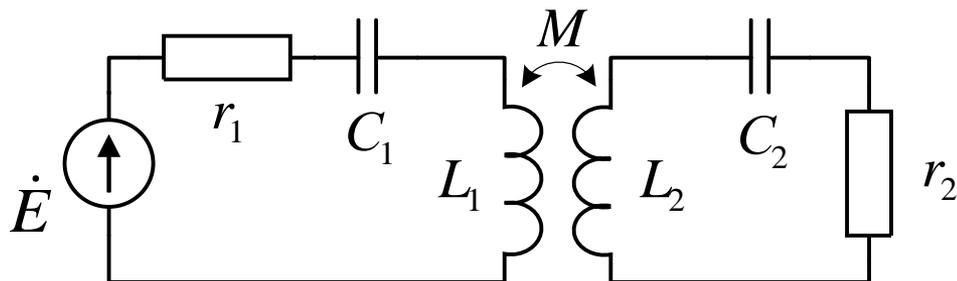


### 3.6. Вынужденные колебания в двух связанных колебательных контурах.



$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_{11} + \dot{\psi}_{12}$  -потокосцепление  $L_1$

$\dot{\psi}_{11} = L_1 \dot{I}_1$  -потокосцепление самоиндукции  $L_1$

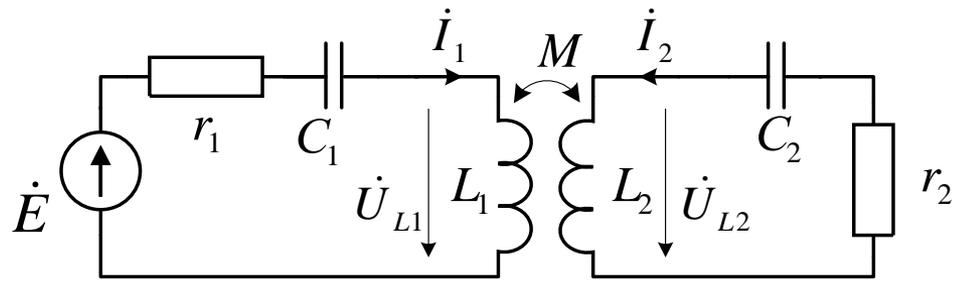
$\dot{\psi}_{12} = M_{12} \dot{I}_2$  -потокосцепление  $L_1$ , обусловленное током  $\dot{I}_2$

$\dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_{22} + \dot{\psi}_{21}$  -потокосцепление  $L_2$

$\dot{\psi}_{22} = L_2 \dot{I}_2$  -потокосцепление самоиндукции  $L_2$

$\dot{\psi}_{21} = M_{21} \dot{I}_1$  -потокосцепление  $L_2$ , обусловленное  $\dot{I}_1$

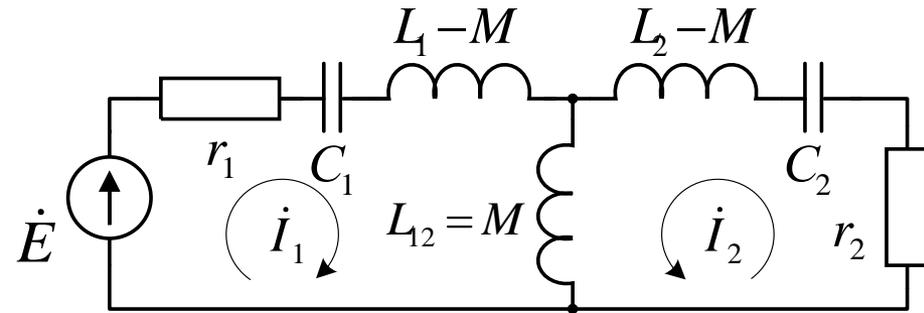
$M_{12} = M_{21} = M$  -коэффициент взаимной индукции (взаимная индуктивность). Знак  $M$  зависит от направлений отсчета токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$



$$\begin{aligned} \dot{U}_{L1} &= j\omega L_1 \cdot \dot{I}_1 + j\omega M \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{L2} &= j\omega M \cdot \dot{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \dot{I}_2 \end{aligned}$$

