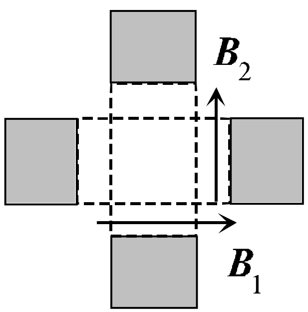
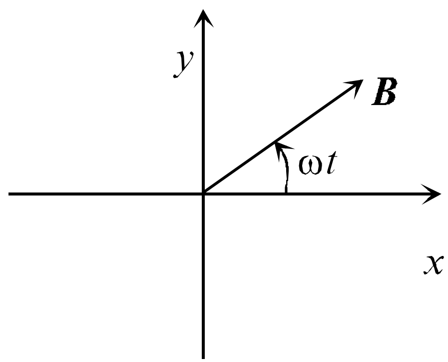
2.14. Многофазные электрические машины

Две катушки, оси которых перпендикулярны, питаются от двухфазного источника тока:

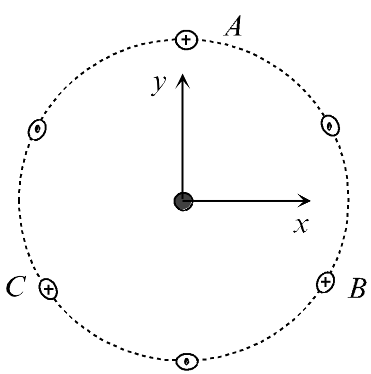
$$B_x = B_1(t) = B_m \cos\omega t,\ \ B_y = B_2(t) = B_m \cos(\omega t - \pi/2) = B_m \sin\omega t,\ \ B_z = 0.$$





Вектор индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$ вращается в плоскости xy с частотой ω , его длина остается постоянной.

Трехфазная система - три катушки, оси которых расположены под углами 120^0 друг к другу, питаются трехфазным током.



Пространственная ориентация витков с током добавляет множители –

для проекции на ось X: $\cos 0$, $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

для проекции на ось Y: $\sin 0$, $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$B_x = B_m[\cos 0 \cdot \cos \omega t + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + \cos\frac{2\pi}{3}\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})] =$$

$$= B_m[\cos \omega t - \frac{1}{2}\left\{\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})\right\}] =$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= B_m[\cos \omega t - \frac{1}{2}\left\{2\cos \omega t \cdot \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{3})\right\}] = B_m[\cos \omega t + \frac{1}{2}\cos \omega t] = \frac{3}{2}B_m \cos \omega t$$

$$B_y = B_m[\sin 0 \cdot \cos \omega t + \left(-\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + \left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})] =$$

$$= B_m\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left\{\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) - \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})\right\} =$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= B_m\sqrt{3} \cdot \left\{\sin \omega t \cdot \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{3})\right\} = B_m\sqrt{3}\sin \omega t \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}B_m \sin \omega t$$

Итак: $$\begin{cases} B_x = \dfrac{3}{2}B_m \cos \omega t \\ B_y = -\dfrac{3}{2}B_m \sin \omega t \end{cases}$$

