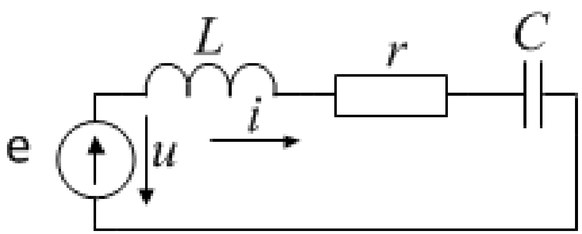
2.2. Метод комплексных амплитуд

Гармонические колебания напряжения на зажимах элементов *L*, *R*, или *C* вызывает протекание гармонического тока такой же частоты. Дифференцирование, интегрирование и сложение функций вида $A\sin(\omega t)$, $B\cos(\omega t)$ приводит к функциям того же вида.

Пример:



Известно: $u = e(t) = U_m \cos(\varpi t + \varphi_u)$

Найти: $i = I_m \cos(\varpi t + \varphi_i)$

$$u = \mathrm{Re}[U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}] = \mathrm{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}], \quad \dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$$ j — мнимая единица

$$i = \mathrm{Re}[I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}] = \mathrm{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}], \quad \dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i} \qquad j^2 = -1$$

Определение: <u>Комплексная амплитуда</u> (КА) гармонического колебания — это комплексное число, модуль которого равен амплитуде колебания, а аргумент — начальной фазе.

Подставим КА в дифференциальное уравнение цепи:

$$\dot{U}_m e^{j\omega t}, \quad \dot{I}_m e^{j\omega t} \xrightarrow{\text{подставляем}} L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = u$$

Операции интегрирования и дифференцирования над i, u перестановочны с операцией $\boldsymbol{Re}$. Следовательно, если указанные комплексные функции будут удовлетворять уравнению, то и их вещественные и мнимые части будут ему удовлетворять также.

$e^{j\omega t}$- сокращается: $j\omega L\dot{I}_m + R\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m = \dot{U}_m$ —> $\dot{I}_m = \dfrac{\dot{U}_m}{R + j\varpi L + \dfrac{1}{j\omega C}}$

<u>Метод КА</u> для общего случая:

Вместо истинных токов, напряжений, ЭДС в уравнения цепи подставляются функции вида $\dot{A}_m e^{j\omega t}$, где $\dot{A}_m$ - КА соответствующего колебания. При этом дифференцирование сводится к умножению на $j\omega$, а интегрирование — к делению на $j\omega$, и множитель $e^{j\omega t}$ во всех уравнениях сокращается.

В результате получаются алгебраические уравнения для КА, решив которые, найдем амплитуду и начальную фазу любого нужного нам колебания, а также его явный вид $a(t) = \mathrm{Re}\{\dot{A}_m e^{j\omega t}\}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_\partial &= \dot{U}_m/\sqrt{2} \\ \dot{I}_\partial &= \dot{I}_m/\sqrt{2} \end{aligned}\right\}$$

комплексные действующие значения (КДЗ), для них справедливы те же самые уравнения.

Законы Кирхгофа при переходе к КА сохранят свой вид (т.к. сложению колебаний отвечает сложение их КА):

1-й закон Кирхгофа: $\sum_k \dot{I}_k = 0$ для каждого узла;

2-й закон Кирхгофа: $\sum_k \dot{U}_k = 0$ для каждого контура;

Уравнения связи тока и напряжения в пассивных элементах для КА:

сопротивление	индуктивность	емкость
$\dot{U} = R\dot{I}$	$\dot{U} = j\omega L\dot{I} = \omega L\dot{I}\cdot e^{j\pi/2}$	$\dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \frac{1}{\omega C}\dot{I}\cdot e^{-j\pi/2}$

Сложение, дифференцирование и другие операции над колебаниями разных амплитуд и фаз заменяются простыми алгебраическими действиями с комплексными числами. Одновременно достигается компактность в записи уравнений и законов цепей, а также возможность наглядного представления чисел векторами на плоскости.

2.3. Комплексные сопротивления и проводимости.