Уравнения по 2-му закону Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \left( r_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ 0 &= j\omega M \dot{I}_1 + \left( r_2 + j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right) \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \left( r_1 + j\omega(L_1 - M) - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega M \right) \cdot \dot{I}_1 + j\omega M \cdot \dot{I}_2 \\ 0 &= j\omega M \cdot \dot{I}_1 + \left( r_2 + j\omega(L_2 - M) - \frac{j}{\omega C_2} + j\omega M \right) \cdot \dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения:

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 \frac{j\omega M}{r_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

Подставляем в первое:

$$\dot{E} = \left( r_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \right) \cdot \dot{I}_1 + j\omega M \cdot \frac{-j\omega M}{r_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \dot{I}_1$$

Обозначим:  $z_1$  и  $z_2$  — импедансы контуров;

$$z_1 = r_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \quad z_2 = r_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

$z_{12}$  — сопротивление связи:

$$z_{12} = j\omega M \quad \rightarrow \quad (z_{12})^2 = -(\omega M)^2$$

Тогда: 
$$\dot{E} = \dot{I}_1 \left( z_1 + \frac{(\omega M)^2}{z_2} \right) = \dot{I}_1 \left( z_1 - \frac{(z_{12})^2}{z_2} \right)$$

$$\frac{(\omega M)^2}{z_2} = -\frac{(z_{12})^2}{z_2}$$
 - вносимое сопротивление в 1-ый контур из 2-го.

Входное сопротивление  
первого контура:

$$Z_{ex} = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_1} = z_1 + \frac{(\omega M)^2}{z_2} = z_1 - \frac{(z_{12})^2}{z_2}$$

Подставляем  $\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{z_1 - \frac{(z_{12})^2}{z_2}}$  во второе уравнение:

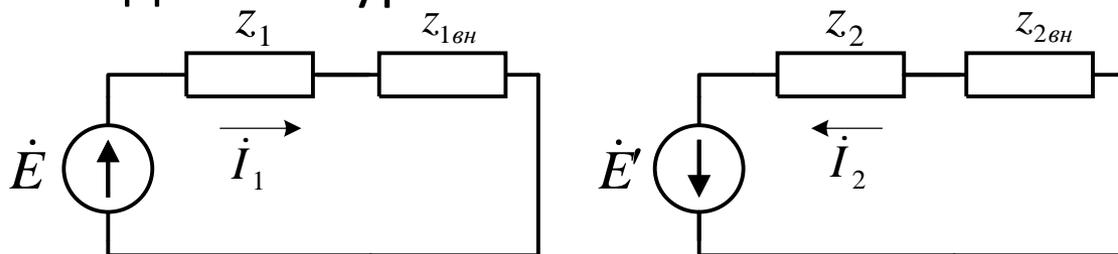
$$\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M}{z_2} \frac{\dot{E}}{z_1 + \frac{(\omega M)^2}{z_2}} = \frac{-j\omega M \cdot \dot{E}}{z_1 z_2 + (\omega M)^2} = \frac{-\dot{E} \cdot \frac{j\omega M}{z_1}}{z_2 + \frac{(\omega M)^2}{z_1}} = \frac{-\dot{E} \cdot \frac{z_{12}}{z_1}}{z_2 - \frac{(z_{12})^2}{z_1}}$$

ЭДС эквивалентного источника, пересчитанного во второй контур

$$\dot{E}' = -\dot{E} \cdot \frac{z_{12}}{z_1}$$

$z_{2вн} = -z_{12}^2 / z_1$  - вносимое сопротивление во 2-ой контур со стороны 1-го.

