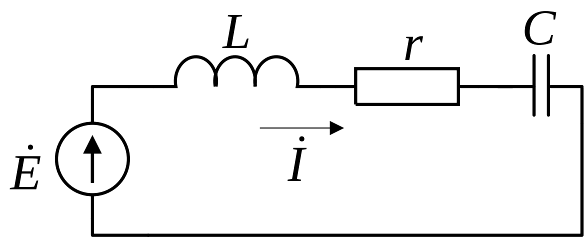
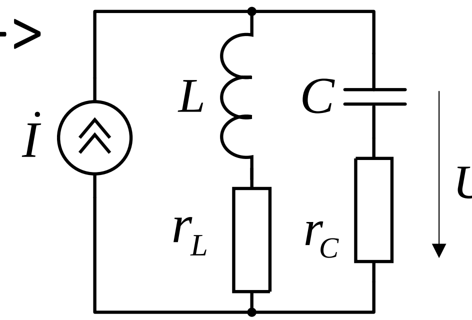
3.2. Вынужденные колебания в последовательном *LC* контуре

Последовательный и параллельный контуры —>





r - сопротивление собственных потерь контура

- сопротивление источника сигнала и
- сопротивление нагрузки (если оно есть)

Колебания гармонические —> метод комплексных амплитуд.

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{z} = \frac{\dot{E}}{r + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} \qquad \left|\dot{I}\right| = \frac{\left|\dot{E}\right|}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$r << x_L$ или $|x_C|$, то почти для всех частот (кроме области вблизи резонансной частоты):

$$|\dot{I}| = \frac{\left|\dot{E}\right|}{\left|\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right|}$$

Область частот $x_L = |x_C|$ —> ток резко возрастает —> потерями уже пренебрегать нельзя:

$$\omega \to \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad \text{—>} \quad I_{\max} = E_m / r$$

ω_0- резонансная частота контура

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ - собственная частота контура

Реактивное сопротивление контура $j(\omega L - 1/\omega C)$

$\omega < \omega_0$ —> емкостной характер ($x<0$)

$\omega > \omega_0$ —> индуктивный характер ($x>0$)

$\omega = \omega_0$ —> чисто активное сопротивление,

Напряжение на r : $\dot{U}_r = r\dot{I} = \dot{E}$ $\quad U_{rm} = E_m$

Напряжение на L и C : $\dot{U}_L = j\omega_0 L\dot{I},\quad \dot{U}_C = \dfrac{1}{j\omega_0 C}\dot{I}$ —> $\dot{U}_L = -\dot{U}_C = j\rho\dot{I},$

где $\rho = \omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ - характеристическое («волновое») сопротивление контура, равное модулю комплексного сопротивления обоих реактивных элементов (L и C) на резонансной частоте.

$$\omega = \omega_0 \qquad U_{Lm} = U_{Cm} = \rho I = \rho \frac{E_m}{r} = QE_m,$$

$$Q = \frac{\rho}{r}$$ - добротность контура

Типичное значение Q в радиодиапазоне — от $30 \div 40$ до 200

При резонансе напряжения на L и C противоположны по фазе и компенсируют друг друга, а их амплитуды в Q раз больше амплитуды ЭДС. Резонанс в последовательном контуре иногда называют резонансом напряжений.

$$u_C = U_m \sin \omega t \quad \text{–>} \quad \dot{U}_m = -jU_m \quad \text{–>} \quad \varphi_{uc} - \varphi_i = -\frac{\pi}{2} \quad \text{–>} \quad \varphi_i = 0 \quad \text{–>} \quad \dot{I}_m = I_m \quad \text{–>}$$

$$i = I_m \cos \omega t \quad \text{–>} \quad I_m = \omega C U_m$$

Запасенная энергия $W_L(t) = \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega t, \quad W_C(t) = \frac{1}{2} C U_m^2 \sin^2 \omega t$

Общий запас энергии $W_\rho = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 C^2 U_{Cm}^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2$

$$W_L(t) + W_C(t) = W_\rho (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = W_\rho = \mathrm{const.}$$

Происходит колебательный обмен энергией между индуктивностью и емкостью, причем общий запас энергии сохраняется. Источник *E* компенсирует потери энергии в сопротивлении.