Комплексное сопротивление цепи (импеданс):

$$z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = r + jx$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{U} = z\dot{I}$$

$$z = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \qquad |z| = \left|\frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}}\right| = \frac{U_m}{I_m}\left|e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}\right| = \frac{U_m}{I_m}$$

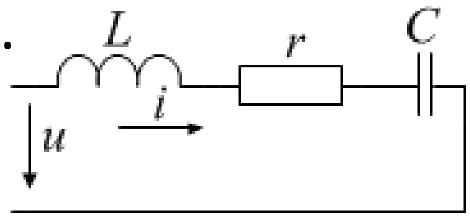
Модуль z равен отношению амплитуд напряжения и тока, а аргумент z — разности фаз напряжения и тока.

Комплексная проводимость цепи (адмитанс):

$$y = \frac{1}{z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = g + jb$$

Примеры:

$$z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

1. 

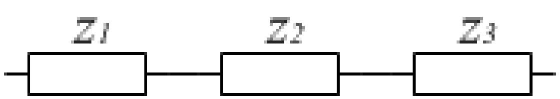
Активное сопротивление r

Реактивное сопротивление $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = x_L + x_C$

Индуктивное сопротивление $x_L = \varpi L > 0$

Емкостное сопротивление $x_C = -\frac{1}{\omega C} < 0$

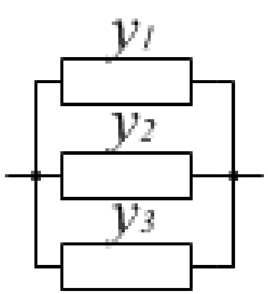
2. Последовательное соединение элементов



$$\dot{U} = z_1\dot{I} + z_2\dot{I} + z_3\dot{I} = (z_1 + z_2 + z_3)\dot{I}$$

$$z = \sum_{(k)} z_k \qquad R = \sum_{(k)} R_k, \quad L = \sum_{(k)} L_k, \quad \frac{1}{C} = \sum_{(k)} \frac{1}{C_k}$$

3. Параллельное соединение элементов

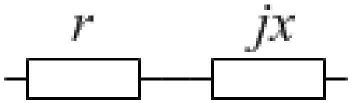


$$\dot{I} = y_1\dot{U} + y_2\dot{U} + y_3\dot{U} = (y_1 + y_2 + y_3)\dot{U}, \text{ т.е. } \quad y = \sum_{(k)} y_k$$

$$g = \sum_{(k)} g_k, \quad C = \sum_{(k)} C_k, \quad \frac{1}{R} = \sum_{(k)} \frac{1}{R_k}, \quad \frac{1}{L} = \sum_{(k)} \frac{1}{L_k}$$

$$jb_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L};\; jb_C = j\omega C$$, т. е. $$b_L < 0,\; b_C > 0$$

4. Пересчет последовательных схем в параллельные и обратно:

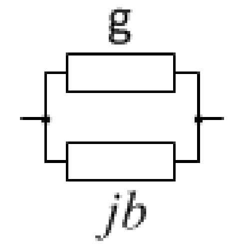


$$z = r + jx$$

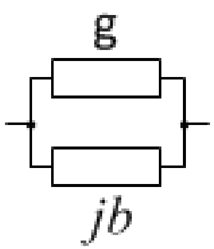
$$y = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = g + jb$$

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2}$$

$$b = -\frac{x}{r^2 + x^2}$$



Обратная задача:

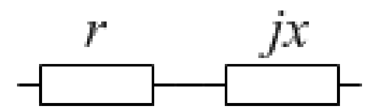


$$y = g + jb$$

$$z = \frac{1}{g + jb} = \frac{g - jb}{g^2 + b^2}$$

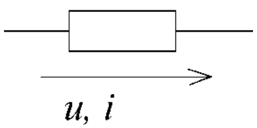
$$r = \frac{g}{g^2 + b^2}$$

$$x = -\frac{b}{g^2 + b^2}$$



Реактивные части z и y одной и той же цепи всегда имеют разные знаки, а у активных частей знаки всегда одинаковые (положительные, если цепь пассивна)

