4.9. Переходная характеристика цепи, ее связь с импульсной характеристикой.

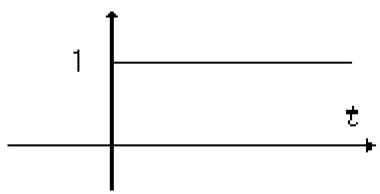
Рассмотрим функцию $K_1(j\omega)=\dfrac{K(j\omega)}{j\omega}$ —> $S_2(j\omega)=j\omega\cdot K_1(j\omega)S_1(\omega)$

Предположим, что $K_1(j\omega)$ обладает Фурье-образом $h(t)\div K_1(j\omega)$

Если существует ИХ $k(t)\div K(j\omega)$, то и $h(t)$ тоже существует, но $h(t)$ может существовать и тогда, когда ИХ нет (хотя тоже не всегда).

Используем свойства 7 и 8: $s_2(t)=\dfrac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\tau)s_1(t-\tau)d\tau=\dfrac{d}{dt}\big(h(t)*s_1(t)\big)$

Функция единичного скачка — $1(t)$:



$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

Связь функции единичного скачка и δ-функции $1(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\delta(t')dt'$

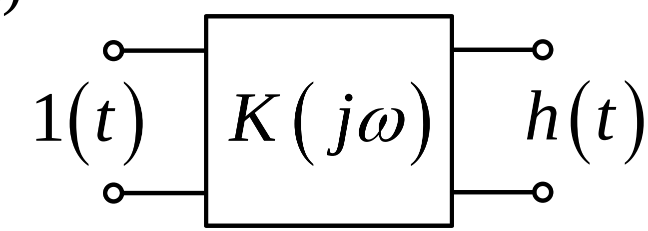
Примем $s_1(t) = 1(t)$ –>

$$s_2(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)1(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\left(\int_{-\infty}^{t}\delta(t'-\tau)dt'\right)d\tau = \ldots$$

$$\ldots\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t'-\tau)dt'd\tau = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = h(t)$$

$h(t)$ - реакция цепи на единичный скачок $1(t)$

$h(t)$ - <u>переходная характеристика</u> цепи (ПХ).



По принципу причинности $h(t)=0$ при $t<0$.

$$s_2(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s_1(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_{0}^{\infty} h(\tau)s_1(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)s_1(\tau)d\tau$$

Если, кроме того, $s_1(t)$ начинается от $t=0$, то в обоих интегралах пределы будут от 0 до t.

В случае, когда цепь обладает ИХ, из $K_1(j\omega)=\dfrac{K(j\omega)}{j\omega}$ получаем:

$$h(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}k(t')dt', \qquad k(t)=\frac{d}{dt}h(t)$$

- формулы, выражающие связь ПХ и ИХ. В этом случае $h(t)$ — непрерывная функция (даже если $k(t)$ имеет скачки).

$$s_2(t)=\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)s_1(\tau)d\tau=\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(t-\tau)s_1(\tau)d\tau$$

Для отыскания ИХ можно сначала найти ПХ, а затем использовать $k(t)=\dfrac{d}{dt}h(t)$

Если же сама ПХ $h(t)$ имеет скачки (например, при $t=0$), то ИХ не существует, поскольку ПХ недифференцируема.