Активная мощность $P = \frac{1}{2} r I_m^2$

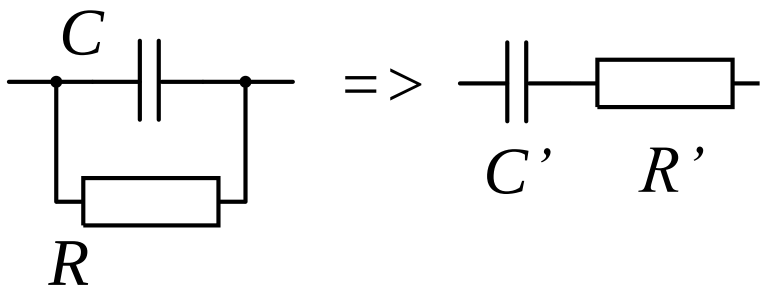
$W_r = PT$ - потери энергии за один период колебаний

$$\frac{W_\rho}{W_r} = \frac{L I_m^2 \omega_0}{r I_m^2 2\pi} = \frac{Q}{2\pi} \quad \longrightarrow \quad Q = 2\pi \frac{W_\rho}{W_r}$$

$d = \frac{1}{Q}$ - затухание контура, $Q = \frac{\rho}{r}$

В общем случае $r = r_{собств} + r_{внеш}$, где $r_{собств}$ обусловлено потерями в самих элементах контура, а $r_{внеш}$ — потерями в сопротивлениях источника и нагрузки.

Если сопротивление нагрузки или потерь включено параллельно L или C, то его надо пересчитать в эквивалентное последовательное соединение.



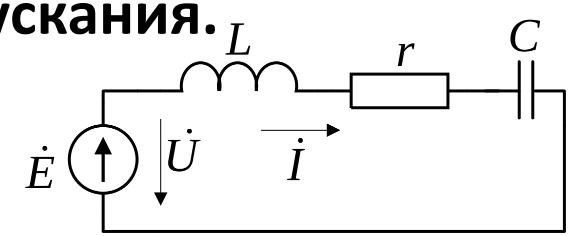
$$d = \frac{r_{собств} + r_{внеш}}{\rho}$$ - общее затухание —> $Q = \frac{1}{d}$ нагруженная добротность

$$\frac{r_{собств}}{\rho} = d_{собств}$$ - собственное затухание —>

$$Q_{собств} = \frac{1}{d_{собств}}$$ -собственная добротность контура

$$Q < Q_{собств}$$

3.3. Частотные характеристики последовательного колебательного контура. Полоса пропускания.



Сопротивление контура $Z(j\omega)=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$

возможно рассматривать как коэффициент передачи, если I считать внешним воздействием, U – откликом.

$$z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + j\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega\omega_0 CL}\right) = r + j\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) =$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad Q = \frac{\rho}{r} \qquad = r\left[1 + j\frac{L}{r\sqrt{LC}}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] = r\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

$\omega - \omega_0$ - абсолютная расстройка (от частоты резонанса)

$\delta = \dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ - относительная расстройка (ее часто выражают в %)

вблизи частоты резонанса $|\delta| \ll 1$

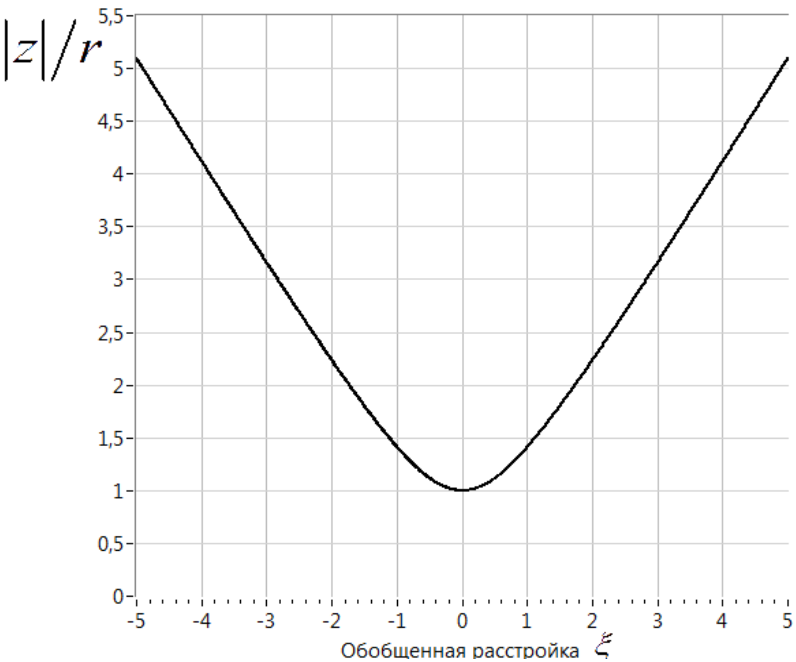
$\xi = Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$ - обобщенная расстройка