2.4. Мощность в цепи гармонического тока



$$i = I_m \cos(\varpi t + \varphi_i)$$

$$u = U_m \cos(\varpi t + \varphi_u)$$

Мгновенная мощность:

$$p = ui = U_m I_m \cos(\varpi t + \varphi_u) \cdot \cos(\varpi t + \varphi_i) = \frac{1}{2} U_m I_m \left[\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\varpi t + \varphi_u + \varphi_i)\right]$$

Используем: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$

Средняя мощность (активная мощность):

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos\varphi = U_\partial I_\partial \cos\varphi \qquad \varphi = \varphi_u - \varphi_i \qquad [P] = Bm$$

В пассивных двухполюсниках всегда $\boldsymbol{P \geq 0}$, в активных же может быть $\boldsymbol{P < 0}$ (мощность не поглощается, а отдается во внешнюю цепь)

Для пассивной цепи: $\dot{U} = z\dot{I},\ U_\partial = |z| I_\partial,\ P = I_\partial^2 |z| \cos\varphi = r I_\partial^2$

Аналогично: $r = \operatorname{Re} z = |z| \cos\varphi$

$$\dot{I} = y\dot{U}, \quad I_\partial = |y| U_\partial, \quad P = U_\partial^2 |y| \cos\varphi = g U_\partial^2$$

r и $g > 0$ —> $\cos\varphi \geq 0$ —> $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$

Для сопротивления: $\varphi_u - \varphi_i = 0$ —> $\cos\varphi = 1$ —> $P = U_\partial I_\partial$

Для индуктивности: $\varphi_u - \varphi_i = \dfrac{\pi}{2}$ —> $\cos\varphi = 0$ —> $P = 0$

Для емкости: $\varphi_u - \varphi_i = -\dfrac{\pi}{2}$ —> $\cos\varphi = 0$ —> $P = 0$

$\cos\varphi$ - коэффициент мощности

Чем больше $\cos\varphi$, тем лучше используется оборудование.

<u>Полная</u> (кажущаяся) мощность: $S = U_\partial I_\partial$ $[S] =$ ВА (вольтампер)

<u>Реактивная</u> мощность: $Q = U_\partial I_\partial \cdot \sin\varphi$ $[Q] =$ ВАР (вольтампер реактивный)

Передача энергии определяется только величиной $\boldsymbol{P}$. Смысл $\boldsymbol{S}$ в том, что для питания нагрузки кроме мощности надо знать, какие напряжение и ток должен обеспечить генератор.

Смысл Q $$Q = I_\partial^2 |z| \sin\varphi = I_\partial^2 x = -U_\partial^2 b \text{ т.к.}$$

$$\sin\varphi = x / |z| = -b / |y|.$$

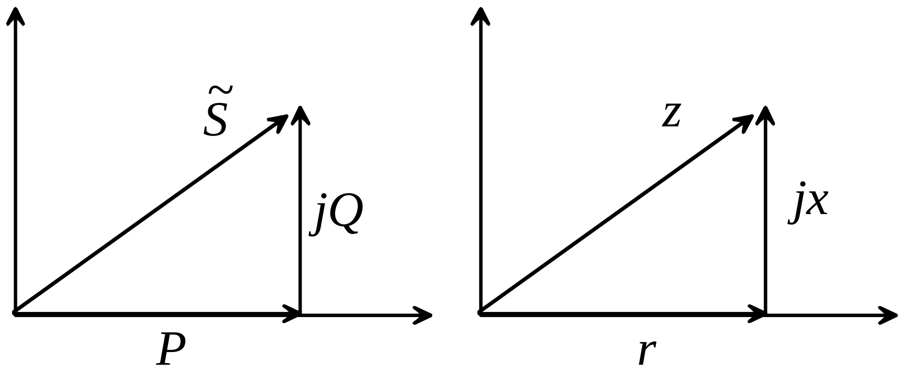
$$\text{Для } L: \quad Q_L = \omega L I_\partial^2 = \omega \frac{L I_m^2}{2} = \omega W_L > 0;$$

$$\text{для } C: \quad Q_C = -\omega C U_\partial^2 = -\omega \frac{C U_m^2}{2} = \omega W_C < 0.$$

Для реактивных элементов Q пропорциональна максимальной энергии, запасаемой реактивным элементом. Если цепь содержит L и C, то $Q = Q_L + Q_C = \varpi(W_L - W_C)$
то есть Q пропорциональна разности энергий магнитного и электрического полей. Возможна полная их компенсация, и тогда Q=0, при этом $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{C}$ обмениваются энергией друг с другом. Если же нет компенсации, то происходит частичный обмен энергией между реактивными элементами и внешней цепью, что увеличивает $\boldsymbol{S=U_\partial I_\partial}$ по сравнению с $\boldsymbol{P}$.

