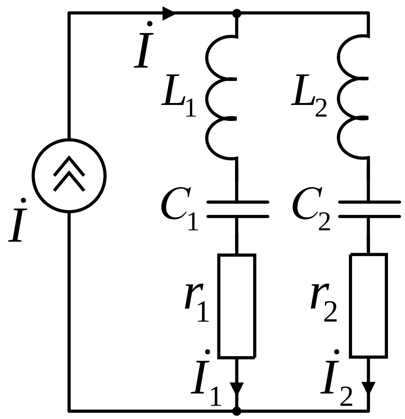
3.5. Сложный параллельный колебательный контур



Контур, у которого хотя бы одна параллельная ветвь содержит реактивности обоих знаков.

Магнитная связь между L_1 и L_2 отсутствует.

Условие резонанса - равенство нулю общей реактивной проводимости $b=0$ (или общего реактивного сопротивления $x=0$).

Пренебрегаем малыми величинами второго порядка $(r^2 << x^2)$

Резонансные частоты определяются соотношениями:

а) $x_1+x_2=0$, или $x_1=-x_2$ — параллельный резонанс (резонанс токов) — сопротивление контура максимально и чисто активное;

б) $x_1 = 0$ —последовательный резонанс (резонанс напряжений) в 1-й ветви;

в) $x_2 = 0$ — последовательный резонанс во второй ветви.

При последовательных резонансах сопротивление контура минимально (и вещественно), причем сопротивлением другой, нерезонансной, ветви можно пренебречь.

Частоты последовательных резонансов $\omega_{S1} = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \ \ \omega_{S2} = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$

Частота параллельного резонанса

$$\omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1} + \omega_p L_2 - \frac{1}{\omega_p C_2} = 0, \quad \text{—>} \quad \omega_p (L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega_p}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = 0$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad L = L_1 + L_2 \qquad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Значение ω_p всегда лежит между ω_{S1} и ω_{S2}. Это следует из того, что $|z|$ является непрерывной функцией ω, поэтому ее минимумы и максимумы чередуются.

Параллельный резонанс

$$z_1 = r_1 + j\left(\omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1}\right) \qquad z_2 = r_2 + j\left(\omega_p L_2 - \frac{1}{\omega_p C_2}\right)$$

$$y_p = y_1 + y_2 = \frac{r_1}{|z_1|^2} + \frac{r_2}{|z_2|^2} - j\frac{x_1}{|z_1|^2} - j\frac{x_2}{|z_2|^2} \approx \frac{r_1 + r_2}{x_1^2} = \frac{r_1 + r_2}{x_2^2}$$

$$|x_1| = |x_2| >> r_1 + r_2$$

$r = r_1 + r_2$ - суммарное сопротивление потерь,

$\rho = \omega_p \mathrm{L} = 1/\omega_p \mathrm{C}$ - характеристическое сопротивление для ω_p ,

$Q = \dfrac{\rho}{r}$ - добротность контура при ω_p .

Резонансное сопротивление контура

$$R_0 = \frac{x_1^2}{r} = \frac{(\omega_p L_1 - 1/\omega_p C_1)^2}{r} = \frac{x_2^2}{r}$$

Обозначим

$p_L = \frac{x_{L1}}{x_L} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$ - коэффициент включения индуктивности (в ветвь 1)

$p_C = \frac{x_{C1}}{x_C} = \frac{C}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ - коэффициент включения емкости (в ветвь 1)

$$x_1 = \omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1} = \omega_p L p_L - \frac{1}{\omega_p C} p_C = \rho(p_L - p_C) \quad \text{—>}$$

$$R_0 = \frac{\rho^2}{r}(p_L - p_C)^2 = \rho Q(p_L - p_C)^2 = R_{01} p^2$$, т.к. $R_0 = \frac{x_1^2}{r} = \frac{x_2^2}{r}$

