

4. Анализ цепей при негармонических воздействиях.

Практически любое реальное колебание может быть разложено в совокупность гармонических колебаний. По принципу суперпозиции действие каждой гармонической составляющей на линейную цепь проявляется независимо от остальных составляющих.

4.1. Частотный спектр периодического колебания. Ряд Фурье.

$s(t)$ - периодическое колебание с периодом T

→ $s(t+T)=s(t)$ для любого t .

Ряд Фурье в комплексной форме $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\Omega n t}$, где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$

Коэффициенты ряда Фурье $S_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{-jn\Omega t} dt$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

Гармонические составляющие колебания $s(t)$ имеют частоты $n\Omega$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

Интегрирование производится по периоду (T)

$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{jn\Omega t}$ умножаем на $e^{-jm\Omega t}$ и интегрируем по (T) :

Ортогональность множества функций $e^{jn\Omega t}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) на интервале длиной T :

$$\int_{(T)} e^{jn\Omega t} e^{-jm\Omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ T & \text{при } n = m \end{cases} \rightarrow \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{-jn\Omega t} dt = S_n \cdot T, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\rightarrow S_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{-jn\Omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

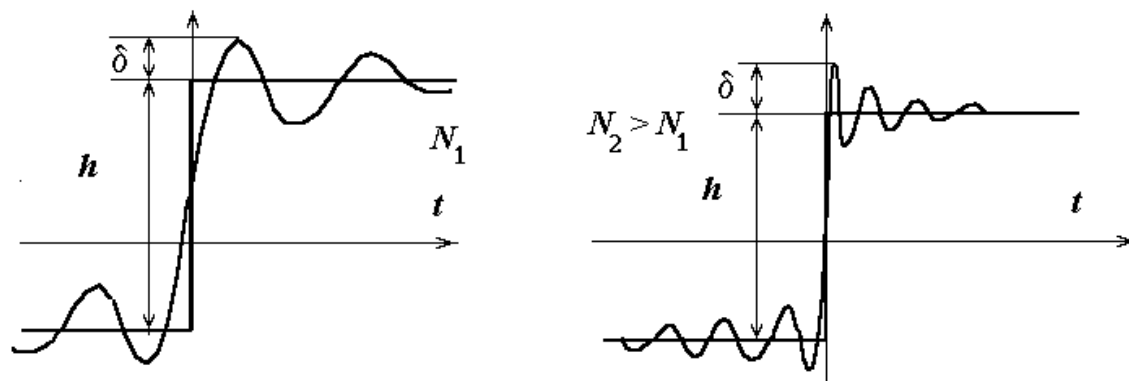
Существование у $s(t)$ коэффициентов Фурье — необходимое, но еще не достаточное условие сходимости ряда Фурье.

Достаточное условие сходимости — условие Дирихле:

$s(t)$ ограничена и имеет на интервале разложения конечное число экстремумов и разрывов. Ряд сходится к $s(t)$ во всех точках ее непрерывности, а в точках разрыва — к полусумме нижнего и верхнего пределов:

$$\frac{1}{2} [s(t-0) + s(t+0)]$$

Вблизи точек разрыва сходимость неравномерная:



Поведение конечной суммы ряда Фурье $s_N(t)$ вблизи скачка $s(t)$ (N —число членов суммы). Неравномерная сходимость проявляется в наличии осцилляций $s_N(t)$ вблизи скачка $s(t)$.

Относительная величина всплеска $\delta / h = 9\%$ не уменьшается с ростом N , но частота осцилляций растет. Это свойство Фурье-разложения называется явлением Гиббса.

$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\Omega_n t}$ Возводим в квадрат, интегрируем по периоду, используем свойство ортогональности

$$\rightarrow \frac{1}{T} \int_{(T)} [s(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2 \quad - \text{ равенство Парсеваля}$$

Интеграл слева - мощность колебания. Мощность $s(t)$ равна сумме мощностей ее составляющих. $|S_n|^2$ — мощность составляющей, имеющей частоту $n\Omega$.

