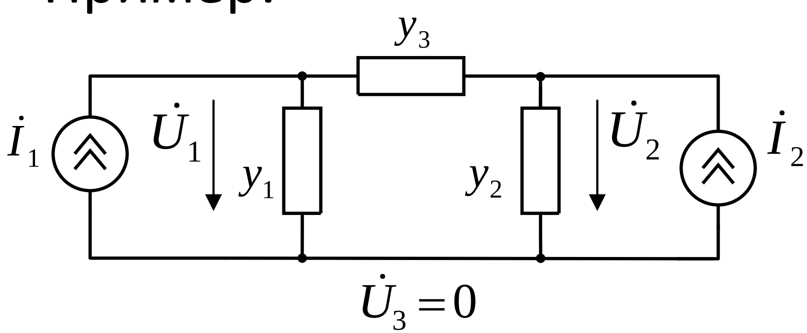
## 2.9. Метод узловых потенциалов.

Отыскиваются потенциалы узлов —>

—> определяются напряжения на ветвях и токи в них.

Пример:




$\dot{U}_3 = 0$ - опорный узел

По 1-му закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = y_1\dot{U}_1 + y_3(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) \\ \dot{I}_2 = y_2\dot{U}_2 + y_3(\dot{U}_2 - \dot{U}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (y_1 + y_3)\dot{U}_1 - y_3\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = -y_3\dot{U}_1 + (y_2 + y_3)\dot{U}_2 \end{cases}$$

В общем случае, если схема содержит $q$ узлов, получается $q$–1 уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = y_{11}\dot{U}_1 + y_{12}\dot{U}_2 + \ldots + y_{1,q-1}\dot{U}_{q-1} \\ \dot{I}_2 = y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 + \ldots + y_{2,q-1}\dot{U}_{q-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{I}_{q-1} = y_{q-1,1}\dot{U}_1 + y_{q-1,2}\dot{U}_2 + \ldots + y_{q-1,q-1}\dot{U}_{q-1} \end{cases}$$

Последний $q$-й узел принят за опорный (базисный), выбор опорного узла произволен.

$\dot{I}_k$ - суммарный ток всех источников, втекающих в $k$-й узел (берутся только те источники, которые непосредственно соединены с данным узлом)

$y_{kk}$ - собственная проводимость $k$-го узла (сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в данном узле)

$y_{km}$ - проводимость связи между $k$-м и смежным с ним $m$-м узлом (сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих эти узлы, взятая всегда со знаком «минус» при выбранном направлении отсчета узловых потенциалов к базовому узлу, независимо от того, является ли схема планарной или непланарной)

Решение: $\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{q-1} \dot{I}_m \Delta_{mk}, \quad k = 1, 2, \ldots, q-1,$ $\Delta$ - определитель системы

$\Delta_{mk}$ - алгебраическое дополнение элемента $y_{mk}$

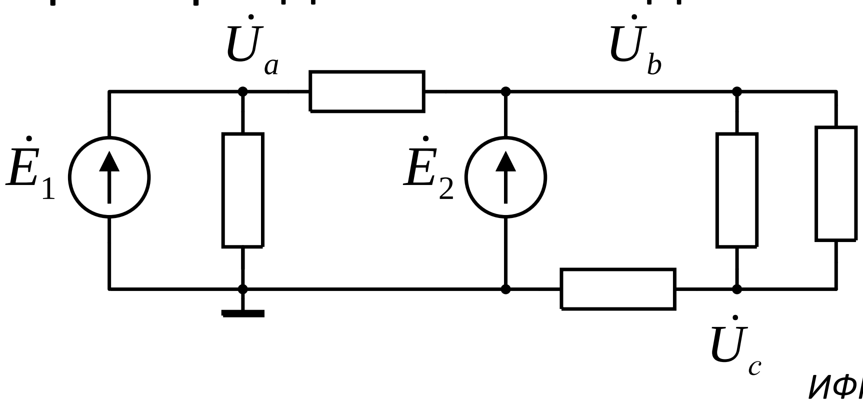
Замечания:

**1.** Уравнение для узловых потенциалов записаны в предположении, что схема содержит только источники тока. Если имеются источники напряжения, то их можно предварительно заменить эквивалентными источниками тока:

$$\dot{I}_{г} = \dot{E} y_{г}$$

**2.** При наличии ветвей с идеальными ЭДС ($y_{г}=\infty$) удобно базисный узел выбрать так, чтобы эти ветви к нему непосредственно примыкали, тогда противоположные узлы этих ветвей будут иметь уже известные узловые потенциалы, т.е. число неизвестных уменьшается.