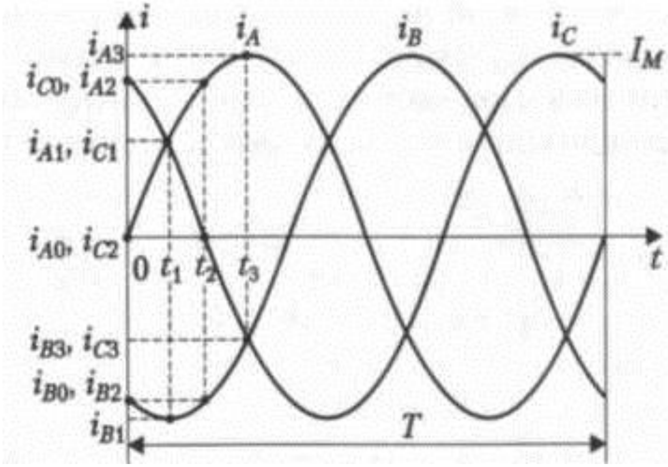
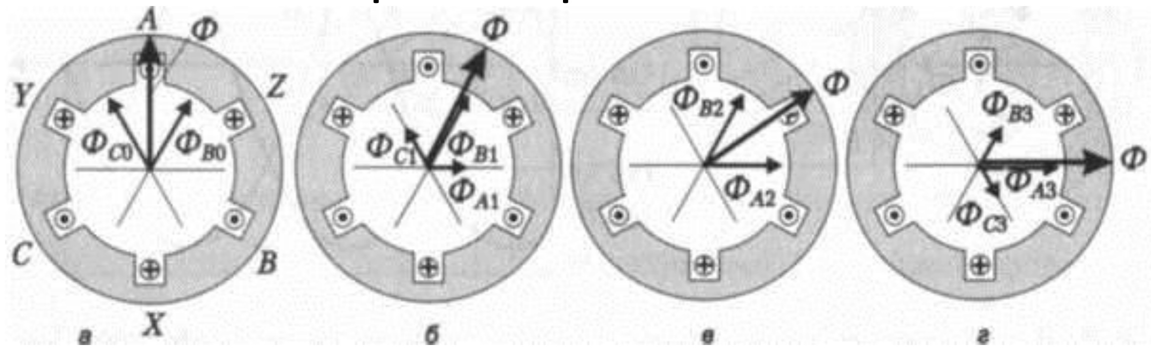
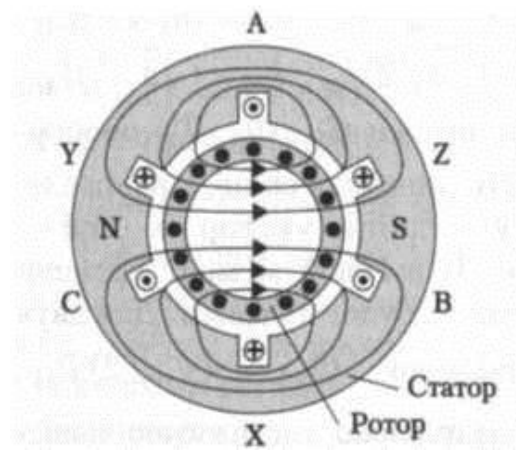


Иллюстрация вращения магнитного поля в статоре во времени



Для изменения направления вращения достаточно поменять местами токи в каких-либо двух обмотках (например i_B , i_C), а в двухфазном — изменить полярность одной из обмоток. При несимметрии токов вместо кругового вращения получается вращение по эллипсу.

<ins>Дипольное</ins> магнитное поле. —>

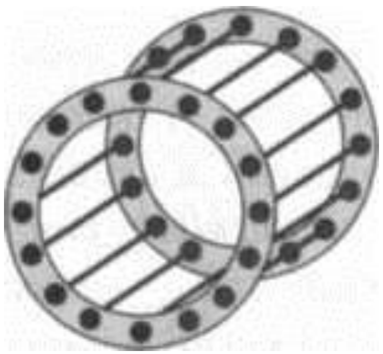


<ins>Квадрупольное</ins> поле (6 обмоток, 4 полюса), вращается с частотой $\omega/2$