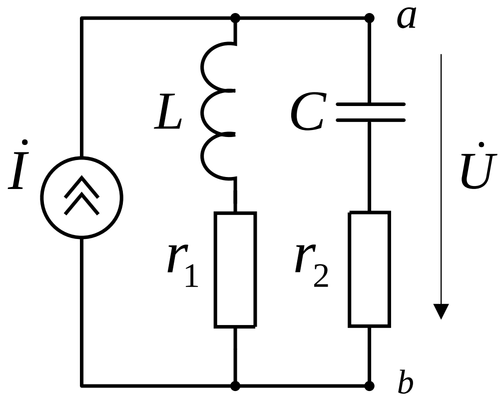
$R_{01} = \rho Q$ - сопротивление простого параллельного контура (или контура 1 вида) при резонансе

$p = |p_L - p_C|$ - коэффициент включения контура (результирующий).

p не зависит от того, для какой ветви брать p_L и p_C ,
т.к. $|(1 - p_L) - (1 - p_C)| = |p_L - p_C|$

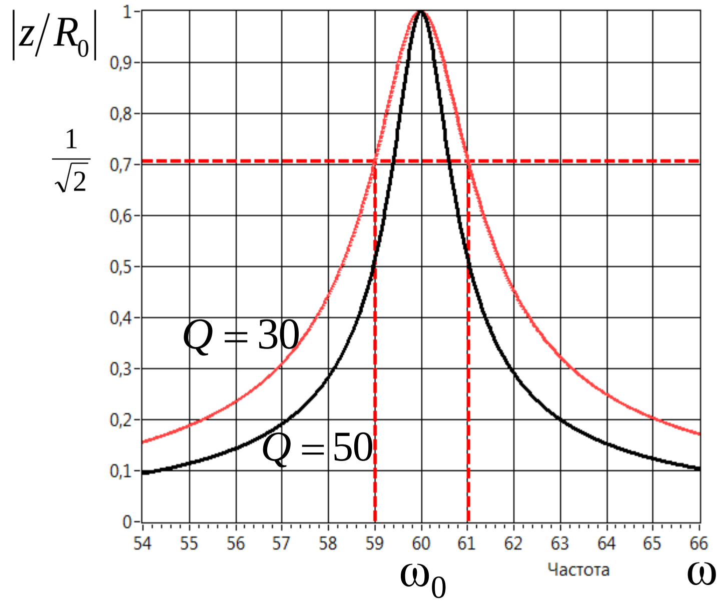
Рассмотрим частные случаи:

1) Контур 1-го вида (простой)

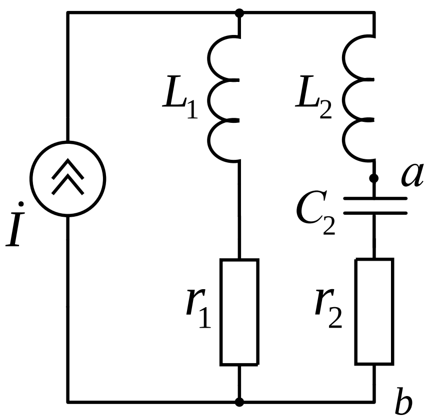


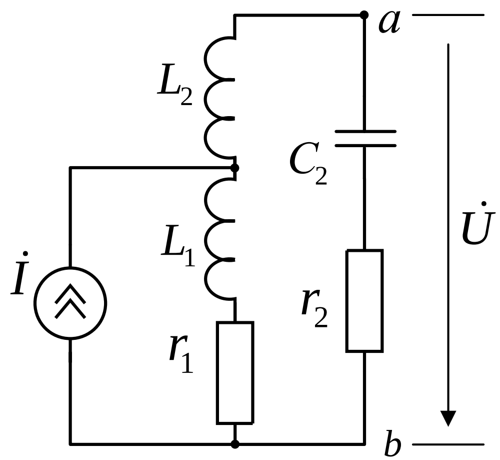
$$\left.\begin{aligned} p_L &= 1 \\ p_C &= 0 \end{aligned}\right\} \quad p = 1$$