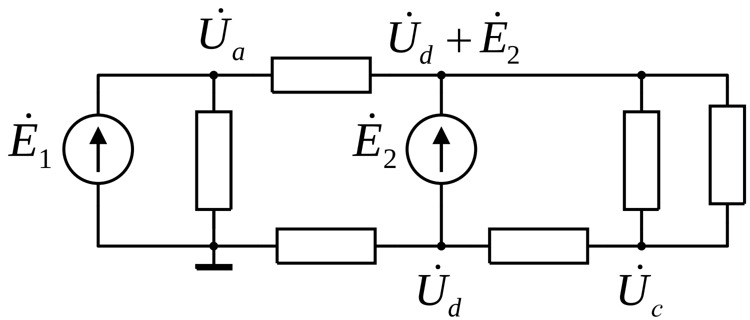
Пример: здесь только один неизвестный потенциал $\dot{U}_C$




$$\dot{U}_a = \dot{E}_1$$

$$\dot{U}_b = \dot{E}_2$$

**3.** Если не удается «заземлить» все ветви с идеальными ЭДС, т.е. остаются ветви с ЭДС, не примыкающие к базисному узлу, то к системе уравнений для неизвестных потенциалов следует добавить дополнительные уравнения, связывающие разности потенциалов узлов с известными ЭДС.



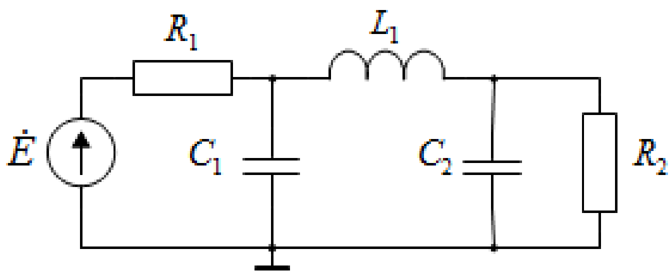

$$\dot{U}_a = \dot{E}_1$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_d + \dot{E}_2$$

Уравнения получаются из 1-го закона Кирхгофа для токов, которые выражены через потенциалы узлов с учетом 2-го закона.

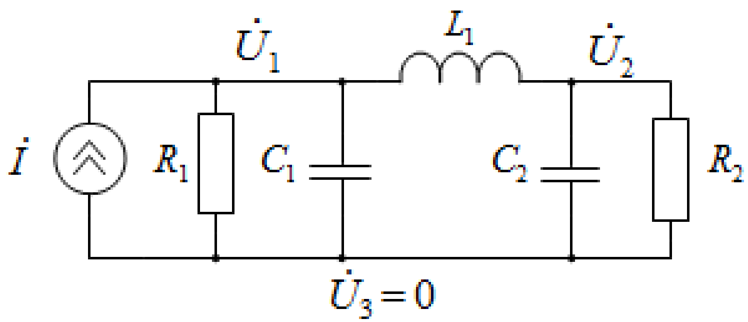
Если схема содержит $q$ узлов и $n$ независимых контуров, то при $n<q-1$ удобнее метод контурных токов, а при $n>q-1$ — метод узловых потенциалов.

Пример (ФНЧ на *LC*):




Три независимых контура и $q$–1=2 независимых узла, т.е. удобнее метод узловых потенциалов.

