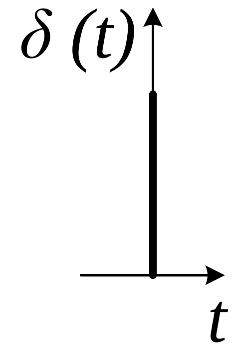
Рассмотрим последовательность импульсных функций $\delta_\tau(t)$, таких, что длительность τ уменьшается, а амплитуда увеличивается, причем площадь остается все время равной 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t)dt = 1$$

импульс сосредоточен вблизи t=0



$\lim\limits_{\tau \to 0}$ —>



При $\tau \to 0$ последовательность $\delta_\tau(t)$ не имеет предела в классе обычных функций. Однако для всякой непрерывной и ограниченной функции $f(t)$ существует предел интеграла

$$\lim_{\tau \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_\tau(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t)dt = f(0)$$

Предельный случай записывают в виде $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$

Определение δ-функции $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t'+t_0)\delta(t')dt' = f(t_0) \quad (*)$$

Дельта-функция имеет смысл лишь под знаком интеграла, который считается равным значению множителя при δ в той точке, где аргумент δ-функции обращается в нуль.

Сам символ $\delta(t)$ можно понимать как импульсную функцию $\delta_\tau(t)$, длительность которой настолько мала, что для всех функций $f(t)$, которые мы рассматриваем, выполняется равенство (*), и дальнейшее укорочение импульса $\delta_\tau(t)$ и изменение его формы уже не влияет на результат интегрирования.

Реакция системы на очень кратковременное воздействие (длительность которого много меньше времени реакции системы) — это свободное колебание, его форма не зависит от формы импульсного воздействия, а размах определяется лишь интегралом (площадью импульса).

Преобразование Фурье от δ-функции: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$

(на основании определения δ-функции)

$\left| e^{-j\omega t_0} \right| = 1$ —> δ-функция имеет равномерную по модулю плотность спектра вдоль всей оси ω.

Формально $\delta(t-t_0) \div e^{-j\omega t_0}$

Обратное преобразование Фурье приводит к расходящемуся интегралу и смысла не имеет:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\left(t-t_0\right)} \Bigg|_{\omega\to-\infty}^{\omega\to+\infty} = \infty$$

6) Косинусоидальное колебание:

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{+j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} = ...$$

$$e^{+j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

$$... = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega$$

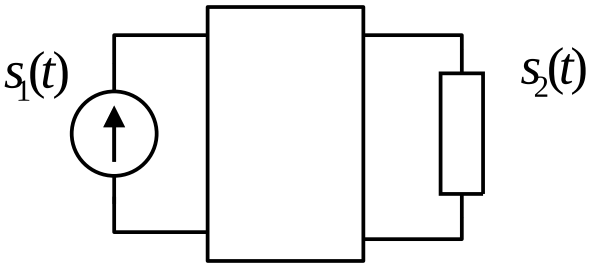
$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$ - обратное преобразование Фурье

Спектральная плотность: $S(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$

$$\cos\omega_0 t \div \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

δ-функцию можно использовать для представления спектральной плотности колебаний, имеющих дискретный спектр.

4.6. Спектральный метод анализа цепей.



$s_1(t)$ - внешнее воздействие на цепь. Требуется найти вызываемое им колебание $s_2(t)$ в какой-либо ветви.

$s_1(t)$ представимо интегралом Фурье

$$s_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (*)$$

$S_1(\omega)$ — спектральная плотность.

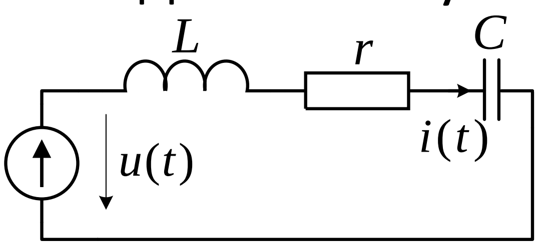
Рассматривая интеграл (*) как предельный случай суммы и учитывая, что цепь линейная, можем применить принцип суперпозиции. Надо рассмотреть действие на цепь колебания $S_1(\omega)e^{j\omega t}$. Согласно методу комплексных амплитуд (КА) реакция $s_2(t)$ на такое колебание будет $K(j\omega)S_1(\omega)e^{j\omega t}$, где $K(j\omega)$ — комплексный коэффициент передачи цепи (передаточная функция).

Суммируем действие всех составляющих $s_1(t)$:

$$s_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)S_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

спектральные плотности входного и выходного колебаний связаны соотношением $S_2(\omega) = K(j\omega)S_1(\omega)$

Второй способ определения $S_2(\omega)$: а) Составляем дифф. уравнения цепи и б) подвергаем их прямому преобразованию Фурье. Для этого каждое уравнение умножаем на $e^{-j\omega t}$ и в) интегрируем по t от -∞ до +∞. Получаем уравнения для Фурье-образов.



$$u(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

Используем:

$$\frac{ds}{dt} \div j\omega S(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} s(t')dt' \div \frac{S(\omega)}{j\omega}$$

$$\to \quad U(\omega) = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I(\omega)$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением для КА в режиме гармонических колебаний.

Расчет цепи спектральным методом сводится к следующему:

1) Определяем Фурье-образ (спектральную плотность) входного воздействия $S_1(\omega)$.

2) Рассчитываем режим гармонических колебаний в цепи методом КА (частота колебаний ω рассматривается как переменная величина) и находим коэффициент передачи $K(j\omega)$ как отношение КА выходного и входного колебаний.

3) Находим Фурье-образ выходного колебания $S_2(\omega)=S_1(\omega)\,K(j\omega)$, а затем само колебание $s_2(t)$ путем обратного преобразования Фурье.

Если $s_1(t)$ имеет дискретный спектр, то такое колебание разлагается не в интеграл, а в сумму гармоник (например, в ряд Фурье, если колебание периодическое). В таком же виде представляется и искомое колебание $s_2(t)$.