1.24. Двумерные дискретные и непрерывные случайные величины: определения, функция распределения

Определение одномерной случайной величины см. п.1.11.:

def Одномерной случайной величиной называется числовая функция $X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие определенное действительное число ($X(\omega)$: $\Omega \xrightarrow{X} R$). При этом считается, что для любого $x \in R$ определены вероятности $P(X < x)$ событий вида $X < x$.

Рассмотрим двумерные случайные величины.

def Двумерной случайной величиной (двумерным случайным вектором) называется упорядоченная пара (X,Y) одномерных случайных величин. При этом предполагается, что на всей числовой плоскости определена функция распределения (функция совместного распределения) двумерной случайной величины (X,Y)

$$F_{XY}(x,y) = P((X<x)\cap(Y<y)).$$

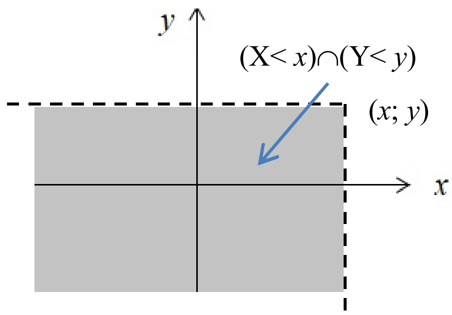
Условились записывать вероятность произведения в виде

$P((X<x)\cap(Y<y)) = P(X<x,\ Y<y)$, таким образом,

$$\forall (x;y) \in R^2 \quad F_{XY}(x,y) = P(X<x,\ Y<y).$$

Значения двумерной случайной величины – упорядоченные пары чисел (координаты точек на плоскости).

Смысл двумерной функции распределения $F_{XY}(x,y)$ – это <u>вероятность</u> события “*случайная величина* (X,Y) *принимает значение в квадранте с вершиной в точке* $(x,\ y)$ *левее и ниже точки* $(x,\ y)$, *не включая саму эту точку*”.



$F_{XY}(x,\ y)$ – это вероятность попадания случайной точки (X,Y) в “юго-западный” квадрант с вершиной в точке $(x;y)$.

Некоторые общие свойства функции распределения $F_{XY}(x;y)$:

1. $F_{XY}(x,y)$ – не убывает по каждому аргументу при фиксированном другом аргументе;
2. $F_{XY}(+\infty,+\infty) = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{XY}(x,y) = P(X<+\infty, Y<+\infty) = P(\Omega) = 1$ –

   – вероятность достоверного события;

$F_{XY}(x,-\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = P(\varnothing) = 0$ – вероятность невозможного события;

3. Если известна функция распределения $F_{XY}(x, y)$ двумерной случайной величины (X;Y), то можно найти функции распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ ее компонент – случайных величин X и Y, устремив к $+\infty$ соответствующую переменную:

$$\lim_{y\to+\infty} F_{XY}(x,y) = P(X<x,\ Y<+\infty) = P((X<x)\cap \Omega) = P(X<x) = F_X(x),$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_{XY}(x,y) = P(X<+\infty,\ Y<y) = P(\Omega\cap(Y<y)) = P(Y<y) = F_Y(y).$$

Таким образом: $F_{XY}(x,+\infty) = F_X(x)$,

$F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y)$.

Обратная задача – восстановить закон распределения двумерной случайной величины по известным законам распределения компонент решается лишь в частном случае (который будет рассмотрен далее в п.1.25.).

Дискретная двумерная случайная величина

def Двумерная случайная величина (X,Y) называется дискретной, если множество ее возможных значений $\{(x_i;y_j\}$ счетно, в частности, конечно.

Компоненты X и Y дискретной двумерной случайной величины (X,Y) – дискретные случайные величины.

Закон распределения дискретной случайной величины (X,Y) записывают в виде: $P(X=x_i,\ Y=y_j) = p_{ij}$ (i =1,2,… ; j =1,2,…), при этом вероятности p_{ij} должны удовлетворять *условию нормировки*

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Распределение (X,Y) можно представить также в виде таблицы (вообще говоря, бесконечной):

X \ Y	y_1	…	y_j	…
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	
…			…	
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	
…	…	…	…	…

Функция распределения двумерной случайной величины (X,Y) в любой точке (x, y) равна: $\quad F_{XY}(x,y) = \sum\limits_{i:\, x_i < x} \; \sum\limits_{j:\, y_j < y} p_{ij}$.

Считая известным двумерное распределение, найдем распределения компонент X и Y. Рассмотрим (для простоты) конечное множество возможных значений случайной величины (X,Y):

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Заметим, что события $(Y = y_1), (Y = y_2), \ldots, (Y = y_n)$ – попарно несовместны и образуют полную группу $\sum\limits_{j=1}^{n} (Y = y_j) = \Omega$.

Имеем: $P(X = x_i) = P((X = x_i) \cap \Omega) = P((X = x_i) \cap (\sum\limits_{j=1}^{n} (Y = y_j)) =$

$$= P(\sum_{j=1}^{n} (X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j=1}^{n} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{i\bullet}$$

Таким образом, *распределение одной компоненты* двумерной дискретной случайной величины можно получить, *просуммировав* p_{ij} *по всем значениям другой компоненты*:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{i\bullet}$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p_{\bullet j}$$

Непрерывная двумерная случайная величина

def | Двумерная случайная величина (X,Y) называется непрерывной, если множество ее возможных значений сплошь заполняет некоторую область $G \subseteq R^2$ (или несколько областей) и существует неотрицательная функция $f_{XY}(x,y)$, называемая двумерной плотностью вероятности, определенная на всей числовой плоскости, такая, что для любой области $D \subseteq G$:

$$P((X,Y) \in D) = \iint\limits_{D} f_{XY}(x,y)\,dxdy \quad \text{и} \quad \forall (x;y) \notin G \quad f_{XY}(x,y) \equiv 0.$$

Двумерную плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$ называют также *совместной плотностью вероятности*.