$$R_0 = R_{01} = \rho Q$$



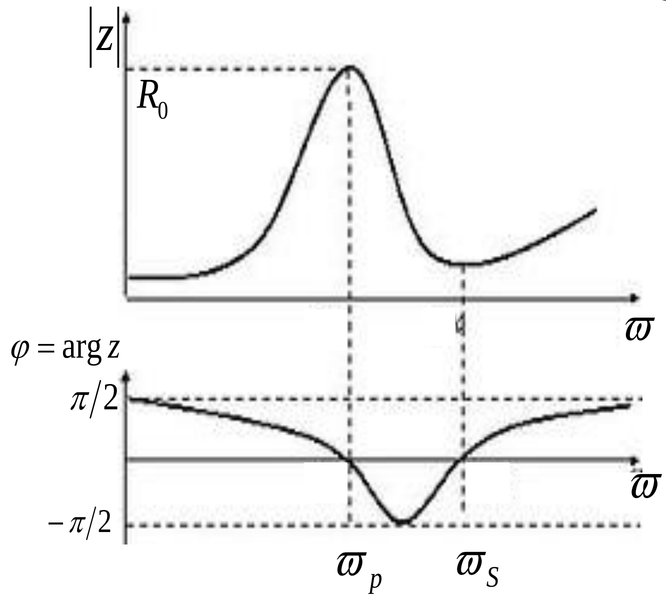
2) Контур 2-го вида - параллельный контур с неполным (частичным) включением индуктивности:



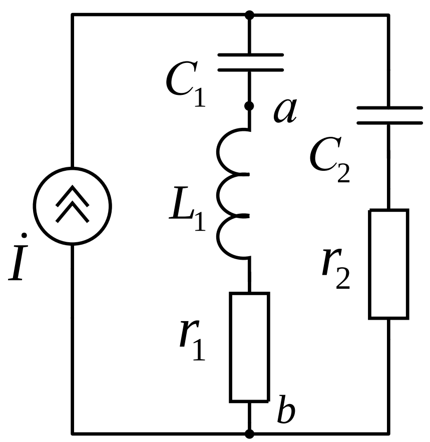


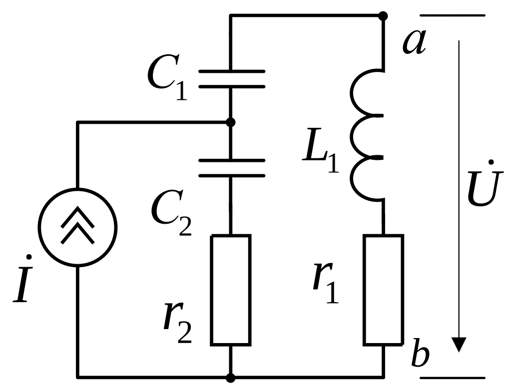
$$\left.\begin{aligned} p_L &= \frac{L_1}{L_1+L_2} \\ p_c &= 0 \end{aligned}\right\} \quad p = \frac{L_1}{L_1+L_2}$$

$$R_0 = R_{01}p^2,\ \ R_{01} = R_{ab}$$



3) Контур 3-го вида - параллельный контур с неполным (частичным) включением емкости:

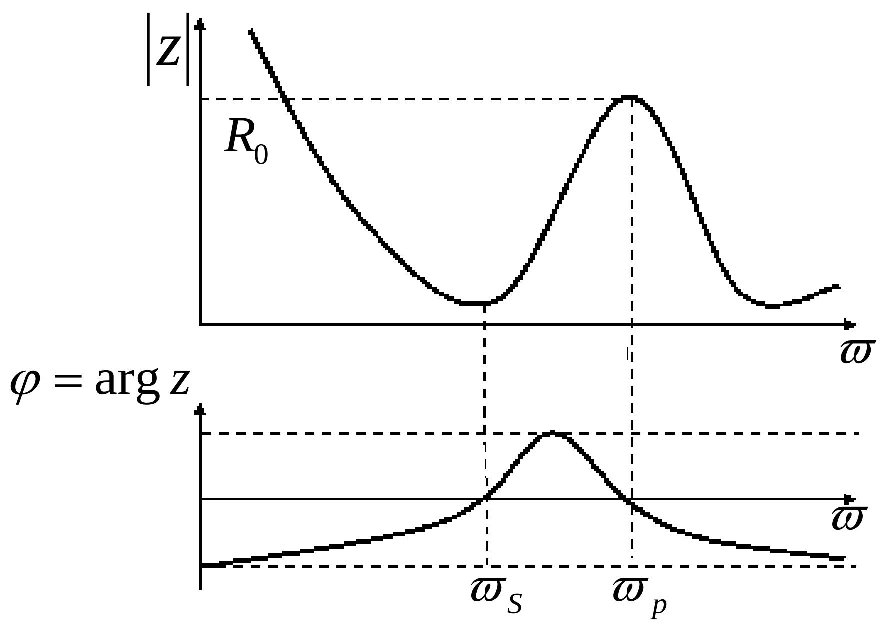




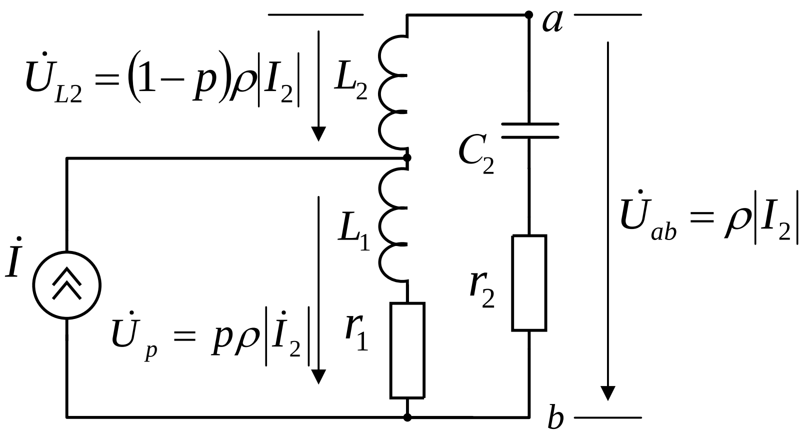
$$\left.\begin{aligned} p_L &= 0 \\ p_C &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} \end{aligned}\right\} p = -\frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$R_0 = R_{01} p^2$$

$$R_{01} = R_{ab}$$



Отношение амплитуд напряжений на контуре $\dot{U}_p$ и между точками ab



$$|U_{ab}| = \rho |I_2|,$$

$$|U_p| = [\rho - (1-p)\rho] | I_2 | = p\rho | I_2 | \quad \rightarrow$$

$$\frac{\dot{U}_p}{\dot{U}_{ab}} = \frac{p\rho}{\rho} = p < 1$$

Сложный контур 2-го или 3-го вида это параллельные контура с неполным (частичным) включением, поскольку источник подключен к p-й части реактивного сопротивления контура. Если выходное напряжение брать между точками ab, то будет осуществляться трансформация напряжения в $1/p$ раз и трансформация сопротивления в $1/p^2$ раз. Возможно осуществить трансформацию сопротивления с целью согласования источника сигнала с нагрузкой.

Проводимость сложного контура вблизи частоты ω_p:
(потери и относительную расстройку считаем малыми)

$$y=\frac{1}{r_1+jx_1}+\frac{1}{r_2+jx_2}=\frac{r_1}{|x_1|^2}+\frac{r_2}{|x_2|^2}-j\frac{1}{x_1}-j\frac{1}{x_2}\approx\frac{r_1+r_2}{x_1^2}-j\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

Заменим:

$x_1^2=\rho^2p^2$, Знаки x_1 и x_2 — разные –> $x_1x_2=-\rho^2p^2$

$r=r_1+r_2$, $\quad x_1+x_2=\omega L-1/\omega C=rQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)=r\xi$ –>

–> $y=\frac{r}{p^2\rho^2}(1+j\xi)$ –> $z=\frac{R_0}{1+j\xi}$, где $R_0=R_{01}p^2$

Зависимость z от частоты вблизи ω_p такая же, как и у контура 1-го вида, изменяется лишь величина R_0.

