

5.11. Круговые диаграммы сопротивлений и проводимостей

Согласно теории функций комплексной переменной, дробно-линейная функция

$$\Gamma = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1}$$

осуществляет конформное отображение прямоугольной сетки линий $\bar{R} = Const$ $\bar{X} = Const$ плоскости комплексной переменной $\bar{Z} = \bar{R} + j\bar{X}$ в окружности на плоскости комплексной переменной Γ .

При этом правая полуплоскость ($\bar{R} \geq 0$) отображается в круг единичного радиуса $|\Gamma| \leq 1$

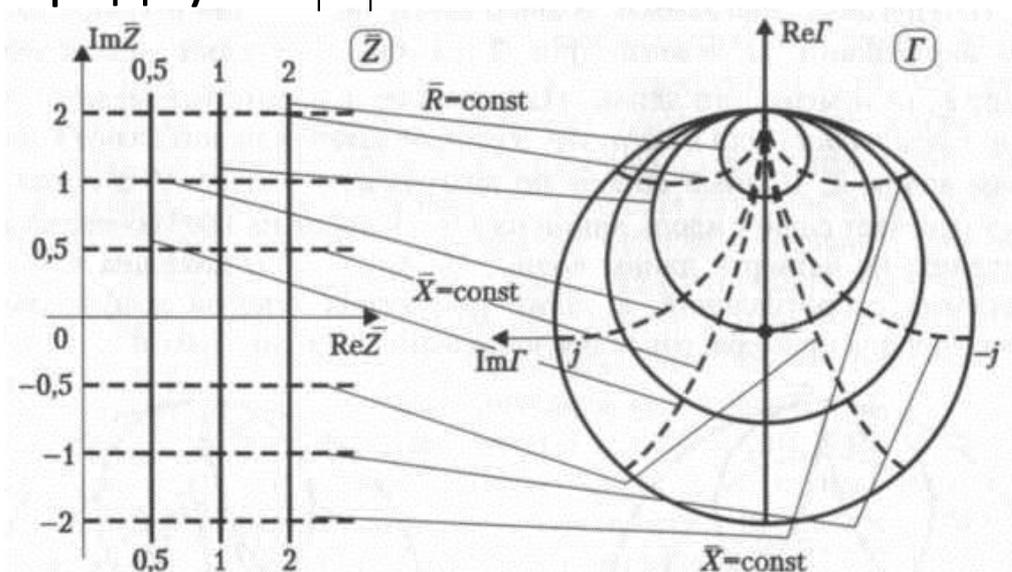
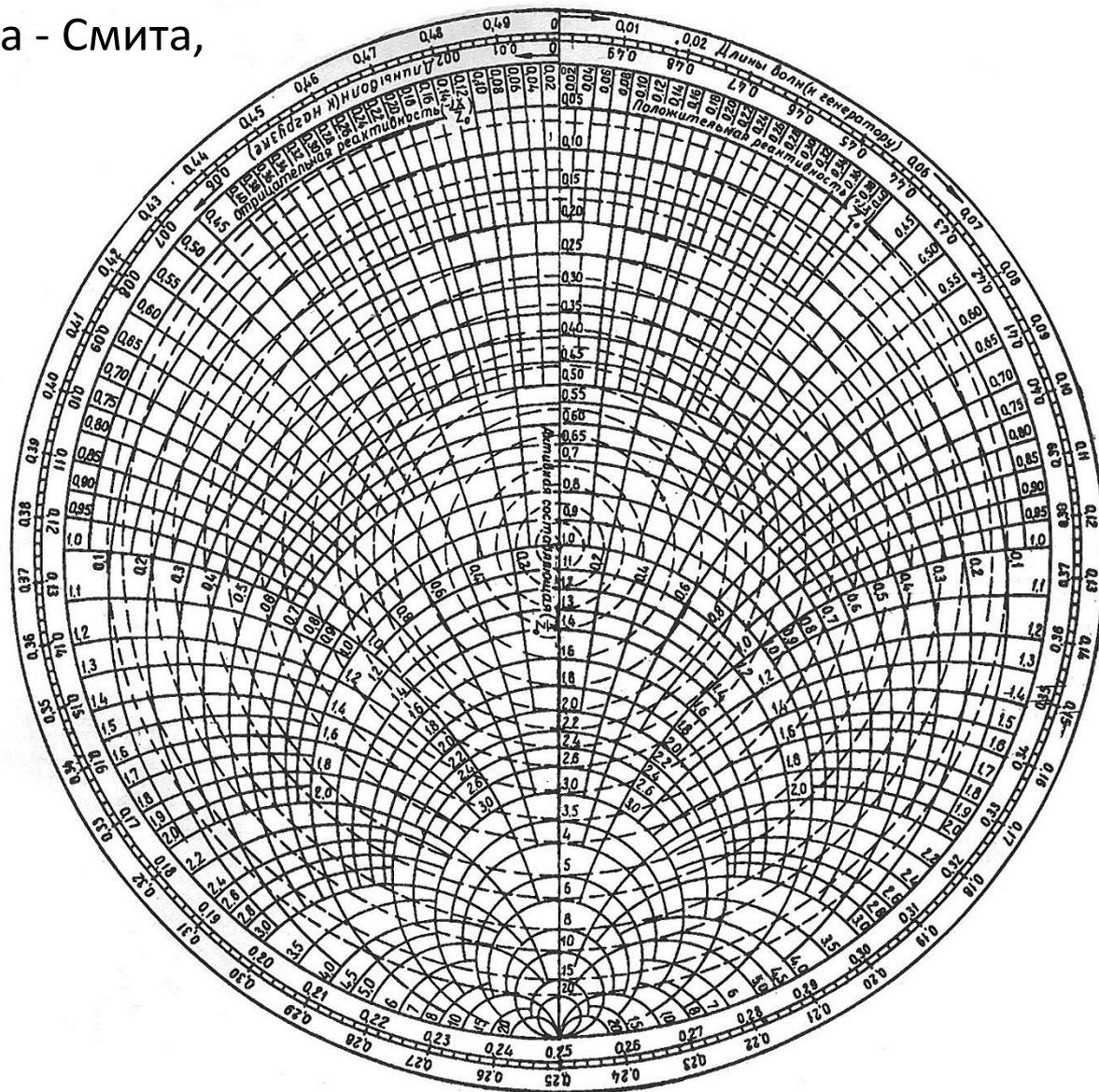