Функция распределения $F_{XY}(x,y) = P(X<x,\ Y<y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv$ непрерывна на всей числовой плоскости xOy .

Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = F_{XY}(+\infty,+\infty) = 1$.

В каждой точке непрерывности $f_{XY}(x,y)$ имеем

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x,y).$$

Покажем, как при заданной совместной плотности $f_{XY}(x,y)$ находятся распределения компонент X и Y:

$$F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u,v)dudv,$$

$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv$ – функции распределения компонент X и Y.

Отсюда $$f_X(x) = \frac{d\,F_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u,v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy,$$

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx.$$

Таким образом, получаем плотности вероятности компонент X и Y двумерной случайной величины (так называемые маргинальные плотности вероятности):

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \quad \text{и} \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx.$$

Плотность вероятности одной компоненты получается интегрированием двумерной плотности по всем значениям другой компоненты.

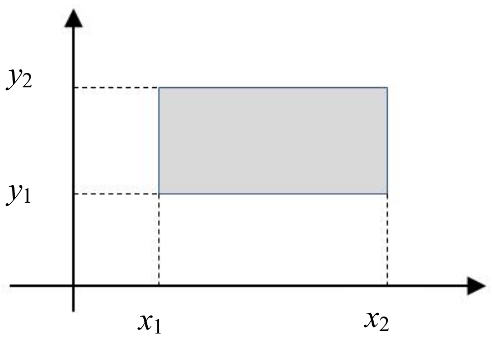
Замечание

1. Закон распределения двумерной случайной величины можно интерпретировать следующим образом:

в дискретном случае – как распределение единичной вероятностной массы между точечными массами p_{ij}, сосредоточенными в точках $(x_i; y_j)$, при этом $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$;

в непрерывном случае – как распределение единичной вероятностной массы по плоскости (плоской пластине, не имеющей толщины), $f_{XY}(x, y)$ – поверхностная плотность, так что $f_{XY}(x, y)\,dxdy$ – масса элемента площади $dxdy$, содержащего точку (x, y), при этом $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dxdy = 1$.

2. Пусть область D – прямоугольник $x_1 \le X \le x_2;\ y_1 \le Y \le y_2$:



Вероятность события *двумерная случайная величина* (X, Y) *принимает значение в области* D равна:

$$P((X,Y) \in D) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1).$$

1.25. Независимость двух случайных величин (непрерывных и дискретных)

def | Случайные величины X,Y называются *независимыми*, если функция совместного распределения $F_{XY}(x, y)$ равна произведению функций распределения компонент^

$$\forall\, x, y \;\; F_{XY}(x, y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \Leftrightarrow \text{X,Y – независимы; } (*)$$

в противном случае случайные величины X,Y называются *зависимыми*.

Замечание: ранее был сформулирован критерий (*необходимое и достаточное условие*) независимости для двух событий (см. п.1.5.): A и B – независимые события $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $P(AB) = P(A)\,P(B)$, так что в приведенном выше определении (∗) речь идет о независимости событий $X< x$ и $Y< y$ для любых вещественных x и y.

Приведем определения независимости для непрерывных и дискретных случайных величин, *эквивалентные определению* (∗).

def | Непрерывные случайные величины X и Y независимы, если плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$ совместного распределения X и Y равна произведению плотностей вероятности распределения компонент: $\forall\, x, y \;\; f_{XY}(x, y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \Leftrightarrow$ X,Y – независимы (∗∗)

Замечание

Если $F_{XY}(x, y)$ — дифференцируема и имеет место $F_{XY}(x, y) = F_X(x)\,F_Y(y)$ (∗), то

$$\forall (x, y) \;\; f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_X(x)\,F_Y(y) = \frac{d\,F_X(x)}{dx}\,\frac{d\,F_Y(y)}{dy} = f_X(x)\; f_Y(y) \;\; (**).$$

С другой стороны $\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(u, v)\,du dv = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv \Leftrightarrow F_{XY}(x, y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$ (∗).

def | Дискретные случайные величины X и Y независимы, если

$$\forall\, i, j \;\;\; p_{ij} = p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j} \;\;\; (i = 1,2,\ldots;\; j = 1,2,\ldots),$$

где $p_{ij} = P(X = x_i,\; Y = y_j)$, $p_{i\bullet} = \sum\limits_j p_{ij} = P(X = x_i)$, $p_{\bullet j} = \sum\limits_i p_{ij} = P(Y = y_j)$.

