5.4. Фазовая скорость и длина волны в линии

$\omega t+\beta x+\varphi_{пад}$ - полная фаза падающей волны

$\omega t-\beta x+\varphi_{отр}$ - полная фаза отраженной волны

Уравнение движения фазового фронта —> полная фаза = Const

$\omega t+\beta x+\varphi_{пад}=Const$ - дифференцируем по времени —>

$\omega+\beta\dot{x}=0$, $\dot{x}$ - скорость движения фазового фронта

$\dot{x}=-\omega/\beta$ - скорость движения фазового фронта падающей волны

$\dot{x}=\omega/\beta$ - скорость движения фазового фронта отраженной волны

Фазовая постоянная (волновое число) $\beta = \omega / v$ —> $\dot{x} = v$

Значение фазовой скорости совпадает с v — скоростью движения волны в линии (из решения волнового уравнения).

Скорость движения волны в линии (решение волнового уравнения) совпадает со скоростью движения фазового фронта:

$$v = 1/\sqrt{LC} = c/\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/\beta$$

За время, равное периоду T, фазовый фронт смещается на расстояние $vT = \lambda = v 2\pi/\omega = 2\pi/\beta$

λ— *длина волны в линии* - расстояние между точками, в которых фазы колебаний отличаются на 2π, то есть $\beta\lambda=2\pi$. —> $\beta=2\pi/\lambda$

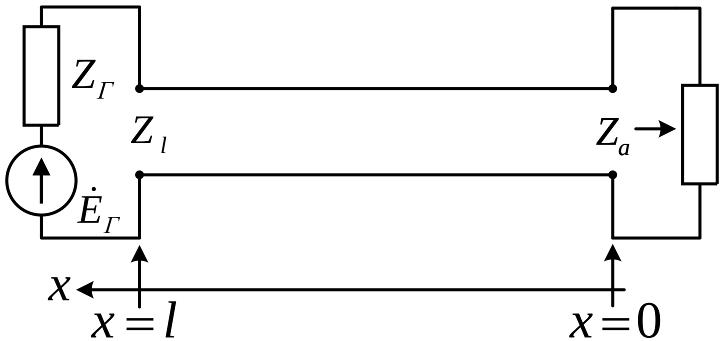
Длина волны в длинной линии будет такой же, как у волны, распространяющейся в однородном пространстве с теми же параметрами ε и μ. Если в линии передачи фазовая скорость равна $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, длина волны в ней в $\sqrt{\varepsilon\mu}$ раз короче длины волны в вакууме.

Фазовая скорость не зависит от частоты колебаний. —> Информационные сигналы сложного спектрального состава должны распространяться без искажений по длинной линии, не имеющей потерь.

5.5. Процессы в линиях без потерь при разных нагрузках

Рассмотрим однородную длинную линию без потерь, в которой реализован режим гармонических колебаний с частотой ω. Результирующее напряжение в каждом сечении длинной линии является суперпозицией напряжений падающей и отраженной волн и зависит от соотношения их амплитуд и фаз. Поэтому при заданных параметрах возбуждения (при заданной падающей волне) характер изменения напряжения и тока вдоль по линии определяется амплитудой и фазой отраженной волны. Параметры отраженной волны определяются условиями в сечении нагрузки. Анализ поведения напряжения и тока вдоль однородной линии сводится к вычислению отраженной волны при известном сопротивлении нагрузки.

5.6. Уравнения передачи для фрагмента длинной линии



Параметры линии — L и C или W и β — известны.

Z_a - сопротивление в сечении нагрузки

$$\dot{U}_a / \dot{I}_a = Z_a$$

Получим соотношения, связывающие токи и напряжения в произвольном сечении линии.

Используем решения для КА в длинной линии:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) + \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{пад}(x) + \dot{I}_{отр}(x) = \left[\dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) - \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)\right]/W$$

В сечении нагрузки ($x=0$):

$$\dot{U}_a = \dot{U}_{пад}(0) + \dot{U}_{отр}(0) \qquad \dot{I}_a = \dot{I}_{пад}(0) + \dot{I}_{отр}(0) = \left(\dot{U}_{пад}(0) - \dot{U}_{отр}(0)\right)/W$$

Подставляем в уравнения

$$e^{j\beta x} = \cos(\beta x) + j\sin(\beta x) \quad \text{и} \quad e^{-j\beta x} = \cos(\beta x) - j\sin(\beta x)$$

Значения комплексных амплитуд напряжения и тока в любом сечении x через ток и напряжение на нагрузке:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_a \cos(\beta x) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = j\left(\dot{U}_a / W\right)\sin(\beta x) + \dot{I}_a \cos(\beta x)$$

l - длина линии (расстояние между генератором и нагрузкой)

