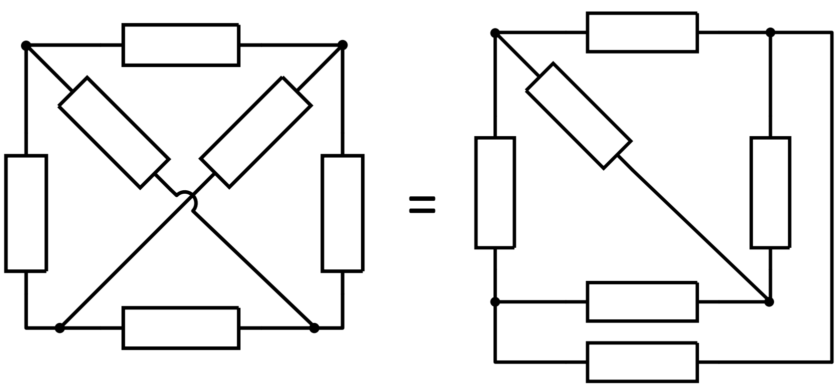
1.6 Структура схемы электрической цепи.

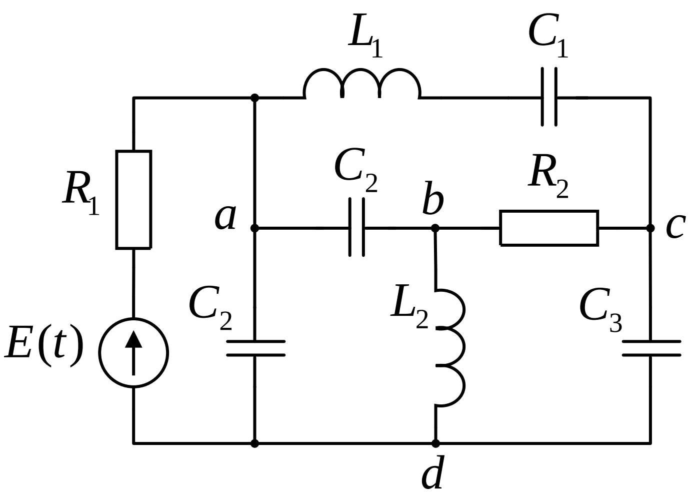
Цепи с сосредоточенными параметрами - протяженность каждого элемента в пространстве не имеет никакого значения для решаемой задачи (не входят в выражения для напряжений и токов ввиду квазистационарности полей).

При последовательном соединении через все элементы течет одинаковый ток, при параллельном — все элементы находятся под одинаковым напряжением.



Планарная цепь - провода нигде не перекрещиваются.
Непланарная цепь - провода перекрещиваются.

Узел — точка, где соединяются провода от трех и большего числа элементов, Ветвь — путь между двумя смежными узлами, проходящий через один или несколько последовательно соединенных элементов, Контур — любой замкнутый путь, проходящий по ветвям (не более одного раза по каждой).



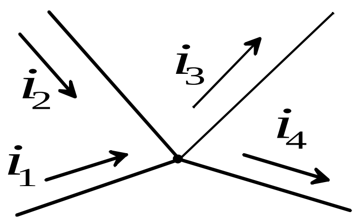
Пример: 4 узла (a, b, c, d), и 7 ветвей

Общий случай: p ветвей и q узлов

Число контуров $s=p-q+1$.