Подключение внешних нагрузок $R_{\text{н}}$ и R_i будет влиять на частотные характеристики через изменение нагруженной добротности, которая должна рассчитываться с учетом трансформации подключаемого сопротивления.

$$Q' = \frac{R_0'}{\rho} = \frac{R_0 \cdot R_i}{\rho\left(R_0 + R_i\right)} = \frac{Q}{1 + R_0 / R_i}$$

Примеры применения сложного контура для согласования

1) Источник - транзисторный усилитель с $R_i = 10$ кОм, нагрузка — параллельный контур с $R_{01} = 90$ кОм. Требуется обеспечить передачу максимальной мощности в нагрузку.

Применим контур 2-го или 3-го вида, взяв $p = 1/3$, тогда

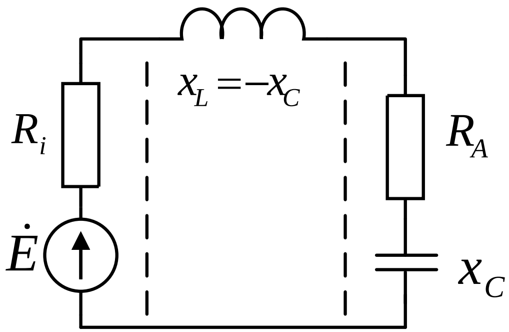
$$R_0 = p^2 R_{01} = (1/3)^2 \cdot 90 = 10 \text{ кОм} = R_i$$

Максимальная мощность при этом равна $P_{\max} = \dfrac{E^2}{4R_i}$.

Если же применить полное включение, то

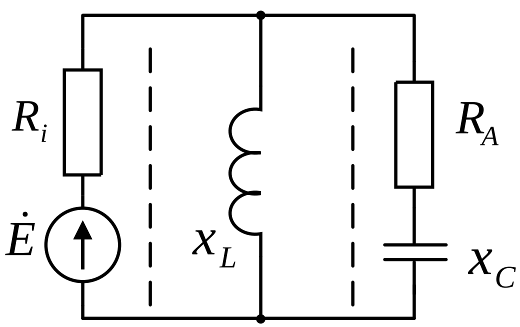
$$P_{\max} = \frac{E^2 R_{01}}{(R_{01} + R_i)^2}$$, что в $$\frac{(R_{01} + R_i)^2}{4R_{01}R_i} = \frac{100 \cdot 100}{4 \cdot 90 \cdot 10} \approx 3$$

2) Антенна обладает сопротивлением R_A=20 Ом и последовательной емкостью $x = -1$ кОм (диапазон средних волн), передатчик имеет R_i=5 кОм. Для передачи максимальной мощности нужно, чтобы $z_н = z_г^*$, в частности, $x_н + x_г = 0$, т.е. цепь должна быть настроена в резонанс на рабочую частоту.



Простейший вариант: последовательное включение индуктивности $x_L = -x_C$.

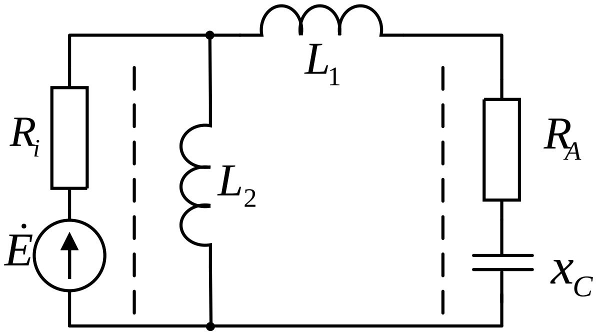
Плохо, т.к. $R_A << R_i$ (сильное рассогласование).



Вариант с параллельным контуром: при резонансе

$$z_{вх} = R_{01} = Q\rho = Q^2 \cdot R_A = \rho^2 / R_A = 10^6/20 = 50 \quad \text{кОм.}$$

Тоже плохо: $R_{01} = 50$ кОм $>> R_i$



Наилучший вариант — контур 2-го вида.

Надо взять $x_{L_1} + x_{L_2} = -x_C$ — резонанс,

$$p = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx \frac{1}{3} \to \quad R_0 = \frac{50}{10} = 5 \quad \text{кОм},$$

$$R_0 = R_i$$

Выполняется условие передачи максимальной мощности в нагрузку