Формулы для комплексных амплитуд токов в контурах соответствуют одноконтурным эквивалентным схемам замещения:



Чем сильнее связаны контуры, т.е.  $|z_{12}|$  больше, тем больше вносимые сопротивления. Вносимые сопротивления также увеличиваются при уменьшении  $|z_1|$  и  $|z_2|$ , т.е. при приближении к последовательному резонансу в контурах.

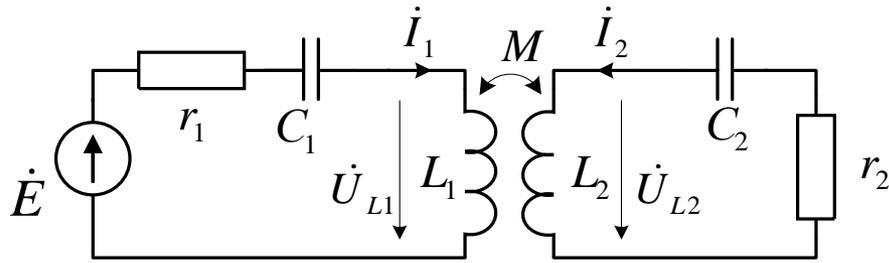
В системе с малыми потерями сопротивление связи:  $z_{12} = j\omega M = jx_{12}$

$$\rightarrow z_{1вн} = \frac{x_{12}^2}{r_2 + jx_2} = \frac{x_{12}^2}{|z_2|^2} r_2 - j \frac{x_{12}^2}{|z_2|^2} x_2 = r_{1вн} + jx_{1вн}$$

$r_{1вн} > 0$ , знак  $x_{1вн}$  противоположен знаку  $x_2$ . Аналогичными свойствами обладает  $z_{2вн} = r_{2вн} + jx_{2вн}$ .

АЧХ коэффициента передачи  $\dot{I}_2 / \dot{E}$

Параметры контуров одинаковы  $z_1 = z_2 = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r(1 + j\xi)$



$$\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right), \quad Q = \frac{\rho}{r}$$

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Обозначим:

коэффициент связи между контурами

$$k = |x_{12}| / \rho = \frac{\omega M}{\omega_0 L} \cong \frac{M}{L} \quad \rightarrow \quad 0 \leq k \leq 1$$

параметр связи  $\varkappa = Qk = Q \frac{|x_{12}|}{\rho} = \frac{|x_{12}|}{r}$

$$|x_{12}| = k\rho$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-\dot{E} \cdot \frac{z_{12}}{z_1}}{z_2 - \frac{(z_{12})^2}{z_1}} \quad \rightarrow \quad |\dot{I}_2| = |\dot{E}| \left| \frac{z_{12}}{z_1 z_2 - z_{12}^2} \right| = |\dot{E}| \frac{k\rho}{r^2 |(1 + j\xi)^2 + \varkappa^2|} \quad \rightarrow$$

$$|I_2| = \frac{|\dot{E}|}{r} \frac{\alpha}{\sqrt{(1 + \alpha^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}$$

При  $Q \gg 1$  в полосе частот, близких к  $\omega_0$ ,  $\alpha$  меняется незначительно и можно считать, что  $\alpha = \text{const}$ , от частоты зависит только  $\xi$ .

Экстремумы подкоренного выражения:

$$2(1 + \alpha^2 - \xi^2)(-2\xi) + 4(2\xi) = 0 \quad \rightarrow \quad \xi^2 + 2 - (\alpha^2 + 1) = 0$$

3 корня. Первый корень  $\xi = 0$  соответствует частоте  $\omega = \omega_0$ . Здесь всегда есть экстремум.

Два другие корня:  $\xi_{2,3} = \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$ .

