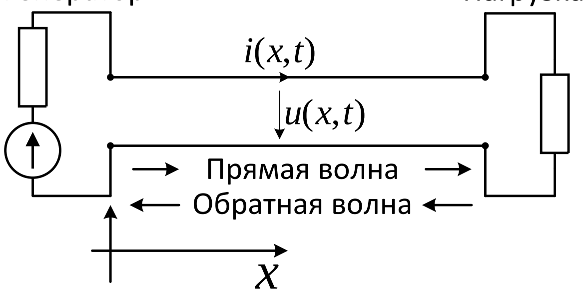
5. Волновые процессы в цепях с распределенными параметрами

5.1. Основы теории длинных линий

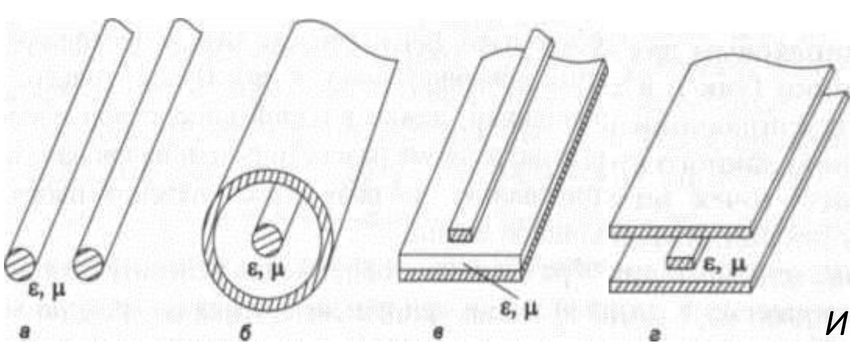
Длинные линии предназначены для транспортировки сигналов от источников энергии к удаленным нагрузкам.



1) Протяженность проводников в продольном направлении сравнима с длиной волны λ, и может заметно ее превосходить.

2) В поперечном сечении расстояние между проводами длинной линии должно быть существенно меньше λ.

Однородные длинные линии - поперечная структура и характеристики среды распространения волн не меняются в продольном направлении.



симметричная двухпроводная,
коаксиальная,
несимметричная полосковая,
симметричная полосковая

Среда, в которой проложены проводники, характеризуется относительными проницаемостями: диэлектрической (ε) и магнитной (μ).

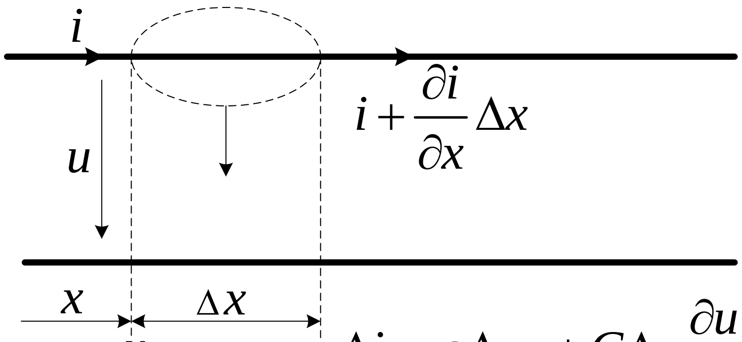
Строгое решение электродинамической задачи приводит к поперечным электромагнитным волнам, или ТЕМ-волнам. Их свойства: векторы напряженности электрического и магнитного полей перпендикулярны направлению распространения (лежат в поперечном сечении длинной линии), *фазовая скорость* ТЕМ волн не зависит от частоты и равна $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где $c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Квазистационарный характер электромагнитного поля в поперечном сечении длинных линий - распределение поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, в точности отвечает статическому (неизменному во времени) случаю. Это позволяет ввести для описания волновых процессов в длинных линиях понятия *напряжение* и *ток.*