В общем случае мощность суммы колебаний не равна сумме мощностей. Здесь - исключение из данного правила, обусловленное ортогональностью функций $e^{jn\Omega t}$ на интервале T .

$$s(t) \text{ вещественно} \quad \rightarrow \quad S_{-n} = S_n^* \quad \rightarrow$$

$$S_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad S_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}, \quad n = 0, +1, +2, \dots$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \text{ - тригонометрическая форма ряда,}$$

$$\text{где} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \cos n\Omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \sin n\Omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) dt \quad \frac{a_0}{2} \text{ - постоянная составляющая}$$

Обозначения: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 |S_n|$, $\psi_n = \arg S_n$, $A_0 = a_0 / 2 = S_0$

→ еще одна форма ряда Фурье: $s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$

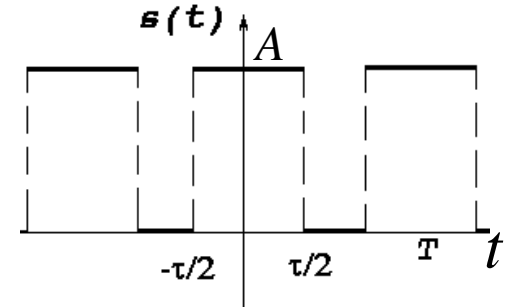
Равенство Парсеваля $\frac{1}{T} \int_{(T)} [s(t)]^2 dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}$

Колебание частотой Ω - основная гармоника, остальные — высшие гармоники. Периодическое колебание имеет дискретный спектр частот, причем все частоты кратны основной частоте. N -ая гармоника имеет амплитуду A_n , начальную фазу ψ_n , ее комплексная амплитуда равна $2S_n$.

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

Пример: последовательность прямоугольных импульсов

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < |t| \leq T/2 \end{cases} \quad \text{на периоде } T$$



τ/T - «коэффициент заполнения»,

T/τ - «скважность» импульсов.

Коэффициенты ряда Фурье в тригонометрической форме:

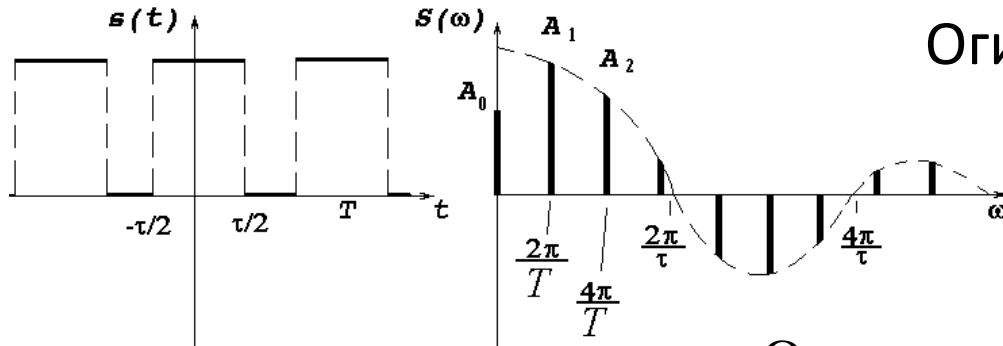
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \cos n\Omega t dt = 4 \frac{A}{T} \int_0^{\tau/2} \cos n\Omega t dt = 4 \frac{A}{T} \cdot \frac{\sin n\Omega t}{n\Omega} \Big|_0^{\tau/2} = 2 \frac{A\tau}{T} \cdot \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$$

Обозначим $x = \frac{n\Omega\tau}{2} \rightarrow a_n = 2 \frac{A\tau}{T} \cdot \frac{\sin x}{x} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$

$s(t)$ - четная $\rightarrow b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s(t) \sin n\Omega t dt = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{4A}{T} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{2A\tau}{T} \quad \frac{a_0}{2} = \frac{A\tau}{T} \text{ - постоянная составляющая}$$

Итак:
$$s(t) = A \frac{\tau}{T} + 2 \frac{A\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}} \cos n\Omega t \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$



Огибающая спектра:
$$2 \frac{A\tau}{T} \cdot \frac{\sin \frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$$

Нули огибающей:
$$\sin \frac{n\Omega\tau}{2} = 0 \rightarrow \frac{n\Omega\tau}{2} = n\pi \rightarrow n\Omega = \frac{2\pi n}{\tau}$$

Нули огибающей могут не совпадать ни с одной из частот спектра $n\Omega$

Амплитуды гармоник убывают $\sim 1/n$, т.е. ряд сходится медленно, что объясняется наличием скачков функции $s(t)$.