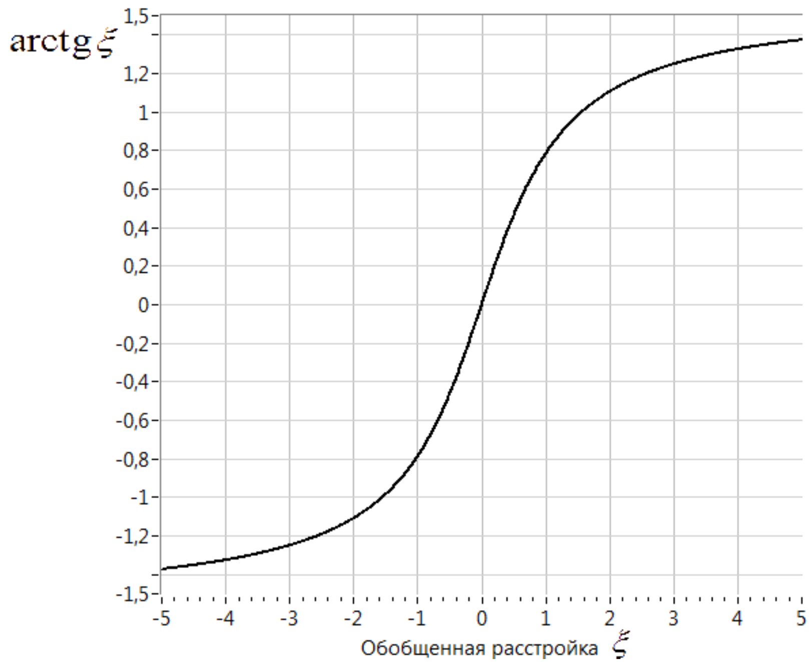
$$\xi = Q\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega\omega_0} = Q\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\frac{\omega+\omega_0}{\omega} \approx Q\cdot 2\delta.$$

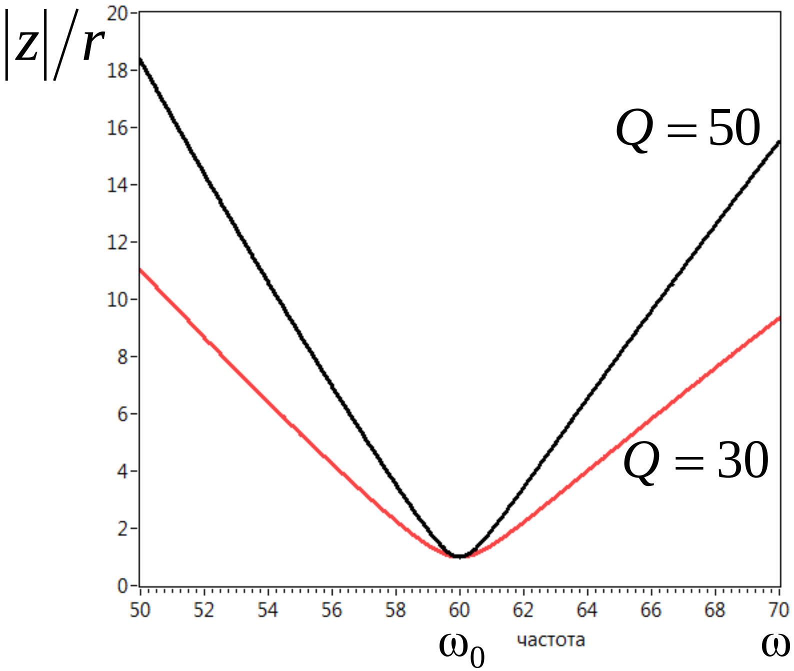
При малых отклонениях ω от ω_0 обобщенная расстройка пропорциональна относительной (и абсолютной).