$x = l$ – сечение генератора

Уравнения передачи четырехполюсника, связывающие напряжение $\dot{U}_l$ и ток $\dot{I}_l$ на его входных полюсах, с аналогичными величинами на выходе ($\dot{U}_a$ и $\dot{I}_a$):

$$\dot{U}_l = \dot{U}_a \cos(\beta l) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta l)$$

$$\dot{I}_l = j\left(\dot{U}_a / W\right)\sin(\beta l) + \dot{I}_a \cos(\beta l)$$

$$\to \begin{pmatrix} \dot{U}_l \\ \dot{I}_l \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos(\beta l) & jW \sin(\beta l) \\ j\dfrac{\sin(\beta l)}{W} & \cos(\beta l) \end{Vmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{I}_a \end{pmatrix}$$

Матрица передачи отрезка длинной линии.

При нагрузке линии волновым сопротивлением $\dot{U}_a = W\dot{I}_a$

Из $\dot{U}_l = \dot{U}_a \cos(\beta l) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta l)$ следует $\dot{U}_l = \dot{U}_a \exp(j\beta l)$

Передаточная функция $K(j\omega)$ отрезка линии длиной l

$$K(j\omega) = \dot{U}_a / \dot{U}_l = \exp\left(-j\omega\sqrt{LC} \cdot l\right)$$

Используем $1/\sqrt{LC} = \omega/\beta$ –> $\beta = \omega\sqrt{LC}$

Амплитудно-частотная характеристика $|K(j\omega)| = 1$

–>

Фазо-частотная характеристика $\arg K(j\omega) = -\omega\sqrt{LC} \cdot l$

Соответствует условиям реализации неискажающей цепи, задерживающей выходной сигнал на время $\sqrt{LC} \cdot l$

При включении в сечение нагрузки сопротивления W отраженной волны в линии не будет.

5.7. Входное сопротивление отрезка длинной линии

$$Z(x) = \dot{U}(x) / \dot{I}(x)$$

$$Z(x) = \frac{\dot{U}_a \cos(\beta x) + jW \cdot \dot{I}_a \sin(\beta x)}{j(\dot{U}_a / W)\sin(\beta x) + \dot{I}_a \cos(\beta x)} = W \frac{Z_a \cos(\beta x) + jW \sin(\beta x)}{jZ_a \sin(\beta x) + W \cos(\beta x)}$$

$$Z(x) = W \frac{Z_a + jW\mathrm{tg}(\beta x)}{W + jZ_a\mathrm{tg}(\beta x)}$$ или $$\bar{Z}_l = \frac{\bar{Z}_a + j\mathrm{tg}(\beta l)}{1 + j\bar{Z}_a\mathrm{tg}(\beta l)}$$

1. $l = n \cdot \lambda/2$ (l равна или кратна $\lambda/2$) —> $\beta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$

   $tg\pi = 0$ —> $Z_l = Z_a$

2. $l << \lambda$ —> $tg(\beta l) \approx 2\pi l/\lambda$ (можно пренебречь) —> $Z_l = Z_a$

   (короткая линия ведет себя как два идеальных проводника)

3. Длина отрезка кабеля соразмерна с длиной волны —> условия функционирования генератора меняются в зависимости от соотношения l/λ.

Частный случай $Z_a = W$ —> $Z_l = W\dfrac{W + jW\mathrm{tg}(\beta x)}{W + jW\mathrm{tg}(\beta x)} = W\dfrac{1 + j\mathrm{tg}(\beta x)}{1 + j\mathrm{tg}(\beta x)} = W$

$Z_l = W$ не зависимо от длины линии.

В линии устанавливается *режим согласования.*

4. $l = \lambda/4$ —> $\beta x = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ —> $tg\dfrac{\pi}{2} = \infty$

$$Z_l = W\frac{Z_a + jW\mathrm{tg}(\beta l)}{W + jZ_a\mathrm{tg}(\beta l)} = W\frac{Z_a + jW\mathrm{tg}(\pi/2)}{W + jZ_a\mathrm{tg}(\pi/2)} = W^2/Z_a = W^2 Y_a$$

Входная проводимость $Y(x) = 1/Z(x)$

Четвертьволновая линия совершает операцию преобразования комплексного сопротивления в комплексную проводимость.

$\bar{Z} = Z/W$ - нормированное, или относительное (по отношению к волновому сопротивлению W) сопротивление.

$\bar{Y} = 1/\bar{Z} = WY$ - нормированная, или относительная (по отношению к $1/W$) проводимость.

Для четвертьволновой линии $\bar{Z}_l = \bar{Y}_a$