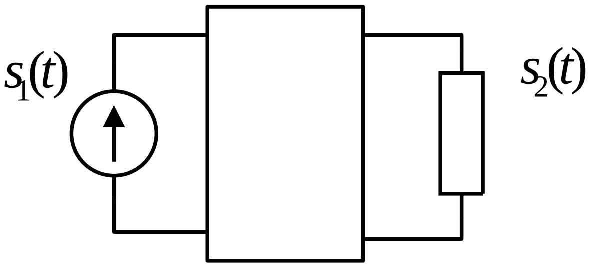
4.6. Спектральный метод анализа цепей.



$s_1(t)$ - внешнее воздействие на цепь. Требуется найти вызываемое им колебание $s_2(t)$ в какой-либо ветви.

$s_1(t)$ представимо интегралом Фурье $$s_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (*)$$

$S_1(\omega)$ — спектральная плотность.

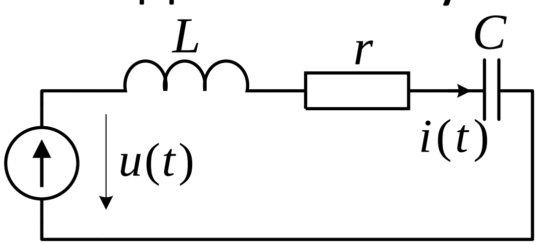
Рассматривая интеграл (*) как предельный случай суммы и учитывая, что цепь линейная, можем применить принцип суперпозиции. Надо рассмотреть действие на цепь колебания $S_1(\omega)e^{j\omega t}$. Согласно методу комплексных амплитуд (КА) реакция $s_2(t)$ на такое колебание будет $K(j\omega)S_1(\omega)e^{j\omega t}$, где $K(j\omega)$ — комплексный коэффициент передачи цепи (передаточная функция).

Суммируем действие всех составляющих $s_1(t)$:

$$s_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)S_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

спектральные плотности входного и выходного колебаний связаны соотношением $S_2(\omega) = K(j\omega)S_1(\omega)$

Второй способ определения $S_2(\omega)$: а) Составляем дифф. уравнения цепи и б) подвергаем их прямому преобразованию Фурье. Для этого каждое уравнение умножаем на $e^{-j\omega t}$ и в) интегрируем по t от -∞ до +∞. Получаем уравнения для Фурье-образов.



$$u(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

Используем:

$$\frac{ds}{dt} \div j\omega S(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} s(t')dt' \div \frac{S(\omega)}{j\omega}$$

—> $$U(\omega) = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I(\omega)$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением для КА в режиме гармонических колебаний.

Расчет цепи спектральным методом сводится к следующему:

1) Определяем Фурье-образ (спектральную плотность) входного воздействия $S_1(\omega)$.

2) Рассчитываем режим гармонических колебаний в цепи методом КА (частота колебаний ω рассматривается как переменная величина) и находим коэффициент передачи $K(j\omega)$ как отношение КА выходного и входного колебаний.

3) Находим Фурье-образ выходного колебания $S_2(\omega)=S_1(\omega)\,K(j\omega)$, а затем само колебание $s_2(t)$ путем обратного преобразования Фурье.

Если $s_1(t)$ имеет дискретный спектр, то такое колебание разлагается не в интеграл, а в сумму гармоник (например, в ряд Фурье, если колебание периодическое). В таком же виде представляется и искомое колебание $s_2(t)$.

4.7. Условие неискаженной передачи через цепь.

Какова должна быть частотная передаточная функция цепи $K(j\omega)$, чтобы колебание (сигнал) произвольного вида $s_1(t)$ передавался через нее без искажений ?

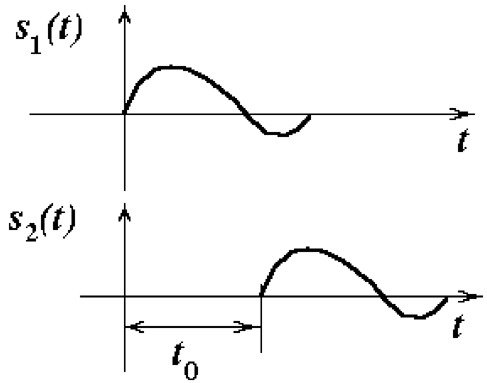
Допустимо: а) изменение уровня (размаха) сигнала,
б) размерность (напряжение в ток, или наоборот),
в) задержку во времени на постоянный интервал t_0.