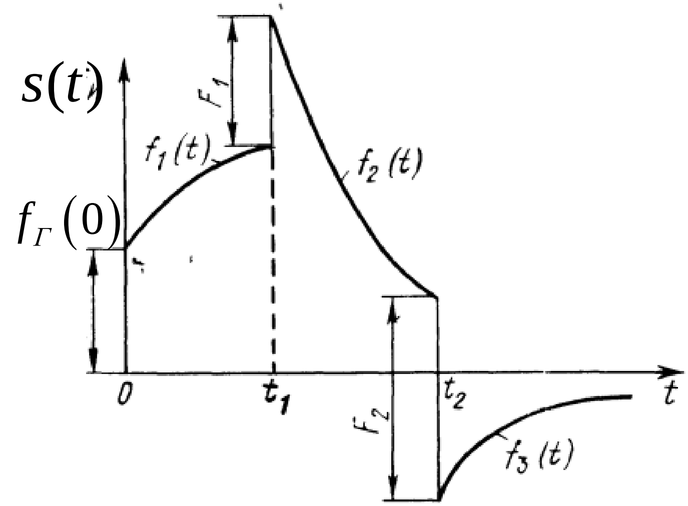
Действие на входе цепи $1(t)$ равносильно включению в момент t=0 источника постоянного напряжения (или тока). При этом ПХ описывает переходный процесс от состояния с нулевыми токами и напряжениями во всех ветвях к состоянию установившихся токов и напряжений.

ПХ позволяет применить интеграл суперпозиции к более широкому классу цепей, чем ИХ, однако сама ПХ тоже существует не всегда. Например, если рассматривать ток i через емкость C как реакцию на напряжение, то ПХ не существует, поскольку скачок u_C невозможен при конечном токе. В этом случае $K(j\omega)=j\omega C$, $K_1(j\omega)=C$ и не стремится к нулю при $\omega \to \infty$.

Частотная передаточная функция $K(j\omega)$ **существует всегда**, если в цепи есть потери. При этом ИХ и ПХ могут не существовать.

Интеграл суперпозиции (он же интеграл Дюамеля) можно применять для расчета прохождения сигналов через цепи.

В случае входных функций с разрывами (например, импульсов) выходной сигнал определяется:



1) $s(t) = f_1(t)$ при $0 \le t \le t_1$

не включая скачок F_1

$$s_2(t) = f_\Gamma(0)h(t) + \int_0^t f'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$f'_1(\tau) = \left.\frac{df_1(t)}{dt}\right|_{t=\tau}$$

2) $s(t) = f_2(t)$ при $t_1 < t < t_2$,

не включая скачок F_2

$$s_2(t) = f_\Gamma(0)h(t) + \int_0^{t_1} f'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + F_1 h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t} f'_2(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$f'_2(\tau) = \left.\frac{df_2(t)}{dt}\right|_{t=\tau}$$

3) $s(t) = f_3(t)$ при $t_2 < t \le \infty$

$$s_2(t) = f_\Gamma(0)h(t) + \int_0^{t_1} f'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + F_1 h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f'_2(\tau)h(t-\tau)d\tau -$$

$$-F_2 h(t-t_2) + \int_{t_2}^{t} f'_3(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad f'_3(\tau) = \left.\frac{df_3(t)}{dt}\right|_{t=\tau}$$

4.10. Преобразование Лапласа

$$\hat{S}(p)=\int_0^\infty s(t)e^{-pt}dt$$

где $p=\sigma+j\omega$ —комплексное число. Функция $\hat{S}(p)$ называется Лапласовым образом (или изображением) функции $s(t)$.

Преобразование Лапласа применимо, если функция $s(t)$ кусочно-непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} s(t)=0, & \mathrm{t}<0 \\ |s(t)|\le M\cdot e^{ct}, & \mathrm{t}>0 \end{cases}$$

где M, c — вещественные числа.

Оценка: $$|\hat{S}(p)|\le\int_0^\infty Me^{ct}e^{-\sigma t}dt=\frac{M}{\sigma-c}$$ при $\sigma>c$

Преобразование Лапласа сходится в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}(p)=\sigma>c$.

Преобразование Лапласа можно применять не только к убывающим или ограниченным функциям, но и даже к растущим при $t \to \infty$ не быстрее экспоненты, в частности, к любым полиномам, показательным функциями и др.

Для применения преобразования Фурье к функции $s(t)$ необходима абсолютная интегрируемость $s(t)$ на всей оси, т. е. сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt$

Процессы в цепи описываются линейными дифференциальными уравнениями, и из теории этих уравнений следует, что поведение цепи при $t>0$ однозначно определяется заданием всех внешних воздействий, начиная с $t=0$, и состоянием цепи в момент $t=0$ (т.е. значениями токов в индуктивностях и напряжениями на емкостях). Каким путем цепь пришла к данному состоянию — **для дальнейшего не играет никакой роли**.