1.7 Законы Кирхгофа

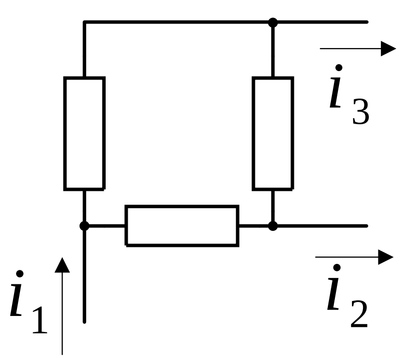
Первый закон Кирхгофа (вытекает из равенства нулю полного тока через замкнутую поверхность, окружающую узел): алгебраическая сумма токов, входящих в любой узел, равна нулю: $\sum_{(m)} i_m = 0$, i_m - ток *m*-ой ветви.



$$i_3 + i_4 - i_1 - i_2 = 0$$

Вытекающим токам удобнее присваивать знак «минус»

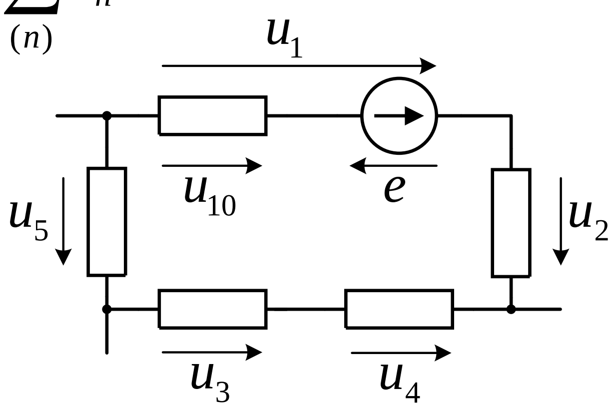
Обобщение: Для любой замкнутой поверхности, охватывающей любую часть схемы, алгебраическая сумма втекающих токов, равна нулю.



$$i_3 + i_2 - i_1 = 0$$

<u>Второй</u> закон Кирхгофа: в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех ветвях равна нулю:

$$\sum_{(n)} u_n = 0$$



Пример:

$$\left(u_{10} - e\right) + u_2 + \left(-u_4 - u_3\right) - u_5 = 0$$

$$\left(u_{10} - e\right) = u_1$$

Второй закон Кирхгофа вытекает из равенства нулю магнитного потока через контур, поскольку путь контура проходит только через внешние зажимы элементов, а магнитные поля считаются сосредоточенными внутри индуктивных элементов.

Кол-во независимых уравнений по 1-му закону Кирхгофа: q–1

По 2-му: $s=p-q+1$,

Итого: $(q-1)+p-q+1=p$

Для каждой ветви можем написать соотношение между током и напряжением, вытекающее из свойств элементов, содержащихся в этой ветви – это еще *p* – уравнений. Всего имеем *2p* уравнений, Количество неизвестных тоже *2p* (токи и напряжения ветвей).

Если в каких либо ветвях есть источники тока, то в этих ветвях значения токов равно токам источников. Количество уравнений по 2-му закону Кирхгофа сокращается на число источников тока.

Для полного описания процессов в цепи достаточно уравнений, которые получаются из законов Кирхгофа и из соотношений связи между током и напряжением для каждого элемента.

Для многополюсного элемента (транзистор, трансформатор) учитываются уравнения связи между токами и напряжениями на его зажимах, а для всех участков цепи должны выполняться законы Кирхгофа.

1.8. Принцип дуальности в теории цепей.

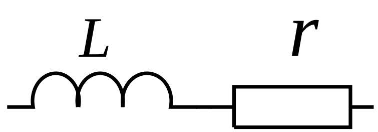
$u = R \cdot i$	$i = G \cdot u$	резистивные элементы
$u = L \dfrac{di}{dt}$	$i = C \dfrac{du}{dt}$	реактивные элементы
$u = e - R_{\text{г}} i$	$i = i_{\text{г}} - G_{\text{г}} u$	источники
$\sum\limits_{(\text{контур})} u = 0$	$\sum\limits_{(\text{узел})} i = 0$	законы Кирхгофа

Соотношения переходят друг в друга, если одновременно поменять местами $u \leftrightarrow i,\ e \leftrightarrow i_{\text{г}},\ R \leftrightarrow G,\ L \leftrightarrow C$

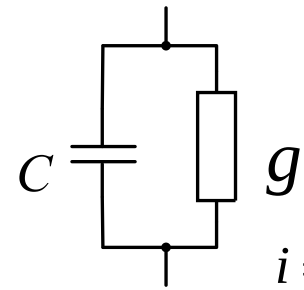
Отмеченное соответствие называется <u>дуальностью</u> (перестановочной двойственностью).