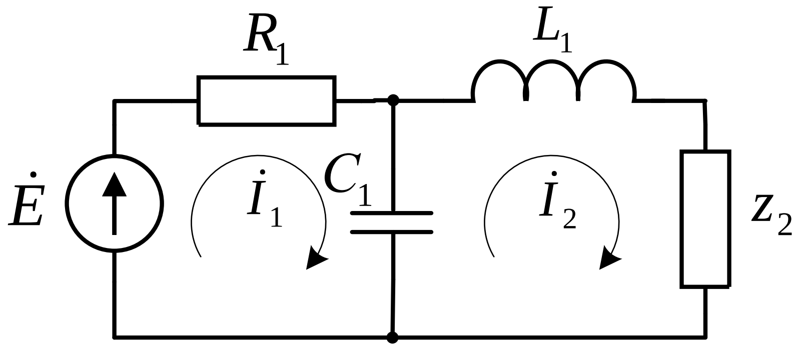
$\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{R_1}$ - заменяем источник $\dot{E}$




$$\left.\begin{aligned} \dot{I} = \frac{\dot{E}}{R_1} &= y_{11}\dot{U}_1 + y_{12}\dot{U}_2 \\ 0 &= y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned}\right\}$$

$$y_{11} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}, \qquad y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{j\omega L_1}, \qquad y_{22} = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_1}.$$

Другое решение: Параллельные ветви $R_2$, $C_2$ не содержат ЭДС и их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением $z_2$




$$z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

Число независимых контуров сокращается до двух и по методу контурных токов получится система двух уравнений с двумя неизвестными:

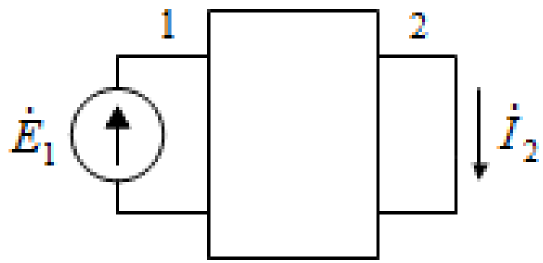
$$\left.\begin{aligned} \dot{E} &= z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 \\ 0 &= z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 \end{aligned}\right\}$$

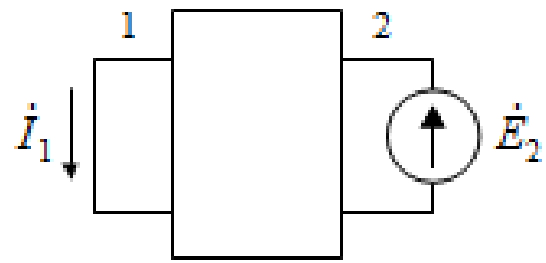
$$z_{11} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}, \quad z_{12} = z_{21} = -\frac{1}{j\omega C_1}, \quad z_{22} = z_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}.$$

## 2.10. Теорема взаимности.

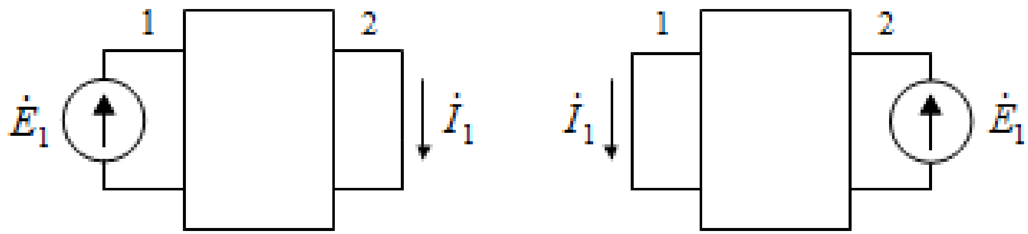
Взаимные (или обратимые) цепи:

Выберем в цепи два произвольных провода «1» и «2». ЭДС $E_1$, помещенная в 1-м проводе, вызывает ток $I_2$ во втором, а $E_2$ во 2-м проводе вызывает в первом ток $I_1$. Цепь называется взаимной (обратимой), если $I_2 / E_1 = I_1 / E_2$ .



