# 4.11. Свойства преобразования Лапласа.

1) Взаимно-однозначное соответствие: $s(t) \div \hat{S}(p)$

2) Линейность преобразования Лапласа:

$$s_1(t) + s_2(t) \div \hat{S}_1(p) + \hat{S}_2(p)$$ , а также $$as(t) \div a\hat{S}(p)$$

3) Аналитичность $\hat{S}(p)$ :

если $s(t)$ удовлетворяет условию $\begin{cases} s(t) = 0, & \mathrm{t} < 0 \\ |s(t)| \le M \cdot e^{ct}, & \mathrm{t} > 0 \end{cases}$ $M,\ c - const$

—> $\hat{S}(p)$ - аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}(p) = \sigma > c$ .

Функция $f(p)$ комплексного переменного $p$ называется <u>аналитической (или регулярной)</u> в точке $p_0$ , если она обладает в этой точке производной

$$f'(p_0) = \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0}$$

причем данный предел не зависит от способа, по которому $p \to p_0$ в комплексной плоскости.

$f = p^2$ аналитическая на всей плоскости, так как $f'(p) = 2p$ существует при любом $p$. Функция $f = |p|^2$ ни при каком $p$ не аналитическая, хотя и непрерывная.

Интеграл, зависящий от параметра, можно дифференцировать по этому параметру, если получающийся в результате интеграл **сходится равномерно**.

$$\hat{S}(p) = \int_0^\infty s(t) e^{-pt} dt \;\; \text{—>} \;\; \frac{d}{dp}\hat{S}(p) = -\int_0^\infty s(t) t e^{-pt} dt$$ , причем $|s(t)| \le Me^{ct}$

Экспонента $e^{(c-\sigma)t}$ при $\sigma > c$ «пересиливает» растущий множитель $t$, поэтому интеграл сходится равномерно по $p$ при $\mathrm{Re}(p) > c$. Отсюда и вытекает существование производной —> аналитичность $\hat{S}(p)$

Свойства аналитических функций: 1. обладает производными любого порядка, 2. Зная функцию на любом замкнутом контуре (на плоскости), можно восстановить ее во всей области аналитичности.

Возможно аналитически продолжить лапласов образ из области $\mathrm{Re}(p)>c$, почти на всю комплексную плоскость $p$ (единственным образом). $1(t) \div 1/p$ аналитична всюду, кроме точки $p=0$.

Точки, в которых функция перестает быть аналитической, называются **особыми точками** данной функции. Частным видом особых точек являются **полюсы**. Точка $p_0$ является полюсом функции $f(p)$, если

$$f(p) \to \frac{c}{(p-p_0)^n} \quad \text{при } p \to p_0$$

целое $n$ называется порядком (кратностью) полюса

4) Дифференцирование и интегрирование $s(t)$:

$$\int_0^\infty \frac{ds}{dt} e^{-pt} dt = s(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty s(t)e^{-pt}dt = p\hat{S}(p) - s(0)$$

$s(0)$ понимается как предел справа, т.е. $s(+0)$.

$$\frac{ds}{dt} \div p\hat{S}(p) - s(0) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} \div p^2\hat{S} - ps(0) - s'(0)$$

Интегрирование $s_1(t)=\int\limits_0^t s(t')dt'$ –> $s(t)=\dfrac{ds_1}{dt},\quad s_1(0)=0$

$$\hat{S}(p)=p\hat{S}_1(p) \quad \text{–>} \quad \hat{S}_1(p)=\frac{\hat{S}(p)}{p}$$

Итак $\int\limits_0^t s(t')dt' \div \dfrac{\hat{S}(p)}{p}$

5) Запаздывание по $t$ и умножение на $e^{-\lambda t}$ :

Пусть $s_1(t)=s(t-\tau)$, где $\tau>0$

$$\hat{S}_1(p)=\int\limits_0^\infty s(t-\tau)e^{-pt}dt=\int\limits_{-\tau}^\infty s(t')e^{-pt'}e^{-p\tau}dt'=e^{-p\tau}\int\limits_0^\infty s(t')e^{-pt'}dt'$$

$$s(t-\tau)\div e^{-p\tau}\hat{S}(p)$$

Пусть $s_2(t)=s(t)e^{-\lambda t}$, где $\lambda=\mathrm{const}$ (комплексное).