Диаграмма полных сопротивлений и проводимостей,
диаграмма Вольперта - Смита,
диаграмма Смита



Для нормированной проводимости $\bar{Y} = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma}$ $\bar{Z} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$

Проводимость \bar{Y} отличается от \bar{Z} только знаком Γ . Поэтому диаграмма проводимостей представляет собой повернутую на 180° (вокруг центра) диаграмму сопротивлений. Следовательно, для расчета \bar{Z} и \bar{Y} достаточно одной диаграммы.

Круговые диаграммы позволяют:

1. По нормированным сопротивлениям (проводимостям) находить коэффициент отражения по напряжению (по току) и решать обратную задачу;
2. Находить комплексную проводимость по известному комплексному сопротивлению и наоборот;
3. Строить графики распределения амплитуд напряжения и тока вдоль линии; по результатам измерения распределения амплитуд напряжения или тока вдоль линии
4. Находить сопротивление (проводимость) в любом сечении линии;
5. Решать задачу согласования линии с нагрузкой, рассчитывать параметры согласующих устройств

5.12. Согласование длинной линии с нагрузкой

Режим бегущей волны является наиболее практичным для осуществления передачи энергии от генератора к нагрузке, т.к. при этом обеспечиваются:

- 1) наименьшие частотные искажения сигнала,
- 2) наибольший коэффициент полезного действия,
- 3) наибольшая допустимая передаваемая мощность (определяется пробивным напряжением кабеля).

Любое согласующее устройство должно сформировать в сечении длинной линии на минимальном расстоянии от нагрузки сопротивление, равное волновому сопротивлению линии W . Тогда на протяжении длинной линии от генератора до места включения согласующего устройства установится режим бегущей волны.

