

## 4.4. Спектральный анализ простейших колебаний.

1) Прямоугольный импульс  $s(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$

$$S(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{+j\omega \frac{\tau}{2}}}{-j\omega} = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = \tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

Спектральная плотность одиночного импульса совпадает с огибающей спектральных линий периодической последовательности таких же импульсов. Если увеличивать период повторения последовательности, то форма огибающей сохраняется, но спектральные линии располагаются все гуще, а их амплитуда уменьшается. В пределе, когда период  $T \rightarrow \infty$ , дискретный спектр переходит в непрерывный. Спектральная плотность  $S(\omega)$  с ростом  $\omega$  убывает как  $1/\omega$  (но не монотонно), это связано с наличием скачков в  $s(t)$ . Чем более гладкая  $s(t)$ , тем выше степень убывания  $S(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ : закономерность здесь такая же, как для коэффициентов ряда Фурье.

Для произвольного колебания  $S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt$  - площадь импульса

Для прямоугольного импульса  $S(0) = \tau$

$S(\omega)$  обращается в нуль на частотах  $\omega = 2n\pi/\tau$ ,  $n = \pm 1, \pm 2 \dots$

Замечание: Отрицательные частоты  $\omega$  рассматриваются как переменная в  $S(\omega)$ . Если же иметь в виду число колебаний (или радиан) в секунду, то здесь  $f$  и  $\omega$  — только положительные величины.

$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi/\tau}^{2\pi/\tau} |S|^2 d\omega$  - Энергия импульса в полосе частот  $-2\pi/\tau \leq \omega \leq +2\pi/\tau$  содержит более 90% всей энергии импульса.

$2\pi/\tau = \Delta\omega = 2\pi F$  - условно считаем шириной спектра импульса.

Чем короче импульс, тем шире его спектр частот:

$$F = 1/\tau$$

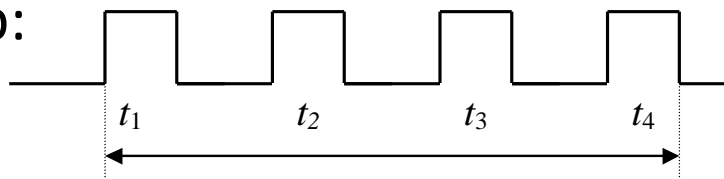
Для любого колебания  $FT \geq C$

$T$  - длительность колебания (с),  $F$  - ширина его спектра частот (Гц),  
 $C$  - константа, точное значение которой зависит от того, как условиться отсчитывать  $T$  и  $F$ .

$s(t)$  и  $S(\omega)$  не могут одновременно быть финитными функциями, т.е. обращаться в нуль вне конечного интервала  $t$  и  $\omega$ .

Сверху произведение  $FT$  принципиально ничем не ограничено, оно может быть сколь угодно больше  $C$ .

Пример:



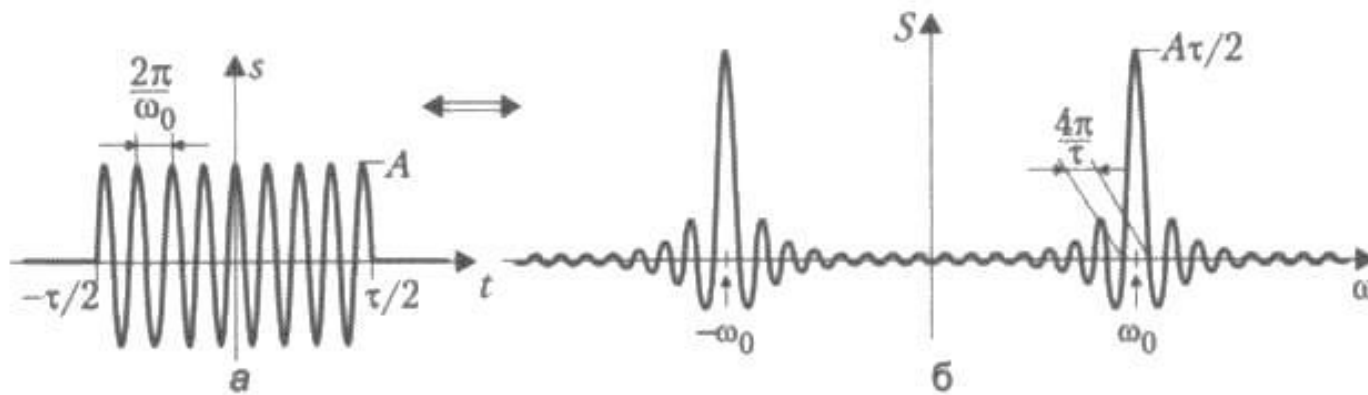
пачка одинаковых импульсов

Сумма одиночных импульсов с разными задержками во времени  $(t_1, t_2, \dots)$ .  $s(t - \tau) \div S(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} \rightarrow S_n = S(\omega) \sum_{k=1}^n e^{-j\omega t_k}$

Огибающая спектральной плотности имеет такую же протяженность, как для одиночного импульса. В то же время длительность всей пачки может быть  $T \gg \tau$ .

Если импульсы не перекрываются, огибающая спектральной плотности имеет такую же протяженность, как для одиночного импульса. Длительность всей пачки может быть  $T \gg \tau$ .

## 2) Радиоимпульс с прямоугольной огибающей



$$1/f_0 \ll \tau$$

$s_1(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$ , где  $s(t)$  — импульс из предыдущего примера (прямоугольный импульс).

$\omega_0 = 2\pi f_0$  - несущая частота.

$$s_1(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t) = s(t) \cdot \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \div \frac{1}{2} S(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S(\omega + \omega_0)$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \text{СВОЙСТВО 6 : } s(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \div S(\omega + \omega_0)$$

$$S_1(\omega) = \frac{1}{2} S(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S(\omega + \omega_0)$$

Спектр сдвинут на величину  $\omega_0$  по оси частот. Его существенная часть расположена в области ВЧ и занимает полосу  $2F$ , т.е. вдвое более широкую, чем у видеоимпульса.

Слагаемые в  $S_1(\omega)$  не перекрываются и структура спектра радиоимпульса в окрестности  $\omega_0$  такая же, как у огибающей прямоугольного импульса в окрестности  $\omega = 0$ .

3) Треугольный импульс:  $s_2(t) = \begin{cases} 1 - |t/\tau|, & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$

Функция четная  $\rightarrow$

$$S_2(\omega) = 2 \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cos \omega t dt = 2 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \frac{\sin \omega t}{\omega} \Big|_0^{\tau} + 2 \int_0^{\tau} \frac{\sin \omega t}{\omega} \frac{dt}{\tau} = 2 \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega^2 \tau} = \tau \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)^2}$$

$S_2(\omega)$  убывает на  $\infty$  как  $1/\omega^2$ , поскольку  $s_2(t)$  не имеет скачков.

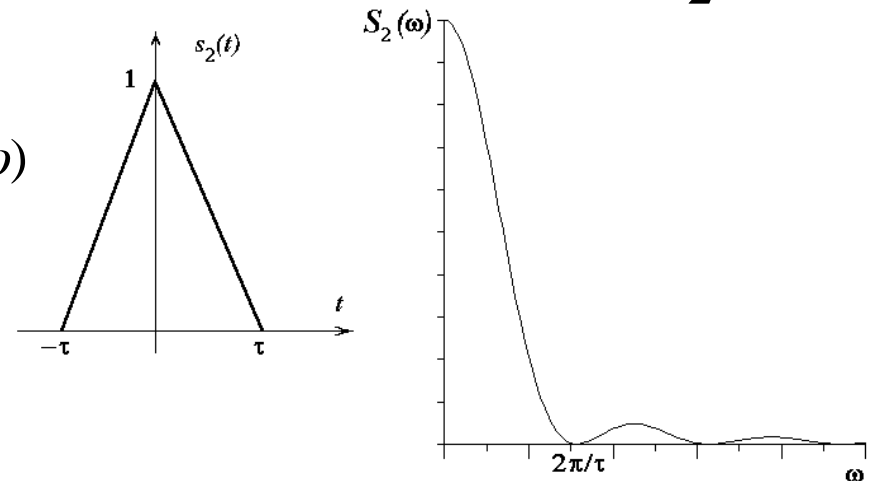
Вспоминаем спектр прямоугольного импульса:  $S(\omega) = \tau \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} \rightarrow$

$$S_2(\omega) = \frac{1}{\tau} S(\omega) \cdot S(\omega) \rightarrow \text{СВОЙСТВО 8}$$