В зависимости от значения  $\alpha$  возможны три случая:

$$1). \quad \alpha < 1 \quad \rightarrow \quad k < 1/Q = d \quad \rightarrow$$

$\xi_{2,3}$  мнимые  $\rightarrow$  АЧХ имеет только один экстремум при  $\omega = \omega_0$ , который является максимумом:

$$|\dot{I}_2|_{\max} = \frac{|\dot{E}|}{r} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} < \frac{|\dot{E}|}{2r}$$

2).  $\alpha > 1 \rightarrow k > 1/Q = d \rightarrow$

$\xi_{1,2,3}$  вещественные  $\rightarrow$  АЧХ имеет максимумы при  $\xi_2$  и  $\xi_3$ , а между ними при  $\xi_1 = 0$  — минимум:

$$\xi_{2,3} = \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad \text{подставляем в} \quad |\dot{I}_2| = \frac{|\dot{E}|}{r} \frac{\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}$$

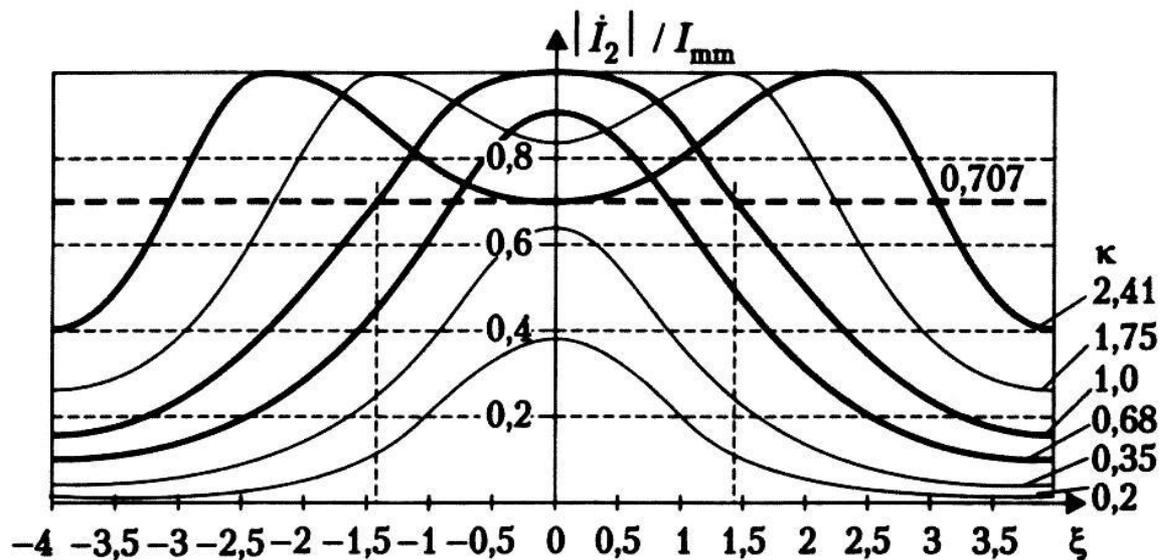
$$|\dot{I}_2|_{\max} = \frac{|\dot{E}|}{r} \frac{\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2 - \alpha^2 + 1)^2 + 4(\alpha^2 - 1)}} = \frac{|\dot{E}|}{2r}, \quad |\dot{I}_2|_{\min} = \frac{|\dot{E}|}{r} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} < \frac{|\dot{E}|}{2r}$$

3).  $\alpha = 1 \rightarrow k = 1/Q = d$ , граничный случай  $\rightarrow$

$\xi_{1,2,3} = 0 \rightarrow$  АЧХ имеет один максимум. Соответствующее значение  $k$  — критический коэффициент связи  $k_{кр} = 1/Q$ .

$$|\dot{I}_2| = \frac{|\dot{E}|}{r} \frac{1}{\sqrt{(2-\xi^2)^2 + 4\xi^2}} = \frac{|\dot{E}|}{r} \frac{1}{\sqrt{1+\xi^4}}, \quad |\dot{I}_2|_{\max} = \frac{|\dot{E}|}{2r}$$

В окрестности максимума форма кривой такая, как у параболы четвертой степени, а не второй, т.е. вершина более плоская, чем у одиночного контура.