$$\omega_{вр} = \frac{\omega}{n}$$

n - число пар полюсов

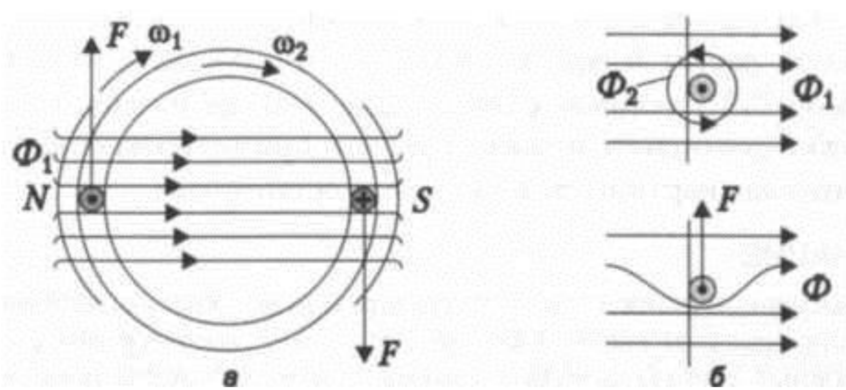
Асинхронный двигатель имеет трехфазный (двухфазный) статор и короткозамкнутый ротор (“беличье колесо”).



Внутри статора электродвигателя размещают ротор. Вращающееся магнитное поле возбуждает в роторе токи и индуцирует вращающий момент, который приводит ротор в движение.

ω_1 - угловая частота вращения магнитного поля статора

ω_2 - угловая частота вращения ротора



Ротор вращается с несколько меньшей угловой частотой

Скольжение $s = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1}$

$s \approx 3 - 4\%$

При увеличении нагрузки на вал двигателя скольжение растет.

Синхронный двигатель — ротор питается постоянным током (через кольца со щетками), статор создает вращающееся поле. Ротор надо предварительно раскрутить (используется обычно асинхронный маломощный пусковой двигатель). После включения в номинальный режим вращение ротора синхронно с вращением поля: $\omega_c=\omega$, но имеется угловой сдвиг ψ — запаздывание поля ротора относительно поля статора. С увеличением механической нагрузки на валу этот угол ψ растет, одновременно растет и вращающий момент, достигая максимума при $\psi=90^0$. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к «выпаданию» из синхронизма и остановке.

Синхронный трехфазный двигатель — обратимое электромеханическое устройство. Если к статору подключить нагрузку, а ротор вращать с помощью сторонних механических сил, то получаем генератор. Если же к статору подключить стороннее трехфазное напряжение, а ротор механически нагрузить, то получаем двигатель.

3. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

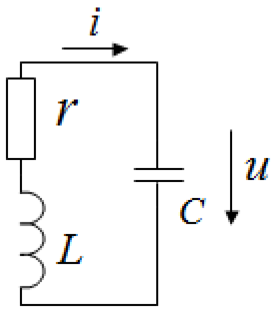
Вынужденные колебания — происходят под действием внешних сил, изменяющихся во времени, т.е. это — реакция системы (цепи) на внешнее колебательное воздействие.

Свободные колебания совершаются в отсутствие всякого внешнего воздействия; они происходят только за счет начального запаса энергии в самой системе.

Колебательные системы - запасенная энергия преобразуется из одного вида в другой, диссипация энергии мала. Колебания носят циклический (квазипериодический) характер, например, затухающая синусоида.

В режиме вынужденных гармонических колебаний в колебательной системе наблюдается явление резонанса: сильное возрастание амплитуды колебания, когда частота внешнего воздействия приближается к частоте свободного колебания самой системы.

3.1. Свободные колебания в LC-контуре



Свободные колебания не являются гармоническими, и к ним непосредственно метод КА не может быть применен.

$$L\frac{di}{dt}+ri+u=0, \quad i=C\frac{du}{dt} \quad \text{—>} \quad LC\frac{d^2u}{dt^2}+rC\frac{du}{dt}+u=0$$

Обозначения: $\omega_0=1/\sqrt{LC}$, $\alpha=r/2L$ —> $\dfrac{d^2u}{dt^2}+2\alpha\dfrac{du}{dt}+\omega_0^2u=0$