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \div S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$$

$$s_2(t) = [s(t) * s(t)] \frac{1}{\tau}$$

$s_2(t)$  является сверткой двух прямоугольных импульсов

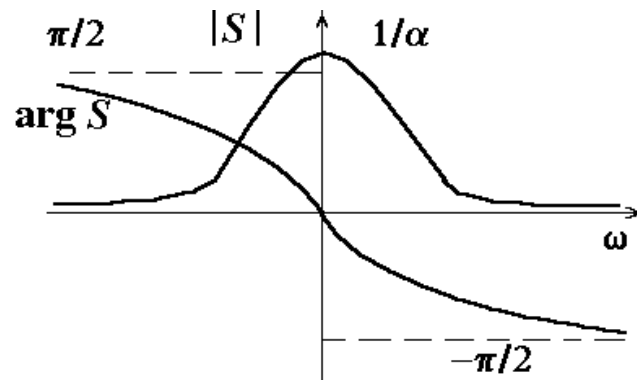
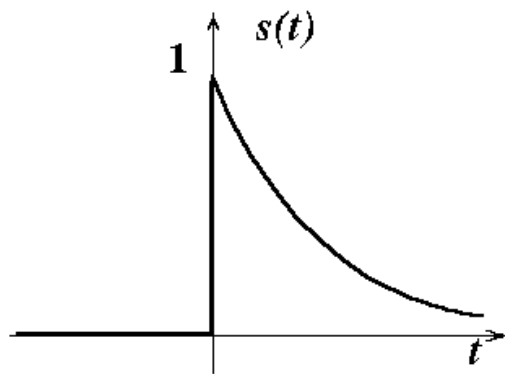


4) Экспоненциальный импульс:  $s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}$

Спектральная плотность:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} \cdot e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$|S(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \arg S = -\arctg \frac{\omega}{\alpha}$$



Форма зависимости  $S(\omega)$  как у АЧХ резонансного контура (лоренцева кривая), причем  $S \approx 1/\omega$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Чем больше  $\alpha$ , т. е. короче импульс, тем шире его спектр.

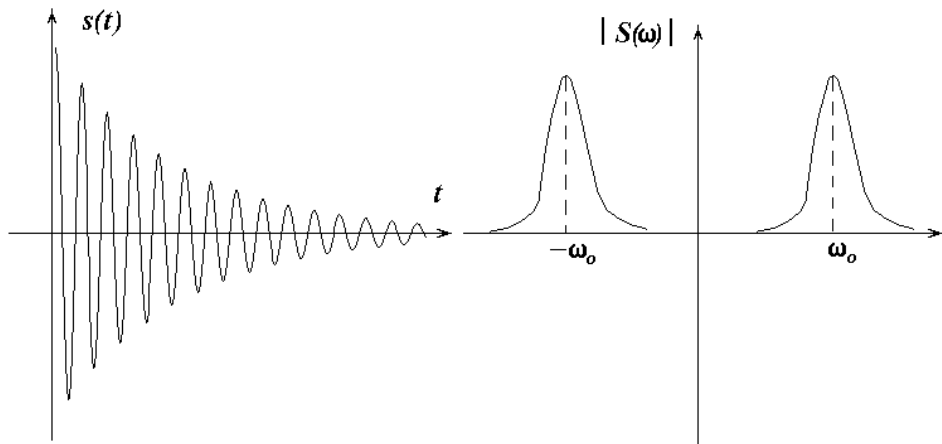
5) Затухающая синусоида:  $s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t, & t \geq 0 \end{cases}$