Таким образом, при  $k < k_{кр}$  АЧХ имеет один максимум (как у одиночного контура), однако ее склоны более крутые: с ростом  $|\xi|$  коэффициент передачи уменьшается, как  $1/\xi^2$ , а не как  $1/\xi$  в случае одиночного контура. Максимум  $|I|$  с увеличением  $k$  растет и достигает максимальной величины  $|E|/2r$  при  $k = k_{кр}$ . При дальнейшем увеличении  $k$  максимум раздваивается.

Частоты, на которых достигаются максимумы тока, называются частотами связи:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - d^2}}} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - d^2}}}$$

Полосы пропускания:

1).  $\kappa < 1 \rightarrow \xi_{cp} = \pm \sqrt{\sqrt{2} - 1} = \pm 0,64 \cdot d \rightarrow S = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = 0,64 \cdot d$

2).  $\kappa > 1 \rightarrow$  Самая широкая полоса пропускания получится, когда минимум кривой на частоте  $\omega_0$  достигнет уровня 0,707. Для этого случая:  $\kappa = 2,41, S = 3,1 \cdot d$

3).  $\kappa = 1 \rightarrow$  Критическая связь (оптимальная)  $\rightarrow S = \sqrt{2} \cdot d$

Склоны более крутые, чем у АЧХ одиночного контура. Фильтр на связанных контурах обладает более высокой избирательностью по сравнению с одиночным контуром, его АЧХ по форме ближе к П-образной характеристике идеального фильтра.

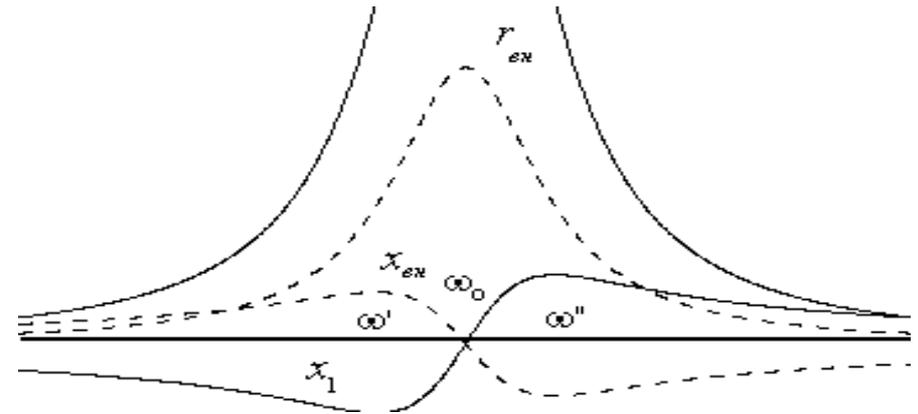
Замечания:

1) Вид АЧХ объясняется взаимным влиянием контуров друг на друга. Знак  $x_{1вн}$  противоположен знаку  $x_2 \approx x_1$ .

$$r_{1вн} = \frac{x_{12}^2}{|z_2|^2} r_2 \quad x_{1вн} = -j \frac{x_{12}^2}{|z_2|^2} x_2$$

Провал на АЧХ определяет максимум  $r_{1вн}$  при  $\xi = 0$ .

«Горбы» АЧХ объясняются компенсацией  $x_{1вн}$  и  $x_1$ .