Законы цепей подчиняются принципу дуальности: <u>Каждый закон теории цепей обладает своим дуальным аналогом</u>, который также является законом теории цепей.

Для каждой цепи можно найти ее дуальный аналог, т.е. такую цепь, уравнения которой получаются путем дуальной замены величин в исходной цепи. При этом токам в первой цепи, которые в каждом узле подчиняются 1-му закону Кирхгофа, соответствуют напряжения во второй цепи, подчиняющиеся для каждого контура 2-му закону Кирхгофа, и наоборот. В частности, последовательному соединению элементов в исходной цепи соответствует параллельное соединение в дуальной цепи, и обратно.



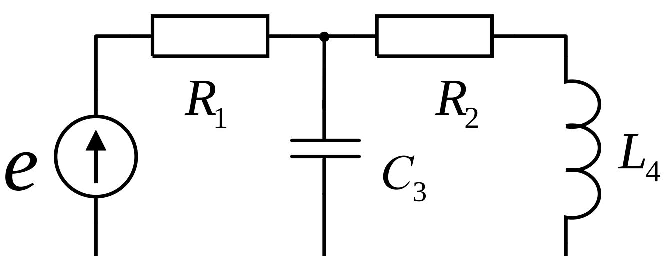
<->



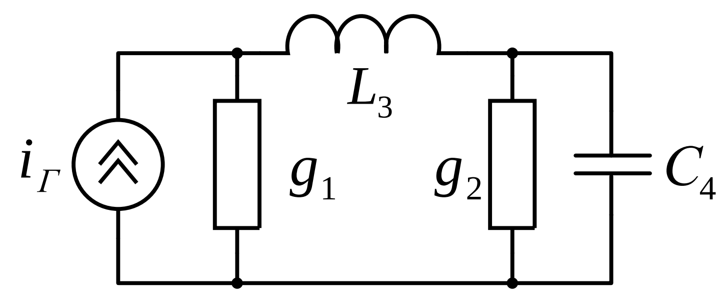
$$u = L\frac{di}{dt} + ri$$

$$i = C\frac{du}{dt} + gu$$

Пример:



<->



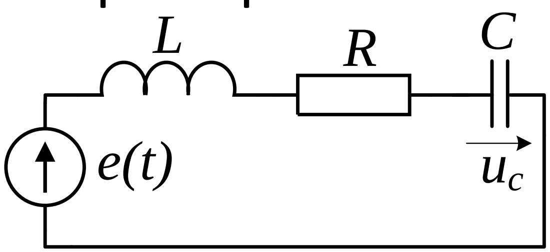
1.9. Уравнения, описывающие процессы в электрических цепях. Принцип суперпозиции и область его применимости.

1. Задачи анализа: отыскание токов и напряжений в цепи, возникающих под действием заданных источников. Задача анализа всегда имеет единственное решение.

Задача синтеза — построить цепь, которая обладала бы заранее заданными свойствами. При строгой постановке задача синтеза может вообще не иметь решения, а если решение и есть, то оно не обязательно единственное.

2. Если известна схема, то мы можем для нее написать уравнения по 1-му и 2-му законам Кирхгофа, а также уравнения связи между напряжением и током в каждом элементе. Число полученных при этом независимых уравнений равно числу неизвестных токов и напряжений, входящих в уравнения.