Если интересуют колебания только для $t > 0$, то можно без ограничения общности считать, что при $t < 0$ колебания отсутствовали, а с момента $t = +0$ они возбуждаются под действием заданных начальных условий и внешних источников.

Преобразование Лапласа можно применять для расчета колебаний, начиная с любого (фиксированного) момента, если известно состояние цепи в этот момент.

Примеры преобразования Лапласа:

1) **Функция единичного скачка** $s(t)=1(t)$ –> $\hat{S}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \dfrac{1}{p}$

Интеграл сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(p)>0$ (не включается мнимая ось). При $\mathrm{Re}(p)\leq 0$ интеграл расходится, однако получившаяся функция $1/p$ (если отвлечься от ее происхождения) имеет смысл при всех p, исключая $p=0$ (особая точка).

2) Линейная функция $s(t) = t$ (при $t > 0$, 0 - при $t < 0$):

$$\hat{S}(p) = \int_0^\infty te^{-pt}dt = \frac{te^{-pt}}{(-p)}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{(-p)}dt = \frac{1}{p^2}$$

Интеграл сходится при $\mathrm{Re}(p)>0$, однако полученная функция может рассматриваться при всех p, кроме $p=0$.

3) Показательная функция $s(t)=e^{\alpha t}$, где α — любое число, в том числе комплексное (колебательный процесс):

$$\hat{S}(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \frac{1}{p-\alpha}$$ если $\mathrm{Re}(\alpha)<\mathrm{Re}(p)$

4) δ -функция: $$\hat{S}(p) = \int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}dt = \int_{-\infty}^\infty \delta(t)e^{-pt}dt = e^{-p\cdot 0} = 1$$

Используем определение δ –функции: $$\int_{-\infty}^\infty f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Восстановление функции $s(t)$ по её лапласову образу $S(p)$ - формула разложения (частный случай, когда $S(p)$ представляет собой рациональную дробь): $\hat{S}(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$

A и B —полиномы:

$$A(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0, \qquad B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0$$

Предположим, что а) степень $A(p)$ меньше степени $B(p)$ ($m < n$); б) полином $B(p)$ имеет только простые корни p_i (нет кратных корней) т.е. для $i = 1, 2,\ldots, n$: $B(p_i)=0$, но $B'(p_i) \neq 0$.

Дробь A/B можно разложить в сумму простейших дробей

$$\hat{S}(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{p - p_i}$$

Находим коэффициент C_1 : умножим на p-p_1, устремим $p \to p_1$

$$(p - p_1)\frac{A(p)}{B(p)} = C_1 + (p - p_1)\sum_{i=2}^{\infty} \frac{C_i}{p - p_i} \to C_1$$

$$(p-p_1)\frac{A(p)}{B(p)} = C_1 + (p-p_1)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{C_i}{p-p_i} \to C_1$$

По правилу Лопиталя: $\quad C_1 = A(p_1)\lim_{p\to p_1}\frac{p-p_1}{B(p)} = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)}$

Аналогично находим все коэффициенты C_i

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i}{p-p_i}$$

$$\left(e^{\alpha t} \div \frac{1}{p-\alpha}\right)$$

–> $s(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{A(p_i)}{B'(p_i)}e^{p_i t}$ - формула разложения

$B'(p_i)$ - производная от B по p при $p = p_i$

p_i - корни уравнения $B\left(p\right) = 0$

Формула разложения в случае корня $p = 0$:

$$\frac{A(p)}{pB_1(p)} \div \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{A(p_i)}{p_i B_1'(p_i)}e^{p_i t}$$

p_i - корни уравнения $B_1\left(p\right) = 0$

$B_1'(p_i)$ - производная от $B_1\left(p\right)$ по p при $p = p_i$