1.26. Числовые характеристики двумерных случайных величин, ковариация и коэффициент корреляции; пример зависимых некоррелированных случайных величин

Математическое ожидание двумерной случайной величины

def| Пусть (X,Y) – двумерная случайная величина, тогда

$$M(X,Y) = (M(X), M(Y)).$$

Математическое ожидание M(X,Y) случайного вектора (X,Y) – это вектор (M(X), M(Y)) математических ожиданий его компонент. Вектор (M(X), M(Y)) называют центром распределения. По известному совместному распределению (X,Y) находят распределения компонент, а затем вычисляют их математические ожидания M(X) и M(Y):

- в дискретном случае $P(X{=}x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{i\bullet}$; $P(Y{=}y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p_{\bullet j}$;

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{i\bullet}; \quad M(Y) = \sum_{j=1}^{n} y_j p_{\bullet j};$$

- в непрерывном случае $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$; $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx; \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy.$$

T| Теорема о математическом ожидании функции двумерной случайной величины (*примем без доказательства*)

а) пусть $Z = \varphi(X,Y)$ – функция двумерной *непрерывной* случайной величины (X,Y), плотность вероятности которой $f_{XY}(x,y)$,

тогда $MZ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f_{XY}(x,y)\,dxdy$;

б) пусть $Z = \varphi(X,Y)$ – функция двумерной *дискретной* случайной величины(X,Y), закон распределения которой $p_{ij} = P(X{=}x_i, Y{=}y_j)$,

тогда $MZ = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$.

Корреляционный момент (ковариация)

def $K_{XY} = M((X - MX)\cdot(Y - MY))$ – корреляционный момент (ковариация) случайных величин X,Y; другое обозначение ковариации: cov(X,Y).

Раскроем внутренние скобки $M((XY - (MX)Y - XM(Y) + MXMY))$, воспользуемся утверждением *математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых*, получим *формулу для вычисления ковариации*:

$$K_{XY} = M(XY) - MX\cdot MY$$

Замечание: если X = Y, то $K_{XX} = DX$, $K_{YY} = DY$.

def Случайные величины X,Y называются некоррелированными, если их корреляционный момент K_{XY} равен нулю

$$K_{XY} = 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ некоррелированы.}$$

def Если $K_{XY} \neq 0$, то X и Y коррелируют между собой.

Некоторые свойства корреляционного момента (ковариации)

(а) X, Y независимы $\Rightarrow$ X, Y некоррелированы

Док Докажем это свойство в непрерывном случае (в дискретном – аналогично).

По условию X, Y независимы $\Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy =$$

$$= MXMY \Rightarrow K_{XY} = M(XY) - MX\cdot MY = 0.$$

(б) $K_{XY} \neq 0 \Rightarrow X, Y$ зависимы (если случайные величины X, Y коррелированные, то они зависимые). Это утверждение очевидно, т.к. согласно свойству (а) необходимым условием независимости случайных величин является их некоррелированность.

(в) $|K_{XY}| \leq \sigma_X\cdot\sigma_Y$

Док Запишем очевидное неравенство

$$\forall t \;\; M(t\cdot(X - MX) + (Y - MY))^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(t^2(X - MX)^2 + 2t(X - MX)(Y - MY) + (Y - MY)^2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 DX + 2t\, K_{XY} + DY \geq 0$$

Квадратный трехчлен относительно переменной t неотрицателен, это означает, что его дискриминант $(K_{XY})^2 - DX\cdot DY \le 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (K_{XY})^2 \le DX\cdot DY \Rightarrow |K_{XY}| \le \sigma_X\cdot\sigma_Y.$$

(г) $K_{X+C,Y} = K_{X,Y+C} = K_{XY}$.

(д) $K_{CX,Y} = C\cdot K_{XY}$.

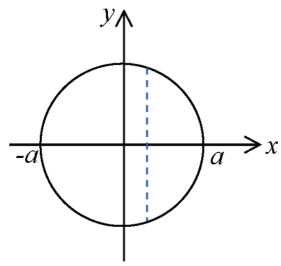
Свойства г) и д) очевидны, если воспользоваться определением K_{XY} либо формулой для вычисления K_{XY}.

(е) $Y = aX+b \Rightarrow K_{X,aX+b} = a\cdot K_{XX} = a\cdot(\sigma_X)^2$ – следствие (д) и (г).

Рассмотрим пример *некоррелированных зависимых* случайных величин:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi a^2}, & x^2+y^2 \le a^2 \\ 0, & x^2+y^2 > a^2 \end{cases} -$$

– равномерное распределение на круге.



Докажем зависимость X и Y:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\pi a^2}dy = \frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{\pi a^2}; \quad f_Y(y) = \frac{2\sqrt{a^2-y^2}}{\pi a^2}$$

$$f_{XY}(x,y) \ne f_X(x)\cdot f_Y(y) \Rightarrow \text{X, Y} - \textit{зависимы};$$

Докажем некоррелированность X и Y:

$K_{XY} = M(XY) - MX\cdot MY = \big[MX = MY = 0$ – как интегралы от нечётной функции по промежутку $[-a; a]\,\big] = M(XY) =$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)dxdy = \big[$перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $dxdy = rdrd\varphi\,\big] = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^3dr = 0.$

Получили $K_{XY} = 0$, что и означает: X и Y – *некоррелированы*.

Коэффициент корреляции

<u>*def*</u>| $\rho_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ – коэффициент корреляции.