Пример:



$$\left.\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + Ri + u_c &= e(t) \\ i = C\frac{du_c}{dt} & \end{aligned}\right\} LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = e(t)$$

В общем случае для цепи с *m* неизвестными токами и напряжениями можно записать систему *m* дифференциальных уравнений 1-го порядка, которая может быть сведена к дифференциальному уравнению порядка $n \leq m$ (поскольку некоторые неизвестные могут не входить под знак *d*/*dt*):

$$a_n\frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{ds}{dt} + a_0 s = f(t) \qquad (*)$$

$s(t)$ - искомая функция - ток или напряжение какой-либо ветви

$f(t)$ - функция, в которую входят все $e(t)$ и $i_г(t)$ (известны)

$a_n, \ldots, a_0$ - коэффициенты, в которые входят параметры цепи (R, L, C)

Если заданы <u>токи</u> во всех индуктивностях и <u>напряжения</u> на всех емкостях в начальный момент времени $t=0$, решение уравнения <u>существует и единственно</u>.

С физической точки зрения это означает, что мы можем однозначно предсказать все процессы в цепи, если известны действующие на нее внешние силы $e(t)$, $i(t)$, а также значения $i(0)$, $u(0)$, которые определяют начальный запас энергии в цепи.

Все цепи с точки зрения колебательных процессов в них, разделяются на три класса: **линейные, нелинейные и параметрические**.

3. Уравнения, выражающие законы Кирхгофа всегда являются **линейными**, а уравнения связи между u и i в элементах цепи могут быть и нелинейными.

В общем случае:

$$u_R(t) = u[i(t)] = R(i)i, \quad \text{где} \quad R(i) = \frac{u(i)}{i}$$

($u(i)$ - Вольт-амперная характеристика)

$$u_L(t) = \frac{d\psi}{dt} = L(i)\frac{di}{dt}, \quad \text{где} \quad L(i) = \frac{d\psi}{di}$$

$$i_c(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dQ}{du}\frac{du}{dt} = C(u)\frac{du}{dt}, \quad \text{где} \quad C(u) = \frac{dQ}{du}.$$

Если $u(i)$, $Q(u)$, $\psi(i)$ — линейные функции, то R, L, C — постоянные величины, следовательно в уравнении (*) все коэффициенты — постоянные, не зависящие от u, i. Цепь, процессы в которой описываются **линейными дифференциальными уравнениями**, называется **линейной**.

В противном случае цепь считается **нелинейной**. Для нее коэффициенты a_n ,...,a_0 зависят от токов и напряжений, уравнение (*) является нелинейным.

Важный частный случай нелинейных цепей – **параметрические:**

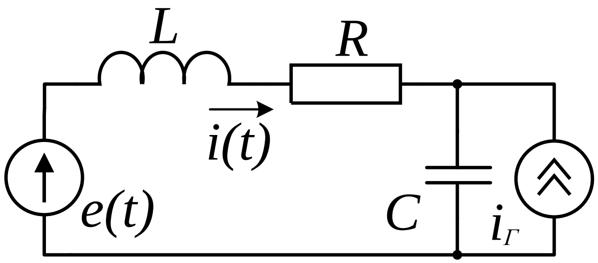
внешнее воздействие $f(t)$ является суммой двух колебаний $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$, причем $|f_1|<<|f_2|$. Тогда можно положить, что $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$, где $s_2(t)$ — реакция на $f_2(t)$ при $f_1(t)=0$, причем $|s_1|<<|s_2|$. Если пренебречь величинами s_1^2, s_1^3 ,... по сравнению с s_1 , то из (*) получится для s_1 линейное дифференциальное уравнение, его коэффициенты не зависят от s_1, но будут зависеть от t (через $s_2(t)$). Это уравнение описывает линейную (для s_1!) цепь, параметры которой меняются со временем под действием $f_2(t)$.