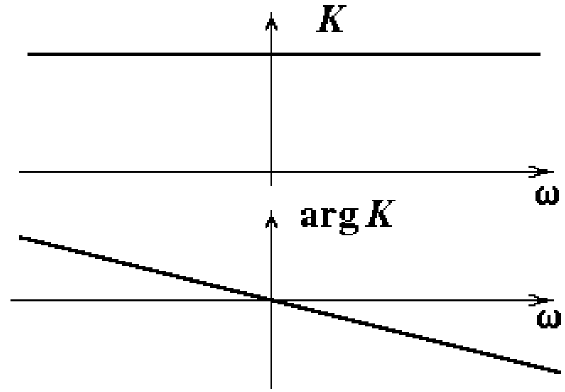
$$s_2(t)=K_0\, s_1(t-t_0)$$

$$S_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} K_0 s_1(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} K_0 s_1(t_1)e^{-j\omega t_1}e^{-j\omega t_0}dt_1=K_0 e^{-j\omega t_0}S_1(\omega)$$

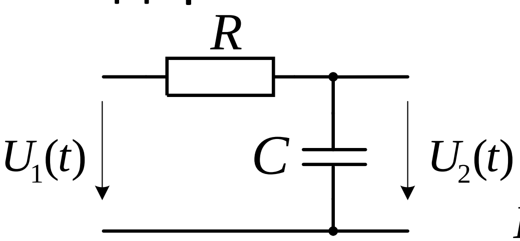
$$\longrightarrow \; K(j\omega)=K_0 e^{-j\omega t_0} \qquad \longrightarrow \; \begin{cases} |K(j\omega)|=K_0 \\ \arg K(j\omega)=-\omega\, t_0 \end{cases}$$

АЧХ неискажающей цепи есть константа, а ФЧХ — линейная функция во всей бесконечной полосе частот .



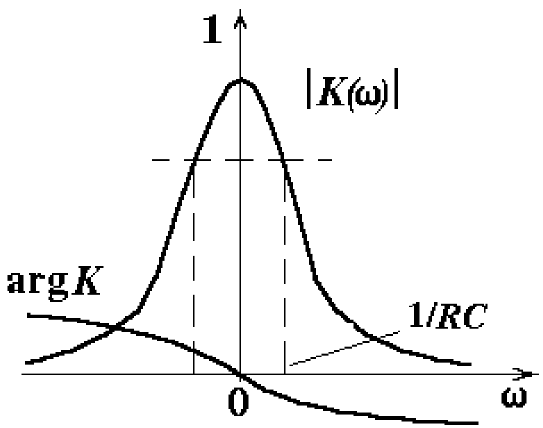


Для практических целей достаточно, чтобы цепь имела АЧХ, близкую к идеальной, только в той полосе частот, в которой содержится спектр сигнала (его существенная часть).



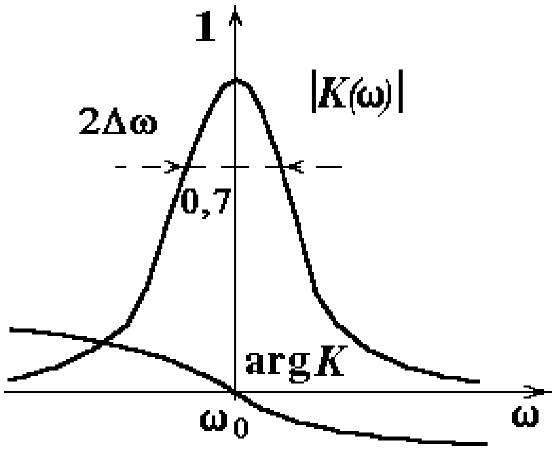
Пример:

$$K(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC},\quad |K(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}},\quad \arg K(j\omega)=-\operatorname{arctg}(\omega RC)$$



В полосе $0<\omega<1/RC$ АЧХ изменяется от 1 до $1/\sqrt{2}$ (немного), а ФЧХ близка к линейной зависимости.