Некоторые свойства коэффициента корреляции ρ_{XY} :

а) $\rho_{XX} = \rho_{YY} = 1$;

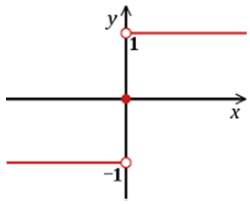
б) $\rho_{X+C,Y} = \rho_{X,Y+C} = \rho_{XY}$;

в) $|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y \Rightarrow |\rho_{XY}| \le 1$;

г) $\rho_{CX,Y} = \dfrac{K_{CX,Y}}{\sigma_{CX} \cdot \sigma_Y} = \dfrac{CK_{X,Y}}{|C|\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho_{XY} \dfrac{C}{|C|} = \rho_{XY}\,\mathrm{sgn}(C)$, здесь $C \neq 0$;

д) $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$ $\Rightarrow$ $\rho_{X,\,aX+b} = \dfrac{a\sigma_X^2}{\sigma_X \cdot |a|\,\sigma_X} = \dfrac{a}{|a|} = \mathrm{sgn}(a)$:

Напомним, функция $y = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$



Таким образом, доказано утверждение:

$$Y = aX + b \Rightarrow |\rho_{XY}| = 1.$$

если Y *и* X *связаны линейной зависимостью, то* $|\rho_{XY}| = 1$,

при этом: $a > 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 1$; $a < 0 \Rightarrow \rho_{XY} = -1$.

Замечание:

Матрица $K = \begin{bmatrix} D_X & K_{XY} \\ K_{YX} & D_Y \end{bmatrix}$ называется ковариационной матрицей. Для двумерного распределения (MX, MY) – центр распределения, а определитель ковариационной матрицы $\det[K]$ – мера рассеяния (обобщенная дисперсия).

1.27. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии суммы случайных величин

<u>Т</u>| *теорема о математическом ожидании суммы случайных величин*:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y),$$

предполагается, что все три математических ожидания существуют.

<u>Док</u>| Согласно теореме о математическом ожидании функции двумерной случайной величины (см. п. 1.26.) имеем:

$$MZ=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f_{XY}(x,y)dxdy$$ – в непрерывном случае;

$$MZ=\sum_i\sum_j(x_i+y_j)p_{ij}$$ – в дискретном случае.

(а) непрерывный случай:

$$M(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)\,f_{XY}(x,y)dxdy = \big[$$представляем двойной интеграл как сумму повторных и интегрируем в соответствующем порядке$$\big] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\,dy+\int_{-\infty}^{\infty}ydy\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(\mathrm{x},y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}x\,f_X(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_Y(y)\,dy=$$

$$= M(X) + M(Y).$$

(б) дискретный случай:

$$M(X+Y) = \sum_i\sum_j(\mathrm{x}_i+y_j)p_{ij} = \sum_i x_i\sum_j p_{ij}+\sum_j y_j\sum_i p_{ij} =$$

$$=\sum_i x_i p_{i\bullet}+\sum_j y_j p_{\bullet j} = M(X) + M(Y).$$

Обобщение: $$M\sum_{i=1}^{n}X_i=\sum_{i=1}^{n}M(X_i).$$

<u>Т</u>| *теорема о дисперсии суммы случайных величин*:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

<u>Док</u>| $D(X+Y) = M(X+Y)^2 - (M(X+Y))^2 =$

$$= M(X^2+2XY+Y^2) - (MX)^2 - 2MXMY - (MY)^2 = DX+DY + 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

Обобщение: $\mathrm{D}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(\mathrm{X}_i) + \sum_{i}\sum_{j\,(j\neq i)}\mathrm{cov}(\mathrm{X}_i,\mathrm{X}_j)$.

Если X_i попарно независимы, то $\mathrm{D}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(\mathrm{X}_i)$; очевидно, это верно также и для попарно некоррелированных случайных величин.

1.28. Необходимое условие равенства единице модуля коэффициента корреляции

В п. 1.26. показано, что *если* Y *и* X *связаны линейной зависимостью, то модуль коэффициента корреляции равен единице*:

$$\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b \Rightarrow |\rho_{\mathrm{XY}}| = 1.$$

Решим обратную задачу – установим, как связаны между собой Y и X, если $|\rho_{\mathrm{XY}}| = 1$ (найдем *необходимое условие* равенства единице модуля коэффициента корреляции).

Лемма: *Необходимое и достаточное условие равенства нулю дисперсии случайной величины*

Дисперсия случайной величины X равна нулю тогда и только тогда, когда X = C, где C– неслучайная постоянная (распределение X – – *вырожденное* в точке C, P(X= C) = 1):

$$\mathrm{DX} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P(X = C)} = 1.$$

Док

(а) Предварительное замечание:

пусть случайная величина Z такова, что $\begin{cases} Z \ge 0 \\ \mathrm{M}Z = 0 \end{cases}$, тогда $\mathrm{P(Z = 0)} = 1$.

Физический смысл математического ожидания одномерной случайной величины – абсцисса центра масс (“центра тяжести”). В данном случае по условию $\mathrm{Z} \ge 0$ – *вероятностная масса* распределена правее нуля, включая точку 0. При этом *“центр масс*” MZ = 0, что возможно, только если вся масса сосредоточена в точке 0, то есть, если Z = 0 или P(Z = 0) = 1.

(б) Докажем теперь утверждение: $\mathrm{DX} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P(X = C)} = 1$.

Достаточность: $\mathrm{P(X = C)} = 1 \Rightarrow \mathrm{DX} = \mathrm{DC} = 0$ (см. п.1.14.).