$$\hat{S}(p)=\int\limits_0^\infty s(t)e^{-\lambda t}e^{-pt}dt=\hat{S}(p+\lambda) \quad \text{–>} \quad s(t)e^{-\lambda t}\div\hat{S}(p+\lambda)$$

6) Свертка: $$s(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int_0^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau$$

$$\hat{S}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left( \int_0^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau \right) dt = \int_0^{\infty} s_1(\tau) \left( \int_0^{\infty} s_2(t-\tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = \int_0^{\infty} s_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \cdot \hat{S}_2(p)$$

Изменяем порядок интегрирования

$$s_1(t) * s_2(t) \div \hat{S}_1(p) \hat{S}_2(p)$$

7) Связь с преобразованием Фурье:

Пусть $s(t)$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^{\infty} |s(t)|\, dt < \infty \quad (\text{существует}), \\ &s(t) = 0 \qquad \text{при } t < 0. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Фурье-образ

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \hat{S}(p)\Big|_{p = j\omega}$$

является аналитической функцией при $\mathrm{Re}(p) > 0$.

При выполнении условий $(_*)$ для $s(t)$ Фурье-образ переходит в лапласов образ, если заменить $j\omega$ на $p$, и обратно. Если условия $(_*)$ не выполняются, то прямой связи между $S(\omega)$ и $\hat{S}(p)$ - нет.

$1(t) \div \hat{S}(p) = 1/p$ но **неверно**, что $1(t) \div S(j\omega) = 1/j\omega$ (по Фурье), так как $1/j\omega$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости на оси $\omega$ и не обладает Фурье-образом (в обычном смысле).

Нельзя считать, что преобразование Фурье есть частный случай преобразования Лапласа, поскольку при преобразовании Лапласа утрачиваются значения $s(t)$ при $t < 0$, а преобразование Фурье их не утрачивает. Таким образом, преобразования Фурье и Лапласа применимы к разным классам функций, имеющим общее пересечение $(_*)$, но не включающим один другого.

## 4.12. Применение преобразования Лапласа к анализу цепей (операторный метод).

Метод позволяет рассчитать процесс для $t > 0$, если известно исходное состояние цепи при $t = 0$ и все внешние источники при $t > 0$.

1) Находим лапласовы образы источников $\hat{E}(p)$ и $\hat{I}(p)$

2) Находим лапласовы образы напряжений $\hat{U}(p)$ и (или) токов $\hat{I}_{out}(p)$ в интересующей ветви. Уравнения составляются по правилам, аналогичным методу КА (узловые потенциалы, контурные токи, закон Ома и т.д.), причем в этих уравнениях уже учтены начальные условия.

3) Обратное преобразование Лапласа, то есть находим $u(t)$, $i_{out}(t)$

Используется: формула разложения в сочетании со свойствами преобразования Лапласа, либо таблицы преобразований Лапласа.

Составление уравнений:

1) Нулевые начальные условия. $u = Ri \div \hat{U}(p) = R\hat{I}(p)$

$$u = L\frac{di}{dt} \div \hat{U}(p) = pL\hat{I}(p) \qquad u = \frac{1}{C}\int_0^t idt \div \hat{U}(p) = \frac{1}{pC}\hat{I}(p)$$

То есть в методе КА делаем замену $j\omega$ на $p$.

$$\hat{U}(p) = z(p)\hat{I}(p) \quad -> \quad z(p) = \frac{\hat{U}(p)}{\hat{I}(p)}$$

$z(p)$ - операторное сопротивление двухполюсной цепи равно отношению лапласовых образов напряжения и тока при нулевых начальных условиях (эта оговорка существенна!).

$y(p) = 1/z(p)$ - операторная проводимость цепи.

$$K(p) = \left.\frac{\hat{S}_2(p)}{\hat{S}_1(p)}\right|_{i(0),u(0)=0}$$ - операторный коэффициент передачи (передаточная функция)

Получается из комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$ путем замены $j\omega \Rightarrow p$.