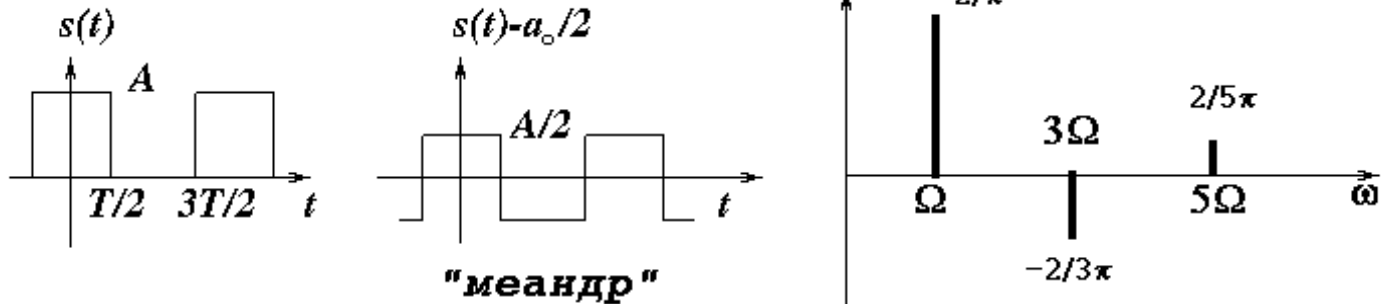
Если $T/\tau > 10$, то в полосе частот от нуля до $2\pi/\tau$ заключается более 90% всей мощности колебания.

Наиболее существенная часть спектра занимает конечную полосу частот $\Delta f = 1/\tau$. Эта полоса тем шире, чем уже импульс.

Если увеличивать T , сохраняя $\tau = \text{const}$, то будет уменьшаться частота Ω , спектральные линии будут располагаться гуще, а их огибающая останется на месте.

Если же при $T = \text{const}$ увеличивать τ , то расположение спектральных линий сохранится, огибающая же будет сужаться по оси ω , т.е. будет сужаться полоса частот, занимаемая существенной частью спектра.

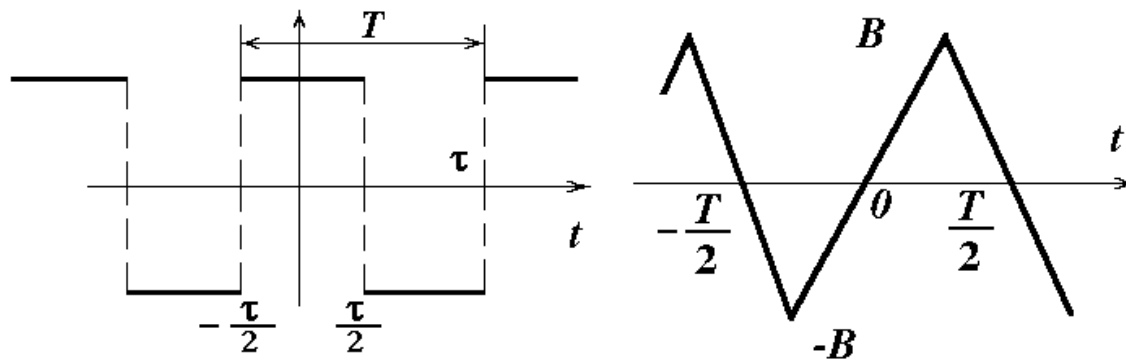
$$\tau/T = 0,5$$



$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad \text{или } a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2A}{(2k+1)\pi} (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$$

В любом случае произвольный сдвиг во времени влияет на начальные фазы гармоник, однако амплитуды гармоник не изменятся. Сохранится и распределение мощности по спектру частот.

Если проинтегрировать прямоугольное колебание ($\tau = T/2$) без постоянной составляющей, получим **треугольное колебание**:



Коэффициенты Фурье можно вычислить путем почленного интегрирования ряда Фурье для меандра — такая операция возможна всегда. Коэффициенты ряда для $s_1(t)$ убывают как n^{-2} , поскольку функция непрерывна и обладает первой производной.

$$\int s_{\text{прям}}(t) dt \approx \int \frac{\cos n\Omega t}{n} dt = \frac{\sin(n\Omega t)}{n \cdot (n\Omega)} \approx \frac{1}{n^2}$$

Почленное дифференцирование ряда Фурье возможно только, когда существует производная $s(t)$.

4.2. Почти периодические колебания

Колебания вида $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\omega_n t}$, где частоты ω_n не обязательно находятся в кратном соотношении друг к другу.