При  $t \geq 0$  :

$$s(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t = e^{-\alpha t} \cdot \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = \frac{1}{2} e^{-(\alpha - j\omega_0)t} + \frac{1}{2} e^{-(\alpha + j\omega_0)t}$$

Спектральная плотность:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( e^{-(\alpha - j\omega_0 + j\omega)t} + e^{-(\alpha + j\omega_0 + j\omega)t} \right) dt = \frac{1/2}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1/2}{\alpha + j(\omega + \omega_0)}$$



Спектр сосредоточен вблизи частоты  $\omega_0$ . Если  $\alpha \ll \omega_0 \rightarrow$  относительная ширина спектра мала:  $\Delta\omega/\omega \ll 1 \rightarrow$  имеем квазигармоническое колебание.

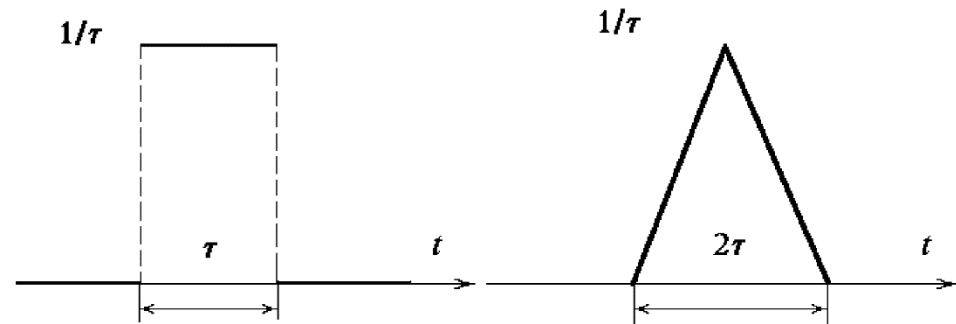


## 4.5. Дельта-функция.

Рассмотрим последовательность импульсных функций  $\delta_\tau(t)$ , таких, что длительность  $\tau$  уменьшается, а амплитуда увеличивается, причем площадь остается все время равной 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t) dt = 1$$

импульс сосредоточен  
вблизи  $t=0$



При  $\tau \rightarrow 0$  последовательность  $\delta_\tau(t)$  не имеет предела в классе обычных функций. Однако для всякой непрерывной и ограниченной функции  $f(t)$  существует предел интеграла

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_\tau(t) dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\tau(t) dt = f(0)$$

Предельный случай записывают в виде  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$

Определение  $\delta$ -функции 
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t'+t_0)\delta(t')dt' = f(t_0) \quad (*)$$

Дельта-функция имеет смысл лишь под знаком интеграла, который считается равным значению множителя при  $\delta$  в той точке, где аргумент  $\delta$ -функции обращается в нуль.

Сам символ  $\delta(t)$  можно понимать как импульсную функцию  $\delta_\tau(t)$ , длительность которой настолько мала, что для всех функций  $f(t)$ , которые мы рассматриваем, выполняется равенство (\*), и дальнейшее укорочение импульса  $\delta_\tau(t)$  и изменение его формы уже не влияет на результат интегрирования.

Реакция системы на очень кратковременное воздействие (длительность которого много меньше времени реакции системы) — это свободное колебание, его форма не зависит от формы импульсного воздействия, а размах определяется лишь интегралом (площадью импульса).

Преобразование Фурье от  $\delta$ -функции: 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

(на основании определения  $\delta$ -функции)

$|e^{-j\omega t_0}| = 1 \rightarrow$   $\delta$ -функция имеет равномерную по модулю плотность спектра вдоль всей оси  $\omega$ .

Формально  $\delta(t - t_0) \div e^{-j\omega t_0}$

Обратное преобразование Фурье приводит к расходящемуся интегралу и смысла не имеет:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \infty$$

б) Косинусоидальное колебание:

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{+j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} = \dots \quad e^{+j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\dots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad - \text{ обратное преобразование Фурье}$$

Спектральная плотность:  $S(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$

$$\cos \omega_0 t \div \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$\delta$ -функцию можно использовать для представления спектральной плотности колебаний, имеющих дискретный спектр.