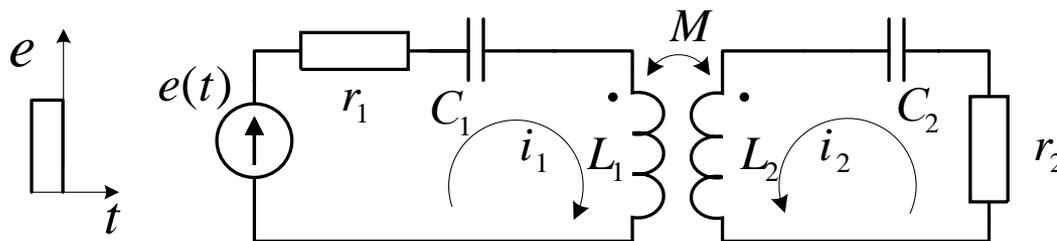


Если 1-й контур с ЭДС  $E$  рассматривать как генератор, а второй контур — как нагрузку, то они оказываются согласованы — в нагрузку передается максимально возможная мощность. Следовательно, максимальная амплитуда тока  $|I|=|E|/2r$  является предельно возможной при заданных  $|E|$  и  $r$  обоих контуров.

2) Два связанных контура можно использовать в качестве полосового фильтра. Подбором величины  $k$  можно влиять на форму АЧХ.

3) Если контуры отличаются по параметрам, ( $r_1 \neq r_2$ ,  $Q_1 \neq Q_2$ ), но настроены одинаково ( $\omega_{01} = \omega_{02}$ ), то АЧХ системы почти не отличается от рассмотренных.

### 3.7. Свободные колебания в двух связанных контурах.



По окончании импульса в обоих контурах еще некоторое время будет течь ток, а на элементах цепи фиксироваться напряжение. Из-за диссипации энергии система перейдет в стационарное состояние.

Резонансные частоты контуров одинаковы  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

Коэффициент затухания  $\alpha = R/(2L)$

Коэффициент связи  $k = M/L$

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + M \frac{di_2}{dt} = 0 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1'' + 2\alpha i_1' + \omega_0^2 i_1 + k i_2'' = 0 \\ i_2'' + 2\alpha i_2' + \omega_0^2 i_2 + k i_1'' = 0 \end{cases}$$

Частные решения  $i_1 = A_1 \exp(\lambda t)$   $i_2 = A_2 \exp(\lambda t)$

Характеристическое уравнение 4-го порядка относительно  $\lambda$

Для случая высокодобротных контуров, при  $\alpha \ll \omega_0$

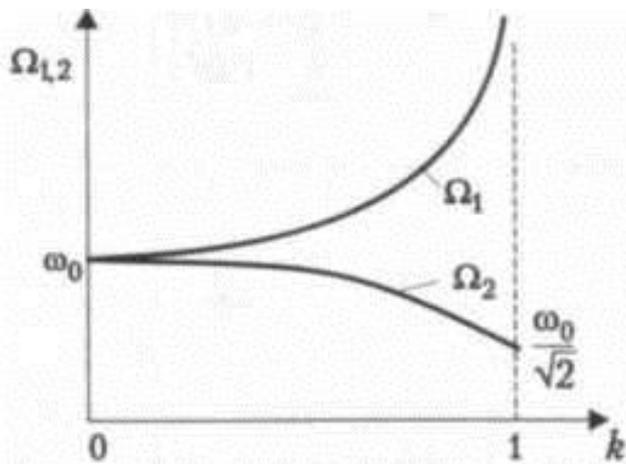
$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega_1 \quad \Omega_1 \approx \omega_0 / \sqrt{1-k} \quad \text{Быстрая частота связи}$$

$$\lambda_{3,4} = -\alpha \pm j\Omega_2 \quad \text{где} \quad \Omega_2 \approx \omega_0 / \sqrt{1+k} \quad \text{Медленная частота связи}$$