Согласование четвертьволновым трансформатором:

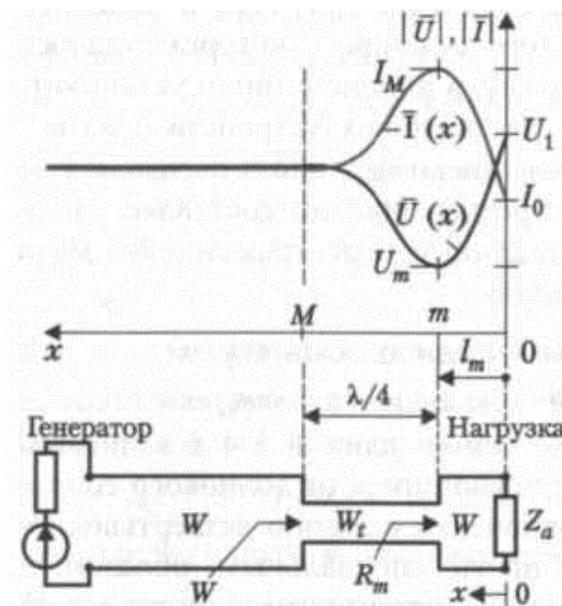
Место включения в линию четвертьволнового трансформатора — сечение, где входное сопротивление чисто активное (экстремумы).

$$l = \lambda/4 \rightarrow Z_l = W^2 / Z_a$$

Подбираем W_{tr} так, что $W = \frac{W_{tr}^2}{R_m} \rightarrow$

$$W_{tr} = \sqrt{WR_m} = W \sqrt{KБВ}$$

Согласование четвертьволновым трансформатором обеспечивает режим бегущей волны только на участке от генератора до места включения трансформатора.



Одношлейфное согласование:

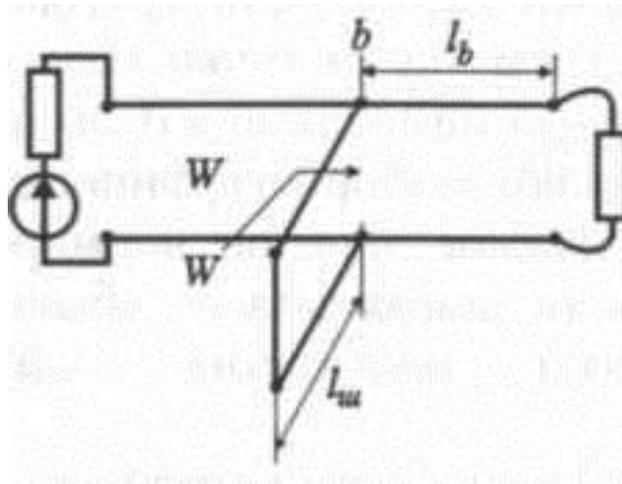
Отрезок длиной линии (шлейф) включается в сечение \mathbf{b} , где активная часть нормированной проводимости $\bar{G}_{\text{линии}} = 1$.

$$\bar{Y}_{\text{линии}} = \bar{G}_{\text{линии}} + j\bar{B}_{\text{линии}}$$

Длиной шлейфа компенсируют реактивность линии в этом сечении

$$B_{\text{линии}} = -B_{\text{шлейфа}}$$

Тогда в сечении \mathbf{b} : $\bar{Y}_b = 1 + j0$



5.13. Волновые процессы в длинных линиях с малыми потерями

Потери необходимо учитывать при значительной длине кабелей (более нескольких длин волн) и при резонансных явлениях.