Комплексная мощность $\tilde{S} = \dot{U}_\partial \dot{I}_\partial^* = \frac{1}{2}\dot{U}_m \dot{I}_m^* = U_\partial I_\partial e^{j\varphi} = P + jQ$

$$S = |\tilde{S}| = |\dot{U}_\partial \dot{I}_\partial^*|, \quad P = \operatorname{Re}\tilde{S} = \operatorname{Re}(\dot{U}_\partial \dot{I}_\partial^*), \quad Q = \operatorname{Im}\tilde{S} = \operatorname{Im}(\dot{U}_\partial \dot{I}_\partial^*)$$



2.5. Уравнение баланса мощности

Уравнение баланса комплексной мощности: сумма комплексных мощностей, потребляемая всеми ветвями цепи, равна нулю:

$\sum\limits_{(n)} \dot{U}_n \dot{I}_n^* = 0,$ где n - номер ветви, $\dot{U}_n$ — напряжение на этой ветви, $\dot{I}_n^*$ - ток этой ветви (комплексно сопряженный).

$$\tilde{S} = P + jQ \quad \begin{cases} \sum\limits_{(n)} P_n = 0, & \text{— уравнение баланса активной мощности} \\ \sum\limits_{(n)} Q_n = 0, & \text{— уравнение баланса реактивной мощности} \end{cases}$$

Первое уравнение выражает закон сохранения энергии: средняя мощность, вырабатываемая всеми источниками (для них $P<0$), равна средней мощности, потребляемой остальными элементами (для них $P>0$). Второе уравнение не имеет столь наглядной энергетической трактовки.

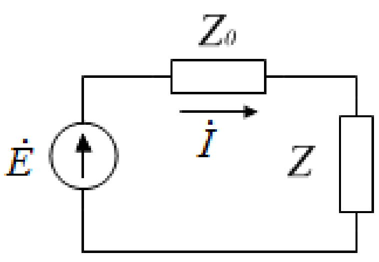
Справедливо также: $\sum\limits_{(n)} \dot{U}_n \dot{I}_n = 0$ (без комплексного сопряжения)

Баланс мгновенной мощности $$\sum_{(n)} u_n(t) \cdot i_n(t) = 0$$

- колебания здесь не обязательно гармонические, а цепь не обязательно линейная — лишь бы выполнялись законы Кирхгофа.

Уравнения баланса мощности часто используют для контроля правильности найденного решения (расчета).

2.6. Условие передачи максимальной мощности от генератора в нагрузку



$z_0 = r_0 + jx_0$ - внутреннее сопротивление генератора

$z = r + jx$ - сопротивление нагрузки

Требуется определить z, при которой активная мощность максимальна

$P - \max$

$z - ?$

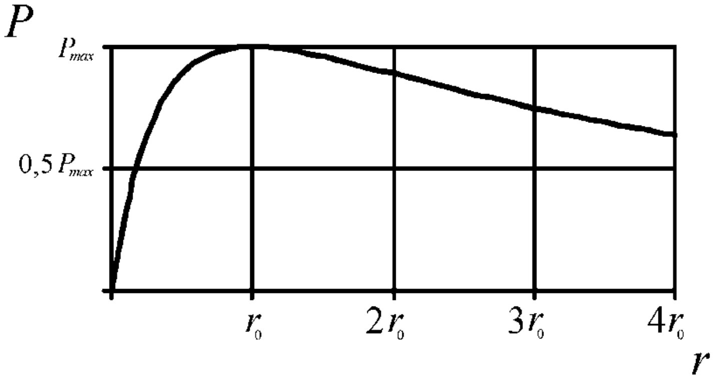
$$P = |\dot{I}_\partial|^2 r, \text{ где } \dot{I}_\partial = \frac{\dot{E}_\partial}{z + z_0} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{|\dot{E}_\partial|^2 r}{|z + z_0|^2} = \frac{E_\partial^2 r}{(r + r_0)^2 + (x + x_0)^2}$$