Решение ищем в виде: $u(t)=Ae^{pt}$

$$Ae^{pt}(p^2+2\alpha p+\omega_0^2)=0$$

Характеристическое уравнение: $p^2+2\alpha p+\omega_0^2=0$

Корни : $p_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$

Каждый корень дает свое частное решение дифференциального уравнения. Общее же решение является их суперпозицией:

$$u(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad \rightarrow \quad \frac{i(t)}{C} = \frac{du}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$$

Для однозначного решения используем начальные условия:

$$\begin{aligned} u(0) &= U_0 \\ i(0) &= C\frac{du(0)}{dt} = I_0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} A_1 + A_2 &= U_0 \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= \frac{I_0}{C} \end{aligned}$$

Значения U_0, I_0 однозначно определяют начальный запас энергии в цепи.

Характер свободного колебания зависит от соотношений между параметрами цепи. Здесь возможны три случая:

1. Апериодический (т.е. нециклический) режим:

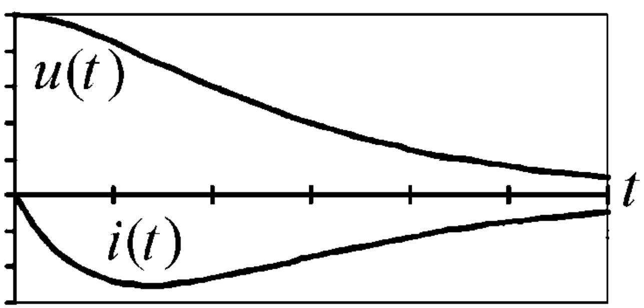
$$\alpha > \omega_0 \quad \longrightarrow \quad \frac{r}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \longrightarrow \quad r > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \longrightarrow \quad r > 2\rho$$

$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ - характеристическое сопротивление контура

Оба корня вещественны и отрицательны:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \longrightarrow \quad p_1 = -\alpha_1, \quad p_2 = -\alpha_2$$

Решение $u(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$



$I_0 = 0 \quad U_0 \neq 0$

При $t \to \infty$ напряжение и ток монотонно приближаются к нулю по экспоненте $\sim e^{-\alpha_m t}$

α_m - меньшая из величин α_1 и α_2

$\tau = \alpha_m^{-1}$ - постоянная времени цепи

2. Колебательный режим: $\alpha < \omega_0$ —> $r < 2\rho$

Корни характеристического уравнения образуют комплексно сопряженную пару:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{—>} \quad p_1 = -\alpha + j\Omega, \quad p_2 = -\alpha - j\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

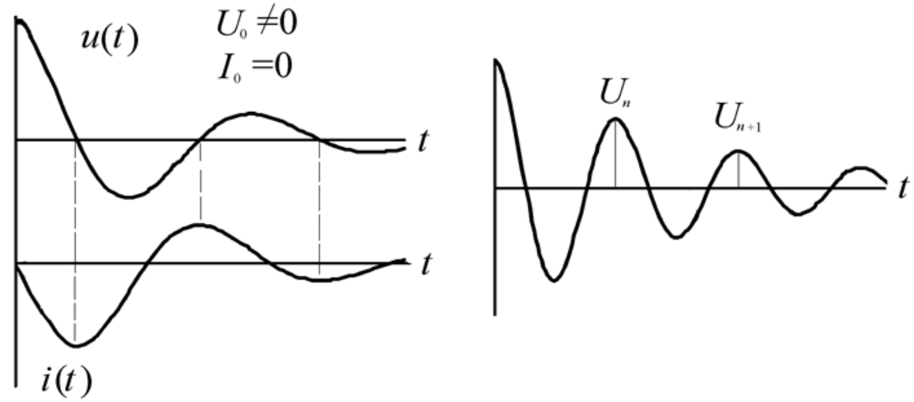
$$e^{(-\alpha \pm j\Omega)t} = e^{-\alpha t}(\cos\Omega t \pm j\sin\Omega t)$$

Решение имеет вид $u(t) = e^{-\alpha t}(B_1\cos\Omega t + B_2\sin\Omega t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \psi)$

Постоянные B_1 и B_2 или A и ψ находятся из начальных условий.