4. Принцип суперпозиции (выполняется только для линейных цепей): реакция линейной цепи на сумму двух (или нескольких) воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности.

$$\left.\begin{array}{l} s_1(t)\ \text{решение (*) при}\ f(t)=f_1(t) \\ s_2(t)\ \text{решение (*) при}\ f(t)=f_2(t) \end{array}\right\}\ s_1(t)+s_2(t)\ \text{решение (*), при}\ f_1(t)+f_2(t)$$

при $A\,f_1(t)$ решение (*) есть $A\,s_1(t)$

Пример:



$$L\frac{di}{dt}+Ri+u_C=e, \qquad i=C\frac{du_c}{dt}-i_г;$$

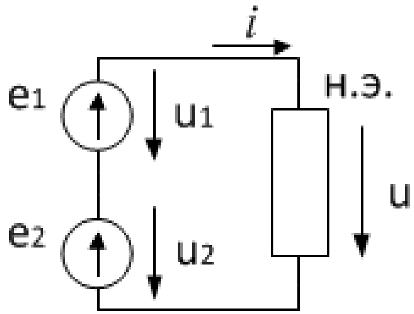
$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=e+Ri_г+L\frac{di_г}{dt}.$$

По принципу суперпозиции:

1. $i_г$=0 (размыкаем $i_г$) —> решение $u_{C1}(t)$
2. e=0 (замыкаем e) —> решение $u_{C2}(t)$
3. Складываем : $u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{C2}(t)$

Принцип суперпозиции справедлив и для параметрических цепей. Линейные цепи с постоянными параметрами отличаются дополнительно еще тем, что если $s(t)$ есть отклик на $f(t)$, то откликом на $f(t+\tau)$ будет $s(t+\tau)$ (τ=const), то есть инвариантностью по отношению к произвольному сдвигу во времени. Параметрические цепи данным свойством не обладают.

Нелинейные цепи **не** подчиняются принципу суперпозиции.



$$u = u_1 + u_2$$

$$i = au + bu^2$$ - квадратичная ВАХ

$$i = a(u_1 + u_2) + b(u_1 + u_2)^2 = au_1 + bu_1^2 + au_2 + bu_2^2 + 2bu_1u_2 \neq i_1 + i_2$$

По принципу суперпозиции:

$$i_1 = au_1 + bu_1{}^2$$

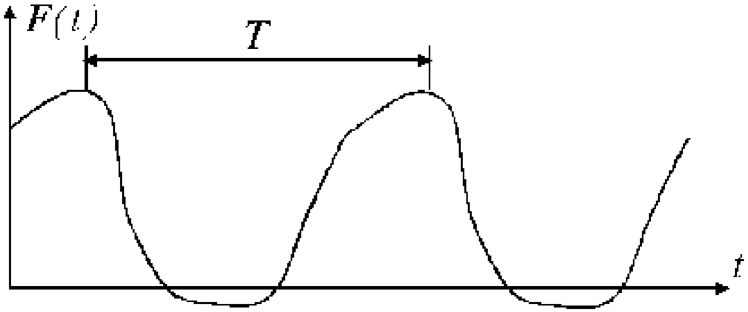
$$i_2 = au_2 + bu_2{}^2$$

$$i = i_1 + i_2 = au_1 + bu_1^2 + au_2 + bu_2^2$$

- ответ неверный

2. Гармонические колебания в линейных электрических цепях

2.1. Основные характеристики гармонических колебаний



Периодический процесс – значения изменяющейся величины повторяются через равные промежутки времени.

$F(t+T)=F(t)$

T – период, $f=1/T$ — частота колебаний, размерность $[f]=Гц=c^{-1}$

Гармоническое колебание: $a(t)=A_m \cos(\omega t+\varphi)=A_m \sin(\omega t+\varphi_0)$.

A_m — амплитуда, $\omega t+\varphi$ — фаза колебания в момент t,
φ — начальная фаза, ω — угловая (круговая) частота.
$\omega T=2\pi$ —> $\omega=2\pi/T=2\pi f$. Размерность $[\omega]$=рад/сек

Разность фаз двух колебаний с одинаковой частотой:

$$\varphi_{12}=\omega t+\varphi_1-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2=\mathrm{const}(t)$$

Характеристики периодического и гармонического колебаний.