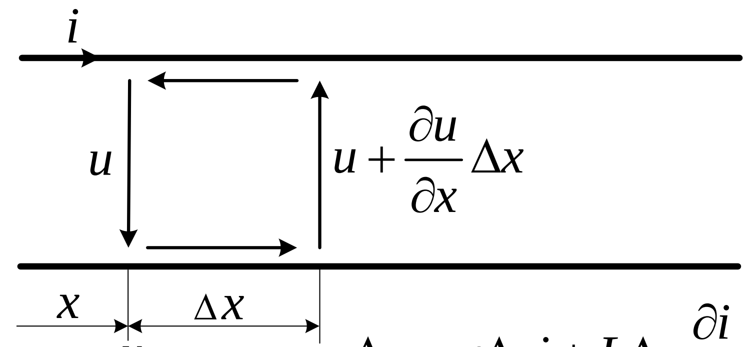
Результат интегрирования напряженности электрического поля (падение напряжения между проводниками длинной линии) одинаков для любого пути, лежащего в одной поперечной плоскости. Волновой характер процесса проявится в том, что ток и напряжение будут зависеть и от времени, и от продольной координаты.

Длинные линии — цепи с распределенными параметрами. Для описания электрических характеристик конкретных линий передачи используют параметры, приходящиеся на единицу длины линии — *погонные параметры.* Это: индуктивность (L), емкость (C), сопротивление (r), проводимость (g) и взаимная индуктивность (M). Их единицы измерения отвечают физической природе величины, но берутся отнесенными к метру: Гн/м, Ф/м, Ом/м, См/м.

5.2 Дифференциальные уравнения длинной линии



$$\Delta i = g\Delta x u + C\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}$$



$$\Delta u = r\Delta x i + L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t}$$

Приращения тока по координате: $-(\partial i/\partial x)\Delta x = g\Delta x u + C\Delta x(\partial u/\partial t)$

Приращение напряжения по координате:

$$-(\partial u/\partial x)\Delta x = r\Delta x i + L\Delta x(\partial i/\partial t)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$$

Дифференциальные уравнения с частными производными и постоянными (для однородной линии) коэффициентами - телеграфные уравнения.

Волновые решения телеграфных уравнений линии без потерь

$r = 0, \quad g = 0$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t}$$

Дифференцируем обе части первого уравнения по t и обе части второго уравнения по x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$v^2 = 1/(LC)$$

$$[v] = м/с$$

Решения волновых уравнений представимо суммой двух волн, распространяющихся со скоростью v вдоль координаты x во встречных направлениях:

$$u(x,t) = u_{пр}(t - x/v) + u_{обр}(t + x/v) \qquad i(x,t) = i_{пр}(t - x/v) + i_{обр}(t + x/v)$$

Волна с аргументом $(t - x/v)$ движется со скоростью $v^2 = 1/(LC)$ в положительном направлении оси *x*, волна с аргументом $(t + x/v)$ распространяется с той же скоростью в обратном направлении, навстречу отсчетам x.

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=C\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x}=L\frac{\partial i}{\partial t}$$

Подставим значения u и i в уравнения системы

$$\frac{\partial i_{np}(t-x/v)}{\partial x}\cdot\left(\frac{-1}{v}\right)+\frac{\partial i_{o\delta p}(t+x/v)}{\partial x}\cdot\left(\frac{1}{v}\right)=-C\frac{\partial u_{np}(t-x/v)}{\partial t}-C\frac{\partial u_{o\delta p}(t+x/v)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_{np}(t-x/v)}{\partial x}\cdot\left(\frac{-1}{v}\right)+\frac{\partial u_{o\delta p}(t+x/v)}{\partial x}\cdot\left(\frac{1}{v}\right)=-L\frac{\partial i_{np}(t-x/v)}{\partial t}-L\frac{\partial i_{o\delta p}(t+x/v)}{\partial t}$$

Равенства будут выполняться при любых t и x, если

$$u_{np}(t-x/v)=\frac{1}{Cv}i_{np}(t-x/v)$$

$$u_{o\delta p}(t+x/v)=-Lv\cdot i_{o\delta p}(t+x/v)$$

Волновое сопротивление $W=\sqrt{L/C}$, причем $\frac{1}{Cv}=Lv=\sqrt{L/C}=W$

$$u_{пр}/i_{пр} = W \qquad i(x,t) = i_{пр} + i_{обр} = (u_{пр} - u_{обр})/W$$

Для бесконечно длинной однородной линии в решении останутся только волны тока и напряжения, уходящие в бесконечность $u_{пр}, i_{пр}$