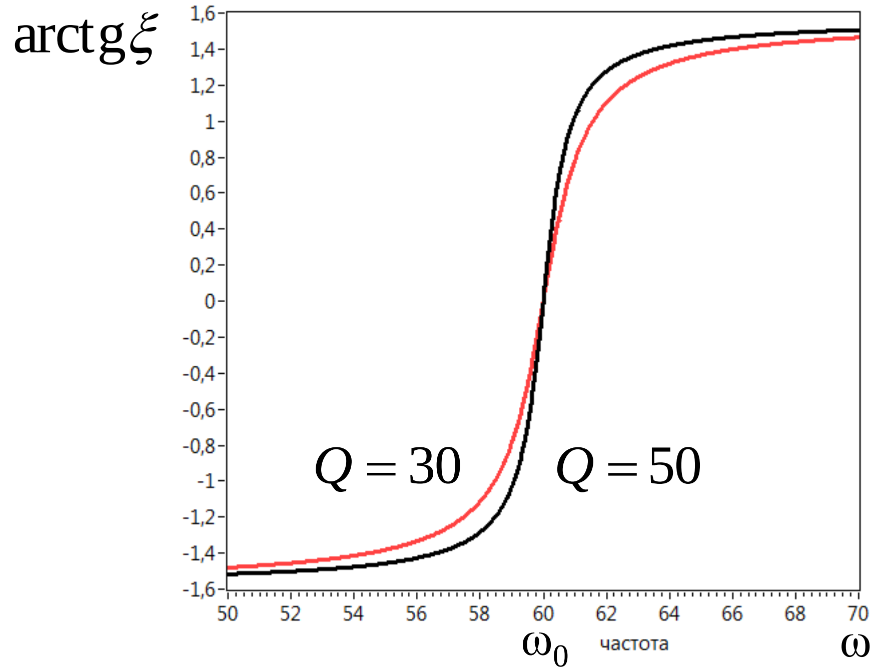
ω : 0 —> ∞, ξ : - ∞ до +∞

$z = r(1+j\xi)$ —> $|z| = r\sqrt{1+\xi^2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\xi$









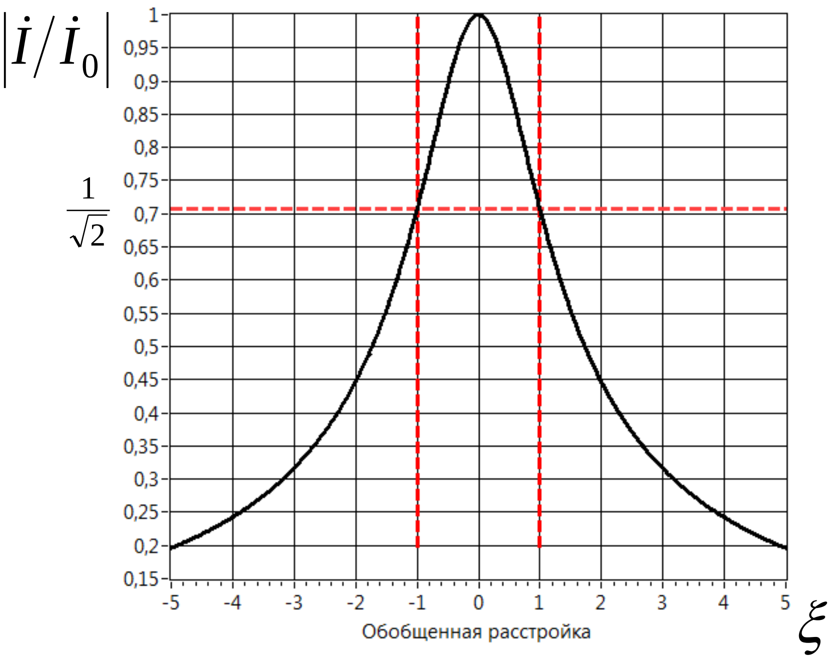
Зависимости $|z|/r$ и $\varphi = \mathrm{arctg}\,\xi$ от ω не симметричны.

1) Входной сигнал (внешнее воздействие) представляет собой эдс $\dot{E}$

выходной сигнал $\dot{I}$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{z} = \frac{\dot{E}}{r(1+j\xi)} = \frac{\dot{I}_0}{1+j\xi}$$, где $\dot{I}_0 = \dot{E}/r$ - ток при резонансе

$$\frac{\dot{I}}{\dot{I}_0} = \frac{1}{1+j\xi}, \qquad \frac{I_m}{I_{m0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$