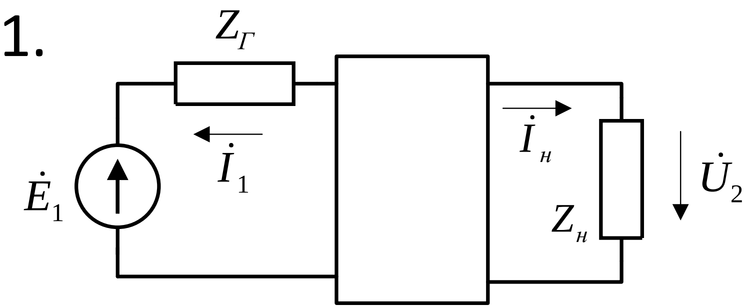




Частный случай $E_1 = E_2$ и $I_1 = I_2$ : Пусть ЭДС, действующая в каком-либо проводе цепи, вызывает в другом проводе некоторый ток. Тогда та же ЭДС, перенесенная во второй провод, будет вызывать в первом проводе точно такой же ток (по амплитуде и фазе).




Теорема: любая цепь, состоящая из сопротивлений, индуктивностей и емкостей, является взаимной.

Замечания: 1.




$$K = \dot{U}_н / \dot{E}_1 = \frac{z_н \dot{I}_н}{\dot{E}_1}$$

Если $z_Г = z_н = z_0$ , то перемена местами генератора и нагрузки фактически сводится к переносу $\dot{E}_1$ со входа на выход.

цепь взаимна —> $\dot{I}_н = \dot{I}_1$ —> $K_{обр} = \frac{z_0 \dot{I}_н}{E_1} = K$

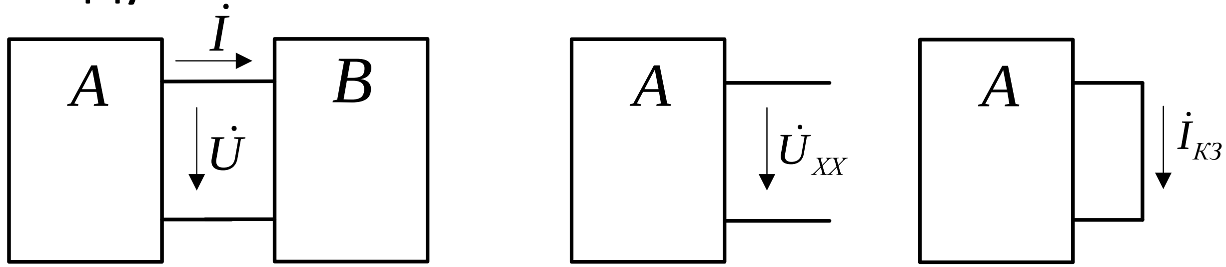
$P_н = |\dot{I}_н|^2 \operatorname{Re} z_0 = P_{z0}$ - акт. мощность одинакова в обоих направлениях

Цепь одинаково передает сигнал как вперед, так и назад, отсюда и термин — обратимость.

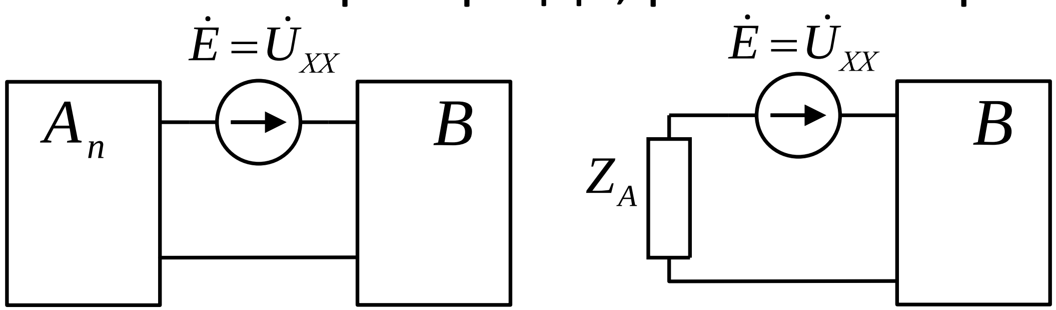
## 2.11. Теорема об эквивалентном источнике.