$$x = -x_0 \quad \longrightarrow \quad P = \frac{E_\partial^2 r}{(r + r_0)^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{dP}{dr} = E_\partial^2 \frac{(r + r_0)^2 - r \cdot 2(r + r_0)}{(r + r_0)^4} = 0$$

$$r = r_0 \qquad r^2 + 2r \cdot r_0 + r_0^2 - 2r^2 - 2r \cdot r_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad r_0^2 - r^2 = 0$$

$z = z_0^*$ — условие согласования генератора и нагрузки

$P_{\max} = \dfrac{E_\partial^2}{4r_0}$ — макс. мощность в нагрузке



$$P_{0\ \max} = \frac{E_\partial^2}{4r_0}$$ мощность в сопротивлении генератора

$КПД = 50\,\%$ - в режиме согласования

В электроэнергетике ставится задача получить заданную полезную мощность при минимальных затратах, для этого делают $r_0 << r$

В радиотехнике ставится задача - при имеющихся энергетических возможностях передать максимум полезной мощности в нагрузку.

Для многих реальных источников сопротивление z_0 не обязательно связано с реальными потерями мощности, оно есть лишь отношение $\dot{U}_{xx} / \dot{I}_{кз}$ (напряжения холостого хода к току короткого замыкания), не более того, и вместе с $\dot{E}$ служит для эквивалентного представления источника.

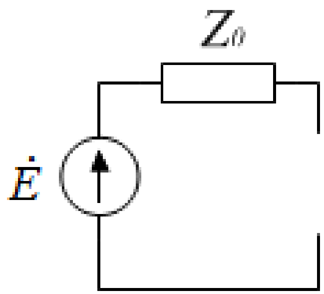


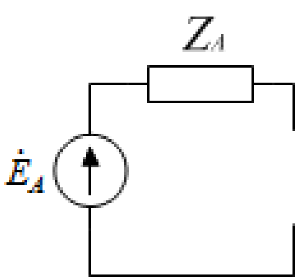
Схема эквивалентна источнику лишь в том смысле, что она позволяет правильно рассчитывать процессы во внешней цепи. Однако она не обязательно правильно отображает процессы в самом генераторе.

В электроэнергетике схема правильно отражает внутренние процессы в генераторе переменного тока.

$\dot{E}$ - ЭДС электромагнитной индукции,

$z_0 = r_0$ - омическое сопротивление обмотки, в которой затрачивается бесполезная мощность, превращающаяся в тепло.

В приемной антенне простая схема не соответствует эксперименту:



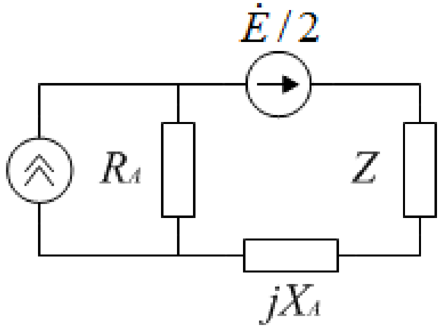
$\dot{E}_A$- ЭДС, наведенная в антенне падающей на нее волной

Z_A - входное сопротивление антенны в режиме передачи отражает излучение в пространство. В согласованном режиме половина мощности переизлучится в

в пространство, что не соответствует эксперименту.

Для устранения противоречия возможна другая схема:

$$\dot{I}_Г = \frac{\dot{E}}{2R_A}$$



$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R_A + jX_A + z}$$ - ток во внешней цепи такой же

Если $z = Z_A^*$ (антенна согласована с нагрузкой), токи через R_A от источника тока и ЭДС компенсируют друг друга. Мощность, расходуемая в R_A, равна нулю, соответственно, ***КПД=1***.

При рассогласовании мощность в R_A появляется и *КПД<1* за счет того, что антенна переизлучает часть мощности обратно в пространство.

В большинстве радиотехнических устройств стремятся по возможности обеспечить передачу максимальной мощности от генератора, т.е. осуществить режим согласования.