Необходимость: $\mathrm{DX} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 \ge 0 \\ \mathrm{DX} = \mathrm{M}((\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \mathrm{Z}: \begin{cases} Z \ge 0 \\ \mathrm{M}Z = 0 \end{cases}, \text{ согласно (а) имеем } \mathrm{P(Z = 0)} = 1 \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{P((X - MX) = 0)} = 1 \Rightarrow \mathrm{P(X = MX)} = 1 \Rightarrow [\mathrm{MX = C}] \Rightarrow \mathrm{P(X = C)} = 1.$

Т| $|\rho_{XY}|=1 \Rightarrow P(Y = aX+b) = 1$

если модуль коэффициента корреляции равен единице, то *случайные величины* X и Y *связаны линейной зависимостью с вероятностью единица*.

Док| Пусть $\rho_{XY} = 1$ (для $\rho_{XY} = -1$ доказательство аналогично).
Рассмотрим центрированные и нормированные случайные величины

$$\overset{o}{X}=\frac{X-MX}{\sigma_X} \text{ и } \overset{o}{Y}=\frac{Y-MY}{\sigma_Y}.$$

Очевидно, $M\overset{o}{X}= M\overset{o}{Y} = 0$; $D\overset{o}{X}= D\overset{o}{Y} = 1$;

$$\operatorname{cov}(\overset{o}{X},\overset{o}{Y})=M(\overset{o}{X}\,\overset{o}{Y})-M\overset{o}{X}M\overset{o}{Y}=M(\frac{X-MX}{\sigma_X}\cdot\frac{Y-MY}{\sigma_Y})=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\rho_{XY}=1.$$

Далее, $D(\overset{o}{Y}-\overset{o}{X}) = D\overset{o}{Y} + D\overset{o}{X}- 2\operatorname{cov}(\overset{o}{Y},\overset{o}{X}) = 1+1-2 = 0$.

Таким образом, $D(\overset{o}{Y}-\overset{o}{X})= 0 \Rightarrow$ [см. Лемму] $\Rightarrow$

$\Rightarrow P((\overset{o}{Y}-\overset{o}{X}) = M(\overset{o}{Y}-\overset{o}{X})) = 1 \Rightarrow \left[M(\overset{o}{Y}-\overset{o}{X}) = 0\right] \Rightarrow P(\overset{o}{Y}-\overset{o}{X}= 0) =1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\frac{Y-MY}{\sigma_Y}-\frac{X-MX}{\sigma_X}=0) = 1$ – случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью с вероятностью единица.

Замечание о вероятностном смысле коэффициента корреляции ρ_{XY}

Пусть даны две случайные величины Y, X.
Рассмотрим линейную функцию $aX+b$ случайной величины X. Величину $M(Y-(aX+b))^2$ – средний квадрат отклонения случайной величины Y от линейной функции $aX+b$ рассмотрим как функцию двух переменных a и b

$$M(Y-(aX+b))^2 = \Delta(a;b)$$

и поставим задачу найти значения a_0 и b_0 такие, что

$$\Delta(a_0;b_0) = \min \Delta(a;b).$$

Соответствующую линейную функцию a_0X+b_0 будем считать наилучшим линейным приближением случайной величины Y (наилучшим – в смысле минимума среднего квадрата отклонения).

Опуская выкладки, приведем конечный результат:

$$\Delta(a_0; b_0) = \min_{(a,b)} \{M(Y-(aX+b))^2\} = \sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2) \,.$$

Полученное выражение показывает, что чем ближе ρ_{XY} к единице, тем меньше отклонение Y от a_0X+b_0 (от линейного приближения, наилучшего в указанном смысле).

Таким образом, коэффициент корреляции ρ_{XY} (безразмерная величина) – *мера близости к линейной зависимости между случайными величинами* Y, X.

1.29. Условный закон распределения; условное математическое ожидание (регрессия)

Дана двумерная случайная величина (X,Y).

def Условный закон распределения – закон распределения одной из случайных величин, при условии, что другая приняла одно из возможных значений.

def Условное математическое ожидание – это математическое ожидание одной из случайных величин, при условии, что другая приняла одно из возможных значений.

(а) *Дискретный случай*.

Пусть (X,Y) – дискретная случайная величина, задано совместное распределение $P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots; j = 1,2,\ldots)$

и пусть случайная величина Y приняла значение y_j, тогда

$$P(X=x_i, Y=y_j) = \left[P(AB) = P(A)\cdot P(B/A)\right] = P(Y=y_j)\cdot P(X=x_i \,/\, Y=y_j).$$

Заметим, что $P(Y=y_j) = \sum\limits_i p_{ij} = p_{\bullet j}$; $P(X=x_i) = \sum\limits_j p_{ij} = p_{i\bullet}$, (см .п.1.24.),

таким образом, получаем

условные законы распределения:

$$P(X=x_i/Y=y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_i p_{ij}} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \quad (i = 1,2,\ldots;\ j = 1,2,\ldots);$$

$$P(Y=y_j/X=x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_j p_{ij}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \quad (i = 1,2,\ldots;\ j = 1,2,\ldots).$$

Для (условного) закона распределения случайной величины X при условии $Y=y_j$ $(j = 1,2,\ldots)$ выполняется:

$$\sum_i P(X=x_i/Y=y_j) = \sum_i \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{1}{p_{\bullet j}} \sum_i p_{ij} = 1 \text{ условие нормировки;}$$