LC контур:



$$K(j\omega) = \frac{K_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{K_0}{1 + j\xi}$$

$$\begin{cases} |K(j\omega)| = \dfrac{K_0}{\sqrt{1+\xi^2}} \\ \arg K(j\omega) = -arctg\xi \end{cases}$$

В полосе пропускания $2\Delta\omega = \omega/Q$ неравномерность АЧХ 3 дБ, а ФЧХ близка к линейной. Такая цепь может использоваться для радиосигналов или квазигармонических колебаний. Если спектр колебания расположен в окрестности ω и занимает полосу частот, не превышающую $2\Delta\omega$, то искажения будут незначительны.

4.8. Импульсная характеристика цепи. Интеграл суперпозиции.

В **частотной области** цепь осуществляет операцию умножения Фурье-образа колебания на передаточную характеристику цепи:

$$S_2(\omega) = K(j\omega) \cdot S_1(\omega)$$

Какое при этом само колебание $s_1(t)$?

Предположим, что существует такая функция $k(t)$, что $k(t) \div K(j\omega)$

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt$$ - прямое преобразование Фурье

Свойство 8: $$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau \div S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$$ −>

$$s_2(t) = s_1(t) * k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) s_1(t-\tau) d\tau$$

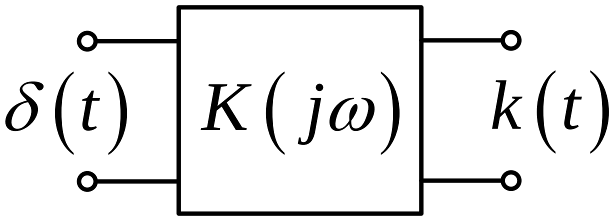
Функция $k(t)$, как и $K(j\omega)$, определяется свойствами самой цепи и не зависит от конкретного внешнего воздействия.

Рассмотрим входной сигнал в виде δ-функции: $s_1(t)=\delta(t)$ –>

$$s_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = k(t)$$ –>

$k(t)$ есть отклик цепи при действии на ее входе δ-функции.

$k(t)$ - импульсная характеристика (ИХ) цепи, или импульсный отклик



$$K(j\omega) \div k(t)$$

Импульсная характеристика связана с частотной передаточной функцией преобразованием Фурье.

$$K(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{-j\omega t}dt \qquad k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Интеграл суперпозиции: $$s_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)s_1(t-\tau)d\tau$$

Если известна ИХ цепи возможно вычислить отклик цепи на любое внешнее воздействие $s(t)$.

Происхождение названия «интеграл суперпозиции»: значение s_2 в каждый момент времени t равно сумме взвешенных значений s_1, взятых в разные моменты $t-\tau$ с весом $k(\tau)$. Это обусловлено инерционностью цепи, цепь как бы «помнит», что было с ней некоторое время тому назад.

<u>Принцип причинности</u>: отклик на внешнее воздействие не может появиться раньше вызвавшей его причины (в данном случае ею является импульс $\delta(t)$):

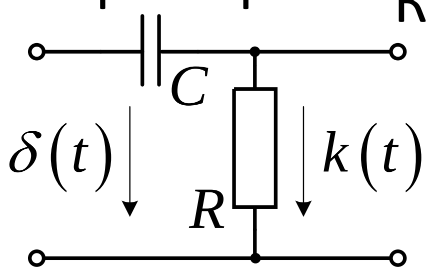
$$k(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0$$

Импульсная характеристика (ИХ) $k(t)$ - свободное колебание цепи, возбужденное кратковременным импульсным воздействием. Если цепь пассивна и обладает диссипативными потерями, то $k(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Цепь может не обладать ИХ (в классе обычных функций):

Если $k(t)$ — обычная функция, удовлетворяющая достаточным условиям представления ее в виде интеграла Фурье, то на основании $k(t) \div K(j\omega)$ можно показать, что $K(j\omega)\to 0$ при $\omega\to\infty$. Однако в теории рассматриваются и такие цепи, у которых $K(j\omega)$ этому условию не удовлетворяет.

Пример:



Коэффициент передачи $K(j\omega) = \dfrac{R}{R+1/j\omega C} \to 1$

при $\omega\to\infty$

=> ИХ в виде обычных функций не существует

Однако, ИХ существует в виде специальных функций и равна:

$$k(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}\cdot e^{-t/RC}$$

ИХ есть предел, к которому стремится отклик цепи на входной импульс единичной площади, когда длительность импульса стремится к нулю. Если такового предела нет, то ИХ в обычном понимании не существует.