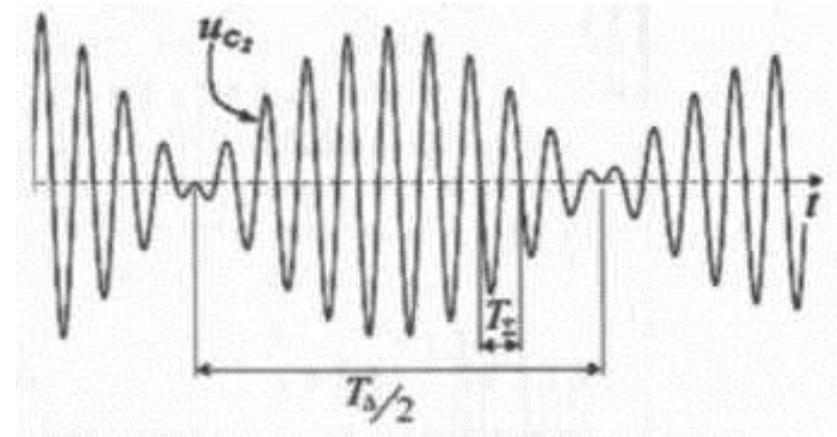
Решение системы при начальном токе в первом контуре и нулевом токе во втором контуре:

$$i_1(t) = \frac{i_1(0)}{2} e^{-\alpha t} [\cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t)] = i(0) \cdot e^{-\alpha t} \cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t\right)$$

$$i_2(t) = \frac{i_1(0)}{2} e^{-\alpha t} [\cos(\Omega_2 t) - \cos(\Omega_1 t)] = i(0) \cdot e^{-\alpha t} \sin\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t\right)$$



Зависимости частот связи от коэффициента связи



Осциллограмма напряжения на конденсаторе второго контура

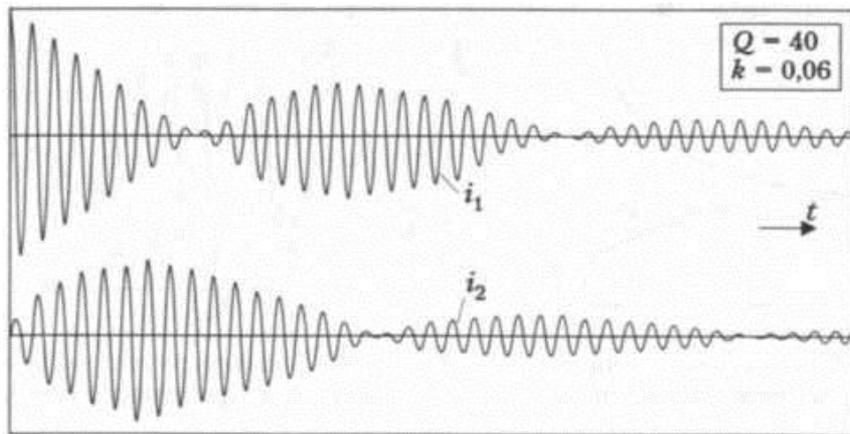
Период огибающей  $T_{\Delta} = 4\pi / (\Omega_1 - \Omega_2)$

Период высокочастотного «заполнения»  $T_{\Sigma} = 4\pi / (\Omega_1 + \Omega_2)$

$$N = T_{\Delta} / T_{\Sigma} = \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{1-k}}{\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k}}$$

При  $k \ll 1 \rightarrow k \approx 2/N$

Циклическая «перекачка» энергии между контурами происходит с разностной (*медленной*) частотой  $(\Omega_1 - \Omega_2)/2$ . Перераспределение энергии между индуктивными и емкостными накопителями происходит с высокой (*быстрой*) частотой  $(\Omega_1 + \Omega_2)/2$ .



$$\alpha = 2,41$$

Осциллограммы напряжений на сопротивлениях в связанных контурах

Сопоставление режимов вынужденных и свободных колебаний:

1. Частоты максимумов резонансных характеристик близки к  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$
2. При слабой связи между контурами частоты расположены близко, и оба максимума резонансной характеристики совпадают. При большем коэффициенте связи  $\Omega_1 - \Omega_2$  растет, на АЧХ системы связанных контуров появляются два максимума.