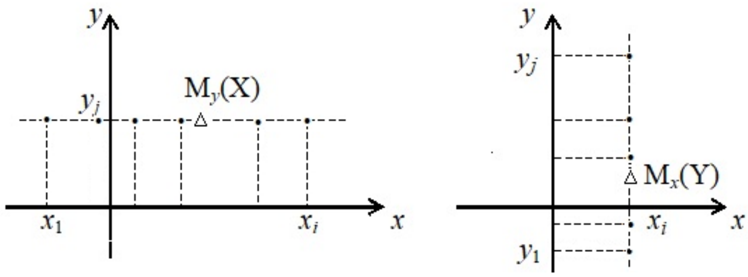
аналогично, $\sum\limits_j P(Y=y_j/X=x_i) = 1.$

Пусть P(X$=x_i$/ Y=y_j) – условный закон распределения, тогда *условное математическое ожидание* M(X/Y=y_j) – это сумма произведений значений x_i случайной величины X на соответствующие условные вероятности:

$$\mathrm{M}(\mathrm{X}/\mathrm{Y}{=}y_j) = \sum_i x_i \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i \,/\, \mathrm{Y} = y_j) = \sum_i x_i \cdot \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

аналогично, $\mathrm{M}(\mathrm{Y}/\mathrm{X}{=}x_i) = \sum_j y_j \cdot \mathrm{P}(\mathrm{Y} = y_j \,/\, \mathrm{X} = x_i) = \sum_j y_j \cdot \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}.$

Условные математические ожидания обозначают M(X/Y=y_j) = M_y(X) и M(Y/X=x_i) = M_x(Y) и называют: M_y(X) – *регрессия* X на y (или X по y); M_x(Y) – *регрессия* Y на x (или Y по x), соответственно.



Механическая трактовка:

-точка (M_y(X), y_j) – центр масс для точечных масс, распределенных на горизонтальной прямой $y = y_j$;

-точка (x_i, M_x(Y)) – центр масс для точечных масс, распределенных на вертикальной прямой $x = x_i$.

Замечание 1.

Каждому значению y_j случайной величины Y соответствует определенное значение условного математического ожидания M(X/Y$=y_j$). Таким образом, условное математическое ожидание M(X/Y=y_j) – случайная величина (функция случайной величины Y).

Вычислим M(M(X/Y=y_j)) = $\big[$по теореме о математическом ожидании функции случайной величины$\big]$ = $\sum_j \mathrm{M}(\mathrm{X}/\mathrm{Y} = y_j) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{Y} = y_j) =$

$= \left[P(Y= y_j = p_{\bullet j} \right] = \sum_j \left(\sum_i x_i \frac{p_{ij}}{\cancel{p_{\bullet j}}} \right) \cancel{p_{\bullet j}} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_{i\bullet} =$

$= \sum_i x_i P(X = x_i) = MX.$

Аналогично, условное математическое ожидание $M(Y/X= x_i)$ –

– функция случайной величины X и $M(M(Y/X= x_i)) = MY$.

Замечание 2

Если случайные величины X,Y независимы ($\forall\ i,j \quad p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$),

то условная вероятность $P(X= x_i/Y=y_j) = \dfrac{p_{ij}}{\sum_i p_{ij}} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \dfrac{p_{i\bullet} \cdot \cancel{p_{\bullet j}}}{\cancel{p_{\bullet j}}} =$

$= p_{i\bullet} = P(X= x_i)$, при этом $M(X/Y=y_j) = MX$.

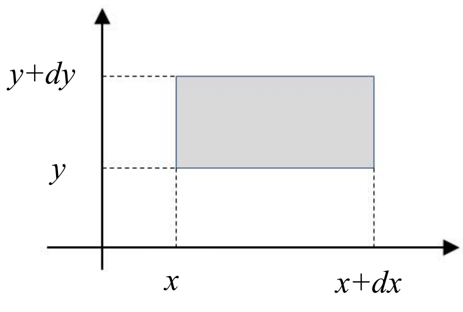
(б) *Непрерывный случай*.

Пусть задана совместная плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$ непрерывной случайной величины (X,Y).

$\underline{def|}$ *Условная плотность вероятности* случайной величины X при условии $Y= y$ <u>*по определению*</u> равна: $f_X(x / y) = \dfrac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$.

Приведем обоснование этого определения. Преобразуем равенство

$$f_X(x / y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)},$$



умножив левую часть на dx, а правую на $dxdy/dy$, получим:

$$f_X(x / y) \cdot dx = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \cdot \frac{dxdy}{dy} = \frac{P(x < X < x + dx, y < Y < y + dy)}{P(y < Y < y + dy)} =$$

$= P(x < X < x + dx \,/\, y < Y < y + dy)$ – условная вероятность попадания значения случайной величины X в вертикальную полосу x, $x + dx$ при условии, что значение Y лежит в горизонтальной полосе y, $y+dy$.

Так же определяется условная плотность вероятности случайной величины Y при условии X = x:

$$f_{\mathrm{Y}}(y/x)=\frac{f_{\mathrm{XY}}(x,y)}{f_{\mathrm{X}}(x)}.$$

Заметим, что условные плотности вероятности удовлетворяют

условию нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{X}}(x/y)\cdot dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{\mathrm{XY}}(x,y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)}\cdot dx=1$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{Y}}(y/x)\cdot dy=1$.