$\boldsymbol{A}$ - активный двухполюсник, $\boldsymbol{B}$ - внешняя цепь

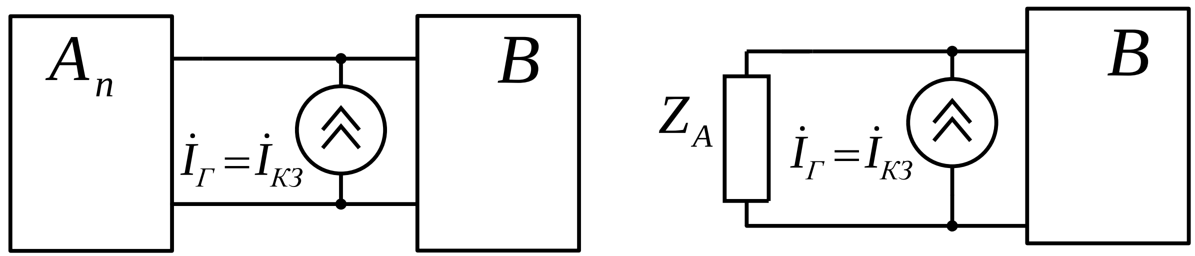
Между частями $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ нет магнитной связи.




1. **Теорема об эквивалентном источнике напряжения (теорема Тевенина)**: токи и напряжения во внешней цепи $\boldsymbol{B}$ не изменятся, если заменить двухполюсник $\boldsymbol{A}$ пассивным двухполюсником $\boldsymbol{A_n}$ (закоротив идеальные ЭДС и разомкнув идеальные источники тока), и последовательно с ним включить идеальный генератор ЭДС, равной напряжению холостого хода:



2. **Теорема об эквивалентном источнике тока (теорема Нортона)**: токи и напряжения во внешней цепи $\boldsymbol{B}$ не изменятся, если заменить $\boldsymbol{A}$ таким же пассивным двухполюсником $\boldsymbol{A_n}$ и параллельно ему включить идеальный генератор тока $\dot{I}_{\text{г}} = \dot{I}_{кз}$




Направления отсчета $\dot{E}$ и $\dot{I}_{\text{г}}$ соответствуют выбору направлений отсчета $\dot{U}_{xx}$, $\dot{I}_{кз}$

Замечания:

1. Схемы с эквивалентными источниками правильно описывают процессы во внешней цепи $\boldsymbol{B}$;

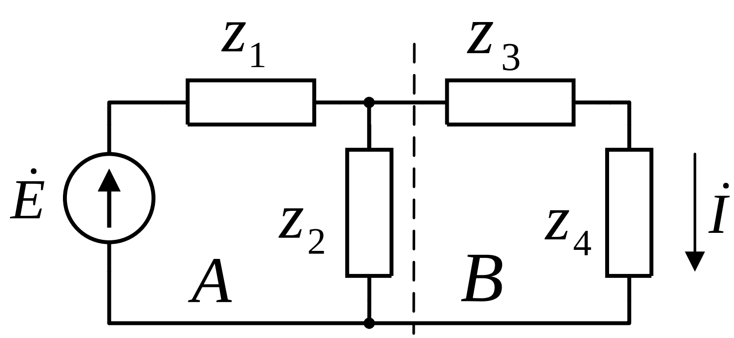
про двухполюсник $\boldsymbol{A}$ этого сказать нельзя!

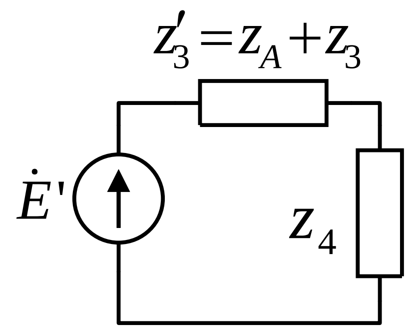
2. Цепь $\boldsymbol{B}$ может быть как пассивной, так и активной. Более того, она может быть нелинейной. Взаимность $\boldsymbol{A}$ не обязательна.

3. На практике можно определить параметры эквивалентного источника, не зная схемы $\boldsymbol{A}$. Достаточно измерить $\dot{U}_{xx}$, $\dot{I}_{кз}$ , по ним определяется

$$z_A = \frac{\dot{U}_{xx}}{\dot{I}_{кз}}$$

Пример: ток через $z_4$ - ?




$$\dot{E}' = \dot{E}\,\frac{z_2}{z_1 + z_2}, \quad z_3' = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} + z_3 \qquad \longrightarrow \qquad \dot{I} = \frac{\dot{E}'}{z_3' + z_4}$$