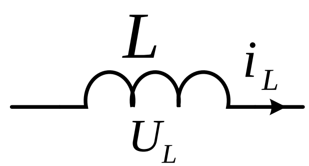
2) Не нулевые начальные условия:

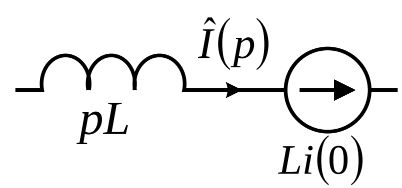
Индуктивность $u = L\dfrac{di}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} \div p\hat{S}(p) - s(0)$$

$\rightarrow$ $\hat{U}(p) = pL\hat{I}(p) - Li(0)$ $\rightarrow$

$$\hat{I}(p) = \frac{\hat{U}(p)}{pL} + \frac{i(0)}{p}$$

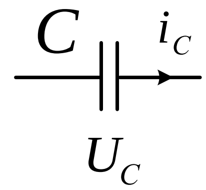


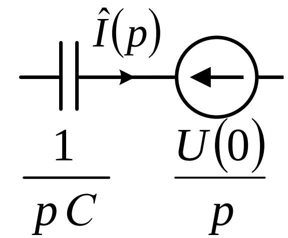



Емкость $$u(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt'+u(0)$$

$$\int_0^t s(t')\,dt' \div \frac{\hat{S}(p)}{p}$$

$$\rightarrow \quad \hat{U}(p)=\frac{1}{pC}\hat{I}(p)+\frac{u(0)}{p}$$

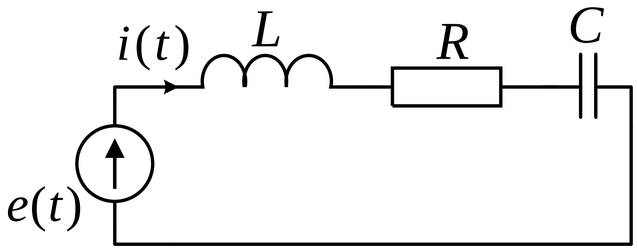


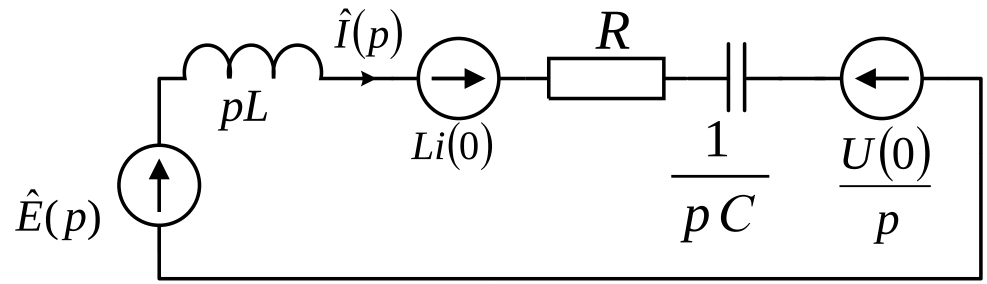




Заряженную к моменту $t=0$ емкость можно заменить такой же незаряженной емкостью, добавив к ней последовательно генератор постоянного напряжения, равного начальному значению напряжения на емкости, а индуктивность с начальным током можно заменить индуктивностью с нулевым начальным условием, включив параллельно ей генератор постоянного тока, равного начальному значению тока.

В эквивалентных схемах вспомогательные источники самостоятельного физического смысла не имеют, а являются неотъемлемыми составными частями самих элементов.

Пример:




При $t > 0$ ток в цепи подчиняется уравнению

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_C(0) = e(t) \;\longrightarrow\; pL\hat{I}(p) - Li(0) + R\hat{I}(p) + \frac{1}{pC}\hat{I}(p) + \frac{u_C(0)}{p} = \hat{E}(p)$$

$$\longrightarrow \quad \hat{I}(p) = \frac{\hat{E}(p) + Li(0) - u_C(0)/p}{pL + R + 1/(pC)} \quad \longrightarrow$$

находим $i(t)$ по $\hat{I}(p)$

Результат зависит от $\hat{E}(p)$, т.е. от конкретного вида колебания $e(t)$.

В решении автоматически учитываются начальные условия $i(0)$ и $u_C(0)$.