Среднее значение (постоянная составляющая):

$$a_{cp} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{T+t_1} a(t)dt = \frac{1}{T}\int\limits_{(T)} a(t)dt$$

Для гармонического колебания: $a_{cp} = 0$

Средневыпрямленное значение $$\left|a\right|_{cp} = \frac{1}{T}\int\limits_{(T)} \left|a(t)\right|dt$$

Для гармонических колебаний :

$$\left|a\right|_{cp} = \frac{2}{T}A_m\int\limits_{0}^{T/2}\sin\omega t dt = -\frac{2A_m}{\omega T}\cos(\omega t)\Big|_0^{\pi} = \frac{A_m}{\pi}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{2}{\pi}A_m$$

Действующее (среднеквадратичное) значение:

$$A_{\partial} = \sqrt{(a^2)_{cp}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_{(T)} a^2(t)dt}$$

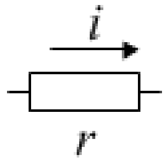
Для гармонического колебания:

$$A_{\partial}^2 = \frac{A_m^2}{T}\int\limits_{(T)}\cos^2\omega t dt = \frac{A_m^2}{T}\int\limits_{(T)}\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt = \frac{A_m^2}{2}, \qquad A_{\partial} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$$

Любой переменный ток $i(t)$ нагревает сопротивление так же, как постоянный ток величиной I_∂.

Протекание гармонического тока через идеальные пассивные элементы:

<u>Сопротивление:</u>



$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u = ri = rI_m \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow U_m = rI_m \;, \Delta\varphi = 0$$

Мгновенная мощность:

$$p = U_m I_m \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{U_m I_m}{2}\left[1 + \cos 2(\omega t + \varphi)\right]$$

Используем соотношение: $\cos^2 \alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

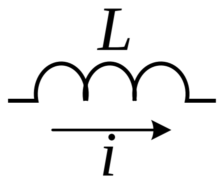
Мгновенная мощность меняется в пределах: $0 \le p \le U_m I_m$

$$p \ge 0$$

Средняя мощность

$$P = p_{cp} = \frac{1}{2} U_m I_m = U_\partial I_\partial = I_\partial^2 r$$

Индуктивность



$$i = I_m \cos\omega t$$

$$u = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin\omega t = \omega L I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на $\pi/2$.

$U_m = \omega L I_m$ $\quad\quad$ $x_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление

Мгновенная мощность: $p = -U_m I_m \cos\omega t \sin\omega t = -U_\partial I_\partial \sin 2\omega t$

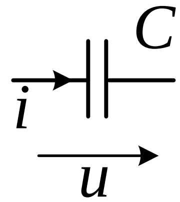
Используем соотношение: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Мгновенная мощность меняется в пределах: $-U_\partial I_\partial \le p \le U_\partial I_\partial$

Энергия в течение некоторого времени запасается в индуктивности (p>0), а затем отдается в цепь (p<0). Происходит обмен энергией между индуктивностью и остальной цепью.

Средняя мощность: $P_{cp} = 0$

Емкость



$$u = U_m \sin \omega t$$

$$i = C\frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Напряжение на емкости отстает по фазе от тока на $\pi/2$

$I_m = \omega C U_m$ $\quad U_m = \frac{1}{\omega C} I_m$ $\quad \left|x_c\right| = \frac{1}{\omega C}$ - модуль емкостного сопротивления

Мгновенная мощность: $p = U_m I_m \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = U_\partial I_\partial \sin(2\omega t)$

Мгновенная мощность меняется в пределах: $-U_\partial I_\partial \le p \le U_\partial I_\partial$

Энергия в течение некоторого времени запасается в емкости (*p*>0), а затем отдается в цепь (*p*<0). Происходит обмен энергией между индуктивностью и остальной цепью.

Средняя мощность: $P_{cp}=0$