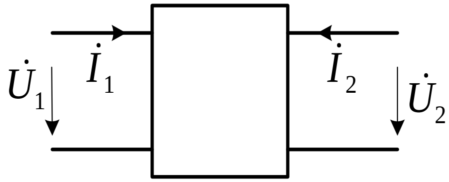
2.7. Комплексный коэффициент передачи.



$\dot{F}_2$ -реакция (ток или напряжение) цепи на внешнее воздействие $\dot{F}_1$ (ток или напряжение).

$\dot{K}(j\omega) = \dfrac{\dot{F}_2}{\dot{F}_1}$ - комплексный коэффициент передачи, (передаточная функция или передаточная характеристика).

$\dot{K}(j\omega)$ - может быть безразмерным, может иметь размерность сопротивления или проводимости

Зависимость $\left|\dot{K}(j\omega)\right|$ от частоты - Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) цепи.

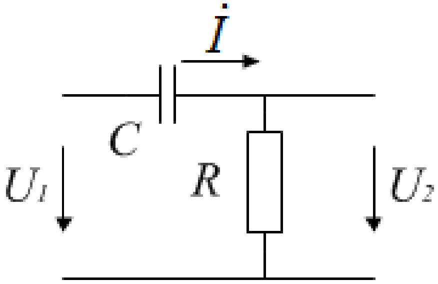
Полоса пропускаемых частот — область частот, в которой $\left|\dot{K}(j\omega)\right|$ снижается не более чем в $\boldsymbol{M}$ раз относительно максимального значения.

$M = \sqrt{2}$ - соответствует снижению мощности в два раза.

Зависимость $\arg \dot{K}(j\omega)$ от частоты - Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) цепи.

Примеры расчета простейших цепей:

а) Дифференцирующая цепь



$$\dot{U}_1 = \dot{I}\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right), \quad \dot{U}_2 = \dot{I}R = \dot{U}_1 \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \dot{U}_1 \frac{j\omega RC}{1 + j\omega CR}$$

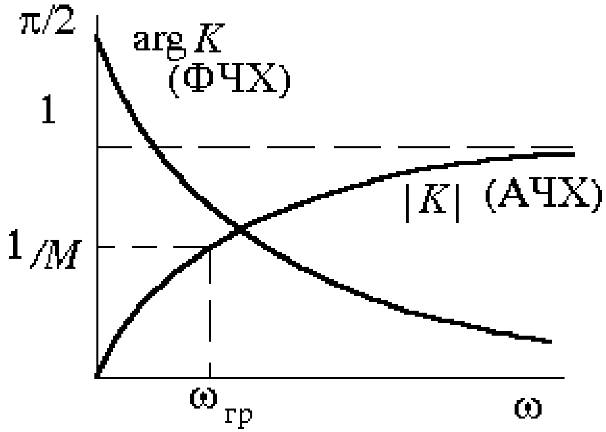
$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega CR}$$ -передаточная функция

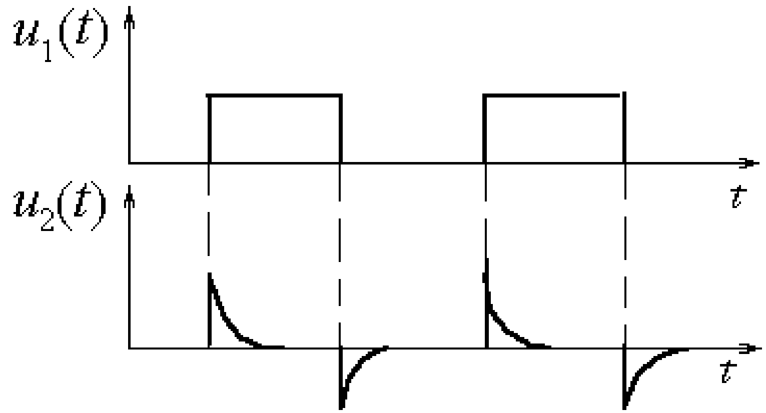
АЧХ: $$\left|K(j\omega)\right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Выделим вещественную и мнимую части:

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega CR} = \frac{j\omega RC \cdot \left(1 - j\omega CR\right)}{1 + \left(\omega CR\right)^2} = \frac{\left(\omega CR\right)^2 + j\omega RC}{1 + \left(\omega CR\right)^2}$$

ФЧХ: $$\arg \dot{K}(j\omega) = arctg \frac{1}{\omega RC}$$





Цепь одинаково хорошо пропускает высокие частоты, но ослабляет низкие, а постоянную составляющую напряжения ($\omega=0$) совсем не пропускает - простейший <u>фильтр верхних частот</u> (ФВЧ).

$$\left|\dot{K}(j\omega)\right|_{\max} = 1 \quad \text{—>} \quad \frac{\omega_{ГР}RC}{\sqrt{1+(\omega_{ГР}RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{—>}$$