Условное математическое ожидание случайной величины X при

условии Y= y: M(X/Y=y) = $\mathrm{M_y}$(X) = $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathrm{X}}(x/y)dx=$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\frac{f_{\mathrm{XY}}(x,y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\frac{f_{\mathrm{XY}}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y)dx}dx.$$

Аналогично, M(Y/X = x) = M_x(Y) = $\int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{\mathrm{Y}}(y/x)dy$.

Графики y = M_x(Y) и x = M_y(X) называются линиями регрессии.

Замечание 1.

Как было указано, M(X/Y=y) – случайная величина (функция случайной величины Y), вычислим ее математическое ожидание:

$$\mathrm{M(M(X/Y}=y)) =\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{M(X/Y}=y)f_{\mathrm{Y}}(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\frac{f_{\mathrm{XY}}(x,y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)}dxf_{\mathrm{Y}}(y)dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{XY}}(x,y)\,dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathrm{X}}(x)dx=\mathrm{M(X)}.$$

Аналогично, M(M(Y/X = x)) = M(Y).

Замечание 2.

Если X,Y независимы $[\ \forall x,y\ \ f_{\mathrm{XY}}(x,y)=f_{\mathrm{X}}(x)\cdot f_{\mathrm{Y}}(y)\ ]$, то

$$f_{\mathrm{X}}(x/y)=\frac{f_{\mathrm{XY}}(x,y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)}=\frac{f_{\mathrm{X}}(x)f_{\mathrm{Y}}(y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)}=f_{\mathrm{X}}(x)\ \text{ и }\ f_{\mathrm{Y}}(y/x)=f_{\mathrm{Y}}(y).$$

Линиями регрессии в этом случае будут прямые линии: горизонтальная y = M_x(Y) = M(Y) и вертикальная x = M_y(X) = M(X).

1.30. Двумерное нормальное распределение (нормальный закон на плоскости)

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}(*)$$

$$(-\infty<x<+\infty\quad -\infty<y<+\infty)$$

(плотность вероятности $f_{XY}(x,y)$ зависит от параметров m_X, m_Y; σ_X, σ_Y; r)

Плотности распределения компонент X и Y (маргинальные плотности, см. п.1.24.): $f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$ и $f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$.

Опуская выкладки, запишем:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \Leftrightarrow X\sim N(m_X,\sigma_X),\ \text{аналогично}, Y\sim N(m_Y,\sigma_Y).$$

Таким образом, m_X и m_Y –математические ожидания, а σ_X и σ_Y – стандартные отклонения компонент X и Y, соответственно.

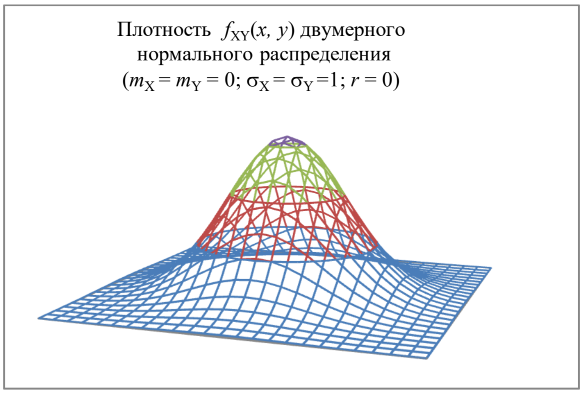
Ковариация (корреляционный момент):

$$K_{XY}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)(y-m_Y)\,f_{XY}(x,y)\,dxdy=\big[\text{опуская выкладки}\big]=\sigma_X\cdot\sigma_Y\cdot r$$

$$\Rightarrow r=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\rho_{XY},\quad r\text{ – коэффициент корреляции между X и Y.}$$

Очевидно, параметры распределения должны удовлетворять следующим ограничениям: m_X, m_Y – любые; $\sigma_X>0$, $\sigma_Y>0$; $|r|<1$.

График $z=f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$:



Критерий независимости компонент двумерной нормальной случайной величины.

Известно а) X, Y независимы $\Rightarrow$ X, Y некоррелированы; б) из некоррелированности случайных величин их независимость не следует (см. п. 1.26. – *пример некоррелированных зависимых случайных величин*).

В случае $r = 0$, из формулы (*) для плотности вероятности следует

$$\forall x, y \quad f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Leftrightarrow \text{X,Y – независимы.}$$

Таким образом, для *двумерной нормальной случайной величины* (X,Y) *справедливо*: X, Y независимы $\Leftrightarrow$ X, Y *некоррелированы.*

Условные законы распределения компонент двумерного случайного вектора, нормальные регрессии

Условная плотность распределения Y при условии X= x имеет вид:

$$f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(y-(m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)))^2}{2\sigma_Y^2(1-r^2)}}$$

– нормальное распределение с параметрами

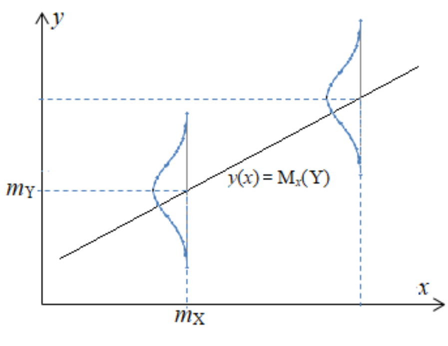
$$M_x(Y) = m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X) \quad \text{и} \quad \sigma_{Y/x} = \sigma_Y\sqrt{1-r^2}$$

Заметим, что условное стандартное отклонение $\sigma_{Y/x} = \sigma_Y\sqrt{1-r^2}$ не зависит от x (“равноизменчивость” условных нормальных распределений).