Процесс представляет собой колебание, близкое к синусоидальному, с экспоненциально убывающей амплитудой (колебательный режим).

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ -частота свободного колебания контура



$T_0 = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ - период колебания (точнее, период смены фаз, так как само колебание непериодическое)

α - коэффициент затухания,

$\tau = \dfrac{1}{\alpha}$ - постоянная времени колебательного контура. За время t ордината огибающей уменьшается в *е* раз. При этом $u(t)$, $i(t)$ могут совершить много колебаний, если $\Omega >> \alpha$.

Изохронность: «период» T_0 (как и частота Ω), не зависит от начальных условий и не изменяется в процессе затухания амплитуды колебаний.

Декремент колебания, равный отношению двух последующих максимумов $\dfrac{U_n}{U_{n+1}} = e^{\alpha T_0}$

Логарифмический декремент $\theta = \ln\dfrac{U_n}{U_{n+1}} = \alpha T_0 = \dfrac{2\pi\alpha}{\Omega}$

В наиболее интересном случае $\alpha << \Omega$ —> $\Omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ —> $\theta = \dfrac{2\pi\alpha}{\omega_0} = \dfrac{\pi r}{\rho}$

$\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$

$\alpha = r/2L$

характеристическое сопротивление, оно равно реактивному сопротивлению L или C на частоте ω_0.

$Q = \dfrac{\rho}{r}$ - добротность контура. При $Q >> 1$ —> $\theta \cong \dfrac{\pi}{Q}$

Постоянная времени $\tau = 1/\alpha$ определяет абсолютную продолжительность колебания (в секундах), а добротность Q — в периодах самого колебания. Добротность Q равна количеству периодов колебания за время τ, умноженное на π.

Энергетика колебаний:

В моменты времени, когда напряжение $u(t)$ достигает максимума U_m, а ток проходит через нуль $W_C = \frac{CU_m^2}{2}$ $W_L = 0$

В моменты времени, когда ток $i(t)$ достигает максимума I_m, а напряжение равно нулю $W_L = \frac{LI_m^2}{2}$ $W_C = 0$

$\alpha = 0$ —> $W_L = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{L}{2}(\omega_0 CU_m)^2 = W_\rho$

$\alpha \neq 0$ —> За один период теряется энергия:

$$W_r = W_\rho - W_\rho \cdot e^{-2\alpha T_0} = W_\rho\left(1 - e^{-2\alpha T_0}\right) \approx W_\rho 2\alpha T_0 = W_\rho 2\theta = W_\rho \frac{2\pi}{Q}$$

$\frac{U_n}{U_{n+1}} = e^{\alpha T_0}$ —> $U_{n+1} = U_n \cdot e^{-\alpha T_0}$ $\alpha << \Omega$ $\theta = \alpha T_0$

$Q = 2\pi \frac{W_\rho}{W_r}$

W_ρ - запасенная в контуре энергия

W_r - потери энергии за период

3. Критический (граничный) режим: $\alpha = \omega_0$ —> $r = 2\rho$

$Q = 1/2$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{—>} \quad p_1 = p_2 = -\alpha$$

Система для определения констант A_1, A_2 вырождается: ее определитель обращается в нуль, само же решение для $u(t)$ (и для $i(t)$) будет содержать неопределенность вида 0/0.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = U_0 \\ \alpha A_1 + \alpha A_2 = \dfrac{I_0}{C} \end{cases}$$

Если раскрыть неопределенность, рассмотрев предел при $\omega_0 \to \alpha$, то решение имеет вид:

$$u(t) = (A_3 + A_4 t)e^{-\alpha t}$$

константы A_3 и A_4 находятся из начальных условий.

Процесс имеет апериодический характер.