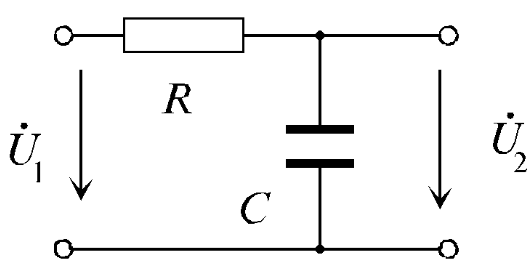
$$2\left(\omega_{ГР}RC\right)^2 = 1+(\omega_{ГР}RC)^2 \quad \text{—>} \quad \varpi_{ГР} = \frac{1}{RC}$$

При ω < $\omega_{\text{гр}}$ имеем $K(j\omega) \approx j\omega RC$. Умножению КА на $j\omega$ соответствует дифференцирование во времени самого колебания. Поэтому на частотах ω < $\omega_{\text{гр}}$ данная цепь работает как <u>дифференцирующая цепь</u>:

$$u_2(t) \approx RC\,\frac{du_1}{dt}$$

Дифференцирование осуществляется тем точнее, чем меньше ω по сравнению с $\omega_{\text{гр}}$, сигнал при этом сильно ослабляется.

б) Интегрирующая цепь:



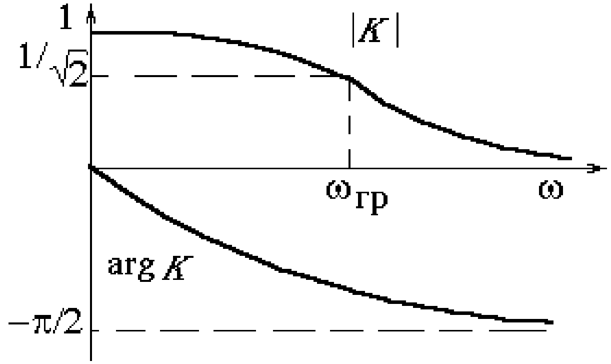
$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = \dot{U}_1 \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}, \text{ откуда } K(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

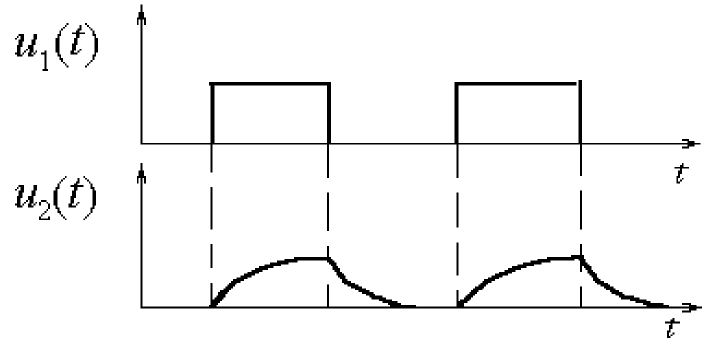
АЧХ: $|\dot{K}(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$

АЧХ при малых ω находится на уровне около 1, а далее уменьшается как 1/ω

ФЧХ: $\arg \dot{K}(j\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega RC)$

ФЧХ начинается от 0 и стремится к $-\pi/2$.





Граничная частота $\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega_{ГР}RC)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ —> $\omega_{ГР}=\dfrac{1}{RC}$

Простейший фильтр нижних частот (ФНЧ)

$0<\varpi<\varpi_{ГР}$ - сигнал почти не искажается.

$\varpi>\varpi_{ГР}$ —> $\dot{K}(j\omega)\approx\dfrac{1}{j\omega RC}$ —> деление на $j\omega$ означает интегрирование колебания во времени (<u>интегрирующая цепь</u>):

$$u_2(t)\approx\frac{1}{RC}\int u_1(t)dt$$

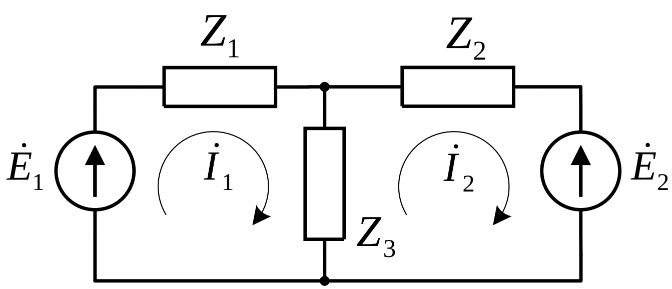
Интегрирование эта цепь выполняет приближенно, оно тем точнее, чем дальше ω от $\omega_{гр}$, но при этом цепь вносит значительное ослабление сигнала.

При использовании законов Кирхгофа число уравнений равно числу ветвей. Для уменьшения числа уравнений (и неизвестных величин) используют методы контурных токов, узловых потенциалов и эквивалентных генераторов.