Уравнения длинной линии

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \qquad -\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Для гармонических колебаний

$$-\frac{dI}{dx} = (g + j\omega C)\dot{U} \qquad -\frac{d\dot{U}}{dx} = (r + j\omega L)I$$

Мгновенные значения $i(x,t) = \text{Re}[I(x)e^{j\omega t}]$ $u(x,t) = \text{Re}[\dot{U}(x)e^{j\omega t}]$

Выражаем ток из второго уравнения, подставляем в первое

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U}$$

Обозначим $\gamma^2 = (r + j\omega L)(g + j\omega C)$ - постоянная распространения (фазовая постоянная)

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \gamma^2\dot{U} \qquad \frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I$$

Ищем решение в виде Ae^{sx}

Характеристическое уравнение $s^2 = \gamma^2 \rightarrow$ Корни $s_1 = +\gamma$
 $s_2 = -\gamma$

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{+\gamma x}$$

Тогда решение

$$I(x) = \frac{\gamma}{r + j\omega L} \cdot (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{+\gamma x})$$

Представим постоянные в виде

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} \quad W = \frac{r + j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}$$

$\gamma = \alpha + j\beta$ - постоянная распространения

α - постоянная затухания

β - фазовая постоянная

W - волновое сопротивление (комплексное)

Общее решение

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{+j\beta x}$$

$$\dot{I}(x) = \frac{1}{W} (A_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - A_2 e^{\alpha x} e^{+j\beta x})$$

Используя граничные условия, представим данное решение суперпозицией падающих и отраженных волн:

$$u(x,t) = u_{nad}(x,t) + u_{omp}(x,t) = |U_{nad}| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_{nad}) + |U_{omp}| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_{omp})$$

$$i(x,t) = i_{nad}(x,t) + i_{omp}(x,t) = |I_{nad}| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_{nad}) + |I_{omp}| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_{omp})$$

Отсчет координаты x ведется от сечения нагрузки.

Для комплексных амплитуд:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{nad}(0) e^{\alpha x} e^{j\beta x} + \dot{U}_{omp}(0) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$\dot{U}(x) = \dot{I}_{nad}(x) + \dot{I}_{omp}(x) = (\dot{U}_{nad}(0) e^{\alpha x} e^{j\beta x} - \dot{U}_{omp}(0) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}) / W$$

Бегущие волны затухают в направлении распространения: приближаясь к нагрузке, амплитуда падающей волны уменьшается, амплитуда отраженной волны увеличивается.

Приближение малых потерь (типично для высокочастотных диапазонов)

$$\begin{aligned} r &\ll \omega L \\ g &\ll \omega C \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

В этом приближении

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC} \left[1 - j\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\omega L} + \frac{g}{\omega C} \right) \right]$$

$$W = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 + j\frac{1}{2} \left(\frac{g}{\omega C} + \frac{r}{\omega L} \right) \right] \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Затухание $\alpha = 0.5(r\sqrt{C/L} + g\sqrt{L/C})$ и фазовая скорость $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ не зависят от частоты.

Следовательно, в длинной линии с малыми потерями при наличии только падающей волны искажений сигнала не будет.

Коэффициент передачи отрезка линии длиной l в режиме согласования (при отсутствии отраженной волны):

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_a}{\dot{U}_l} = e^{-\alpha l} e^{-j\omega\sqrt{LC}l}$$

Сигнал таким отрезком линии ослабляется по амплитуде пропорционально $\exp(-\alpha l)$ и задерживается на интервал времени $\tau = l\sqrt{LC}$.

Особое соотношение между погонными параметрами (условие Хевисайда) действует в случае с немалыми потерями в линии:

$$\frac{r}{L} = \frac{g}{C} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = r\sqrt{\frac{C}{L}} \\ \beta = \omega\sqrt{LC} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Фазовая скорость, а значит, и} \\ \text{задержка будет одинакова для всех} \\ \text{частот} \end{matrix}$$

→ Длинная линия сигналы практически не искажает

Модуль коэффициента отражения в линии с потерями падает при удалении от генератора

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{над}}(0)e^{\alpha x} e^{j\beta x} + \dot{U}_{\text{отр}}(0)e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$
$$\Gamma(0) = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(0)}{\dot{U}_{\text{над}}(0)}$$
$$\rightarrow \Gamma(x) = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{\dot{U}_{\text{над}}(x)} = e^{-2\alpha x} \exp(-j2\beta x)\Gamma(0)$$

Таким образом, при любой нагрузке «очень длинная линия» с потерями вблизи генератора ведет себя так же, как согласованная, поскольку амплитуда отраженной волны вблизи генератора сильно ослаблена.