В этом случае $u(x,t) = W \cdot i(x,t)$

Для генератора подключенная к нему однородная длинная линия бесконечной длины эквивалентна вещественному сопротивлению W (волновому сопротивлению). Фрагмент однородной длинной линии без потерь, нагруженный сопротивлением, равным волновому, со стороны входных полюсов будет восприниматься как бесконечно длинная линия.

Скорость распространения волны $v = 1/\sqrt{LC}$

Из теории электромагнитных волн $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ —> $1/\sqrt{LC} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$

Распространение волн по проводам обусловлено распространением электромагнитной волны в пространстве, прилегающем к проводникам кабеля, которые, подобно рельсам, обеспечивают перенос энергии поля в заданном направлении.

5.3. Волны в длинной линии в режиме гармонических колебаний

Под воздействием гармонической ЭДС частоты ω в однородной длинной линии без потерь установился стационарный режим.

$$\dot{U}(x) \quad \div \quad u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(x)\exp(j\omega t)\right]$$

$$\dot{I}(x) \quad \div \quad i(x,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{I}(x)\exp(j\omega t)\right]$$

Волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \dot{U}(x)$$

—>

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \qquad \frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \dot{I}(x)$$

Ищем решения уравнений в виде

$$\dot{U}(x) = A\exp(sx)$$

Характеристическое уравнение $s^2 = -(\omega/v)^2$

Фазовая постоянная (волновое число) $\beta = \omega/v$

—> $s^2 = -\beta^2$ —>

—> $s_1 = -j\beta$, $s_2 = +j\beta$ —> $\dot{U}(x) = A_1\exp(-j\beta x) + A_2\exp(+j\beta x)$

Подставляем $\dot{U}(x) = A_1 \exp(-j\beta x) + A_2 \exp(+j\beta x)$ в

$u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(x)\exp(j\omega t)\right]$ –>

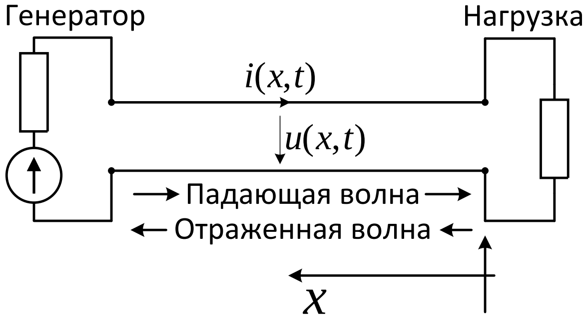
$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{U}(x)e^{j\omega t}\right] = u_{пр} + u_{обр} = \left|\dot{U}_{пр}\right|\cos(\omega t - \beta x + \varphi_{пр}) + \left|\dot{U}_{обр}\right|\cos(\omega t + \beta x + \varphi_{обр})$$

Прямая волна двигается в направлении роста координаты x, обратная волна - против направления x.

Волну, движущуюся от генератора к нагрузке, принято называть *падающей,* обратную — *отраженной.*

Изменим направление отсчета координаты x — ее удобно отсчитывать от сечения нагрузки:

$$u(x,t) = u_{пад}(x,t) + u_{отр}(x,t) = \left|\dot{U}_{пад}\right|\cos(\omega t + \beta x + \varphi_{пад}) + \left|\dot{U}_{отр}\right|\cos(\omega t - \beta x + \varphi_{отр})$$



Константы $A_1 = \dot{U}_{пад}(0)$

$A_2 = \dot{U}_{отр}(0)$

Комплексные амплитуды напряжения и тока:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) + \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{пад}(x) + \dot{I}_{отр}(x) = \left[\dot{U}_{пад}(0)\exp(j\beta x) - \dot{U}_{отр}(0)\exp(-j\beta x)\right]/W$$