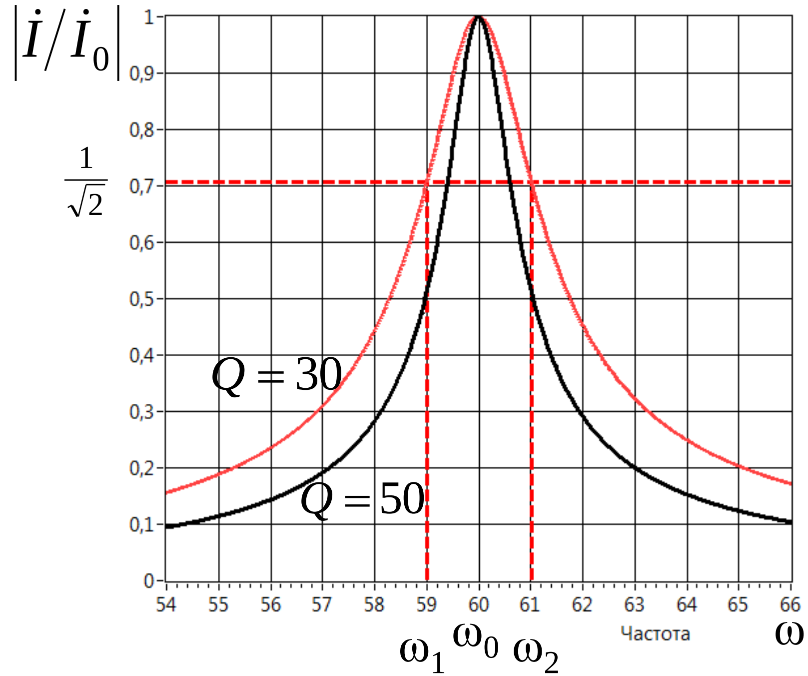


График зависимости $|\dot I/\dot I_0|$ от ξ симметричен,

от ω — несимметричен.

Контур обладает частотно-избирательными свойствами. Он хорошо “пропускает” колебания, у которых $\omega \approx \omega_0$, и плохо пропускает колебания с частотами, далекими от ω_0. На этом основано его использование в качестве простейшего полосового фильтра (ПФ).

Полоса пропускания контура на уровне $\frac{1}{\sqrt{2}}$ от максимума АЧХ (соответствует снижению мощности на краях полосы в 2 раза относительно максимума при ω_0):

$$\frac{I_m}{I_{m0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad \to \quad \xi_{1,2} = \pm 1$$

Обозначим $x_{1,2} = \omega_{1,2}/\omega_0$,
где ω_1 и ω_2 — граничные частоты.

$$\xi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$d = \frac{1}{Q}$ - затухание контура.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{x_1} &= -d \\ x_2 - \frac{1}{x_2} &= d \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x_1^2 + dx_1 - 1 = 0 \\ x_2^2 - dx_2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \to \quad x_1 = -\frac{d}{2} + \sqrt{1+\frac{d^2}{4}}, \quad x_2 = \frac{d}{2} + \sqrt{1+\frac{d^2}{4}}.$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = x_2 - x_1 = d = 1/Q \quad \to \quad \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

$\Delta\omega$ — полуширина полосы пропускания.

Чем выше нагруженная добротность, тем меньше ширина полосы пропускания, т.е. острее максимум резонансной характеристики. Дополнительные потери снижают добротность и приводят к расширению полосы пропускания.

2) Входной сигнал эдс $\dot{E}$ (внешнее воздействие), выходной сигнал - напряжение на L или на C :

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} \quad \to \quad \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_{L0}} = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{\dot{I}}{\dot{I}_0}, \qquad \left|\frac{\dot{U}_L}{\dot{U}_{L0}}\right| = \frac{\omega}{\omega_0}\left|\frac{\dot{I}}{\dot{I}_0}\right| = \frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{1}{|1+j\xi|} = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

Вблизи резонансной частоты $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$, поэтому форма характеристики почти не отличается от рассмотренной выше для тока. Точный максимум $|U_L|$ наступает на частоте ϖ_L, чуть большей ω_0.

Если $Q>>1 \quad \to \quad \frac{\omega_L - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{1}{(2Q)^2} << \frac{1}{Q} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$

Относительное смещение максимума для $|U_L|$ ничтожно мало и практически его можно не учитывать.

Аналогично $\left|\frac{\dot{U}_C}{U_{C0}}\right| = \frac{\omega_0}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad \to$

Максимум $|U_C|$ смещен на $-1/(2Q)^2$ относительно ω_0, что также можно не учитывать при расчетах и измерениях.