2.8. Метод контурных токов.

Вместо токов ветвей вводятся вспомогательные так называемые контурные токи. При этом ток в каждой ветви либо совпадает с одним из контурных токов, либо является алгебраической суммой нескольких контурных токов.

Пример: $n = p - q + 1 = 2$ - независимых контуров



2-ой закон Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = z_1\dot{I}_1 + z_3(\dot{I}_1 - \dot{I}_2), \\ -\dot{E}_2 = z_3(\dot{I}_2 - \dot{I}_1) + z_2\dot{I}_2. \end{cases}$$

По 1-му закону Кирхгофа ток через z_3 равен: $(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = (z_1 + z_3)\dot{I}_1 - z_3\dot{I}_2, \\ -\dot{E}_2 = -z_3\dot{I}_1 + (z_2 + z_3)\dot{I}_2 \end{cases}$$

$z_1 + z_3$ - собственное сопротивление первого контура

z_3 - сопротивление связи первого и второго контуров. Знак минус у сопротивления связи появляется вследствие того, что в общей ветви направления контурных токов были выбраны противоположными.

Общий случай:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = z_{11}\dot{I}_1 + z_{12}\dot{I}_2 + \ldots + z_{1n}\dot{I}_n \\ \dot{E}_2 = z_{21}\dot{I}_1 + z_{22}\dot{I}_2 + \ldots + z_{2n}\dot{I}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{E}_n = z_{n1}\dot{I}_1 + z_{n2}\dot{I}_2 + \ldots + z_{nn}\dot{I}_n \end{cases}$$

n - число независимых контуров,

$\dot{I}_k$ - контурный ток k-го контура,

$\dot{E}_k$ - контурная ЭДС (сумма всех ЭДС, действующих в k-м контуре, с учетом их направлений по отношению к направлению контурного тока),

z_{kk} - собственное сопротивление k-го контура (сумма сопротивлений всех его ветвей, все со знаком «+»)

$z_{km}\ (k \neq m)$ - сопротивление связи *k*-го и *m*-го контуров (сопротивление общей ветви со знаком «+», если токи $\dot{I}_k$ и $\dot{I}_m$ в ней направлены одинаково, и со знаком «–», если противоположно; оно равно нулю, если контуры *k* и *m* не имеют общих элементов).

Итак, с помощью 1-го закона Кирхгофа выражаются токи ветвей через контурные токи и подставляются в уравнения 2-го закона Кирхгофа. Число неизвестных (и число уравнений) по данному методу равно числу независимых контуров, т.е. меньше, чем число всех ветвей.

Решение:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \dot{E}_1 & z_{12} & . & z_{1n} \\ \dot{E}_2 & z_{22} & . & z_{2n} \\ . & . & . & . \\ \dot{E}_n & z_{n2} & . & z_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} z_{11} & \dot{E}_1 & . & z_{1n} \\ z_{21} & \dot{E}_2 & . & z_{2n} \\ . & . & . & . \\ z_{n1} & \dot{E}_n & . & z_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и т.д.,}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & . & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & . & z_{2n} \\ . & . & . & . \\ z_{n1} & z_{n2} & . & z_{nn} \end{vmatrix}$$

- главный определитель системы

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + \ldots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{n1}}{\Delta}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + \ldots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{n2}}{\Delta}$$

$$\dot{I}_n = \dot{E}_1 \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} + \ldots + \dot{E}_n \frac{\Delta_{nn}}{\Delta}$$

- разложение числителя по элементам столбца, содержащего ЭДС.

Δ_{km} - алгебраическое дополнение элемента z_{km} определителя Δ (произведение минора этого элемента на $(-1)^{k+m}$)

$$\Delta_{km} = (-1)^{k+m} \left| \begin{array}{ccc|cc} z_{11} & \ldots & z_{1m} & \ldots & z_{1n} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{k1} & \ldots & z_{km} & \ldots & z_{kn} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n1} & \ldots & z_{nm} & \ldots & z_{nn} \end{array} \right|$$

отмеченные строка и столбец вычеркиваются

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^{n} \dot{E}_m \Delta_{mk}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

- общее решение

Замечания:

1. Если схема содержит идеальные генераторы тока, то эти токи целесообразно выбирать в качестве контурных, тогда число неизвестных контурных токов уменьшается на число известных токов генераторов.

2. При наличии в схеме параллельных ветвей, не содержащих ЭДС, замена их одним эквивалентным комплексным сопротивлением сокращает число контуров.

3. В планарной схеме всегда можно выбрать систему независимых контуров так, что во всех сопротивлениях связи токи смежных контуров будут направлены встречно. Например, для этого достаточно взять в качестве независимых контуров так называемые ячейки, и направить все контурные токи по часовой стрелке (или все — против).

В непланарной схеме в общем случае не представляется возможным иметь в общих ветвях только разности контурных токов.