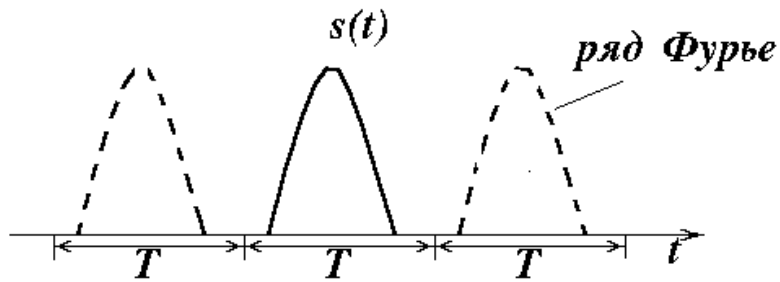
$$s(t) \text{ вещественно} \rightarrow S_{-n} = S_n^*, \quad \omega_{-n} = \omega_n.$$

Колебания не являются периодическими, но имеют дискретный спектр частот.

$$\text{Пример: } s(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$$

Если ω_1, ω_2 — величины одного порядка, то $s(t)$ — квазигармоническое колебание, огибающая которого совершает «биения» с частотой $|\omega_1 - \omega_2|$. Колебание будет строго периодическим только в том случае, когда $\omega_1/\omega_2 = m/n$ (m, n — целые). Если же ω_1/ω_2 — иррационально, то невозможно указать такое T , после которого все в точности повторяется (хотя может быть и очень близко, отсюда и название — почти периодическое).

4.3. Колебания с непрерывным спектром. Преобразование Фурье.



Ряд Фурье позволяет получить разложение для периодических функций.

Разложение $s(t)$ на всей оси $-\infty < t < \infty \rightarrow T \rightarrow \infty \rightarrow \Omega = 2\pi/T \rightarrow 0$

В пределе спектр будет непрерывно заполнять всю ось частот ω , а сумма гармоник превратится в интеграл.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad - \text{ прямое преобразование Фурье,}$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad - \text{ обратное преобразование Фурье.}$$

$S(\omega)$ - Фурье-образ функции $s(t)$ или спектральная плотность колебания $s(t)$.

$S(\omega)$ существует, если $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$ (*)

В частности, для этого необходимо, чтобы $s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Если $s(t)$ удовлетворяет условию (*) и, кроме того, условию Дирихле в любом конечном интервале, то в обратном преобразовании Фурье интеграл

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

сходится в смысле главного значения к $s(t)$ во всех точках ее непрерывности к полусумме верхнего и нижнего пределов в точках разрыва, т.е.

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{s(t-0) + s(t+0)}{2}$$

4.3. Свойства преобразования Фурье

1) Между $s(t)$ и $S(\omega)$ существует взаимно-однозначное соответствие: $s(t) \div S(\omega)$.

2) Линейность: $s_1(t) + s_2(t) \div S_1(\omega) + S_2(\omega)$ и $As(t) \div AS(\omega)$,
где $A = const$.

3) Если $s(t)$ - вещественная $\rightarrow S(-\omega) = S^*(\omega) \rightarrow$
 $|S(\omega)|$ и $\operatorname{Re} S(\omega)$ — четные функции
 $\arg S(\omega)$ и $\operatorname{Im} S(\omega)$ — нечетные.

4) Изменение масштаба по t или по ω : $s(at) \div \frac{1}{a} S(\omega/a)$, где $a > 0$

5) Сдвиг во времени: $s(t - \tau) \div S(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$, $\tau = const$

6) Сдвиг спектра по оси частот: $s(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \div S(\omega + \omega_0)$, $\omega_0 = const$

7) Дифференцирование и интегрирование во времени:

$$\frac{ds}{dt} \div j\omega S(\omega), \quad \int_{-\infty}^t s(t') dt' \div \frac{S(\omega)}{j\omega}$$

8) Свертка колебаний:

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \div S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$$

свертка коммутативна: $S_1 * S_2 = S_2 * S_1$

9) Произведение колебаний: $s_1(t)s_2(t) \div \frac{1}{2\pi} S_1(\omega) * S_2(\omega)$

свертка Фурье-образов

10) Равенство Парсеваля: $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$

энергия колебания

сумма энергий
гармонических
составляющих

11) Обобщение предыдущего свойства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)S_2^*(\omega)d\omega$$

12) Обратимость прямого и обратного преобразования Фурье - они отличаются только знаком показателя экспоненты: ω и t могут меняться местами.

Если сигналу $s(t)$ соответствует спектр $S(\omega) \rightarrow$
спектр сигнала, который описывается функцией $S(t)$ будет
иметь вид $2\pi s(-\omega)$.