Линии регрессии (линии “*нормальной регрессии*”) – прямые:

$$\text{Y на } x\text{:} \quad y = y(x) = M_x(Y) = m_Y + r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X),$$

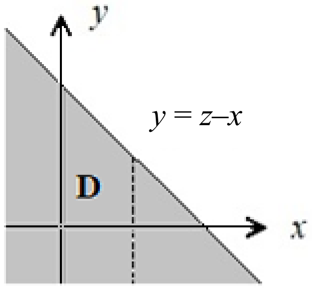
$$\text{X на } y\text{:} \quad x = x(y) = M_y(X) = m_X + r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_Y).$$



При каждом значении x имеем нормальное распределение Y с центром распределения $M_x(Y)$, лежащим на прямой $y = m_Y + r(\sigma_Y/\sigma_X)\cdot(x - m_X)$ и стандартным отклонением $\sigma_{Y/x} = \sigma_Y\sqrt{1-r^2}$.

1.31. Распределение суммы двух непрерывных случайных величин, композиция законов распределения; композиция экспоненциальных распределений (закон Эрланга)

Пусть дана (X,Y) – непрерывная случайная величина, $f_{XY}(x,y)$ – ее плотность вероятности и стоит задача найти распределение случайной величины Z = X+Y, то есть найти $F_Z(z)$ и $f_Z(z)$.



Решение: пусть z – некоторое действительное число ($-\infty < z < +\infty$), $F_Z(z) = P(Z < z) = P(X+Y < z) =$

$$= \iint\limits_D f_{XY}(x,y)dxdy = \left[D = \{(x,y):\ x+y<z\}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,.$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y,y)\,dy\ .$$

Обозначим переменную интегрирования через t и запишем:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(t,z-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-t,t)\,dt\ .$$

<u>def</u>| *Композицией* законов распределения называют закон распределения *суммы независимых* случайных величин.

Пусть X,Y – независимы $\left[\forall\, x,y\quad f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)\right]$,

тогда $f_Z(z) = f_{X+Y}(z) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\cdot f_Y(z-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-t)\cdot f_Y(t)\,dt$$ (свертка $f_X(x)$ и $f_Y(y)$).

Пример: *композиция нормальных законов*.

Пусть X,Y независимы; $X \sim N(m_X, \sigma_X)$, $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y)$. Можно показать, что $X+Y \sim N((m_X+m_Y), \sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2})$.

Обобщение: $X_1, X_2, \ldots X_n$ – независимы, $X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N((m_1+\ldots+m_n); \sqrt{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2}).$$

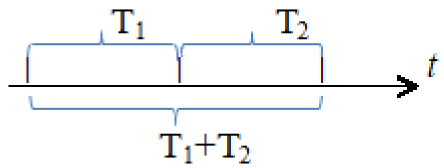
Композиция экспоненциальных распределений (закон Эрланга)

Рассмотрим задачу.

Дано: случайные величины T_1 и T_2 *независимы*, распределены по показательному закону с параметрами λ_1 и λ_2, соответственно:

T_1: $f_{T_1}(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$, $t \geq 0$,

T_2: $f_{T_1}(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$ $t \geq 0$,



Найти: распределение суммы $T_1 + T_2$.

Решение:

(а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и пусть $\lambda_2 > \lambda_1$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (z-t)}\, dt = \left[\, t \geq 0;\ z - t \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t \leq z \,\right] =$$

$$= \int_0^z \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\, dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 z} \int_0^z e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}\, d(\lambda_2 - \lambda_1)t = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}) \ .$$

(б) $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}\, dt = \lambda^2 z e^{-\lambda z} = \lambda(\lambda z) e^{-\lambda z}$$ – распределение Эрланга 2-го порядка

Обобщение: *распределение Эрланга k-го порядка*

Пусть $k = 3$: $T_1 + T_2 + T_3$; $\lambda_i = \lambda$ $(i = 1,2,3)$; T_i: $f_{T_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

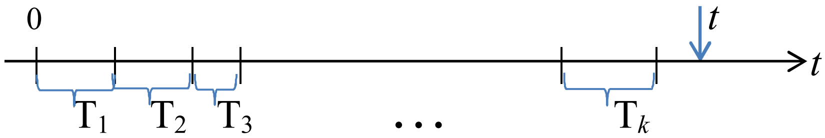
$$f_Z(z) = \int_0^z f_{T_1+T_2}(t) \cdot f_{T_3}(z - t)\, dt = \int_0^z \lambda^2 t e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda(z-t)}\, dt = \lambda^3 e^{-\lambda z} \int_0^z t\, dt = \lambda \frac{(\lambda z)^2}{2!} e^{-\lambda z}$$

Пусть $k \geq 1$ и $\sum_{i=1}^{k} T_i = T$, где T_i: $f_{T_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, тогда по индукции имеем:

$$f_T(t) = f_{\sum_{i=1}^{k} T_i}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0,\ \ k \geq 1)$$ – плотность вероятности непрерывной случайной величины T – суммы k независимых случайных величин, каждая из которых имеет экспоненциальное (показательное) распределение с одним и тем же параметром λ: $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$. Очевидно, $M(T) = \frac{k}{\lambda}$, $D(T) = \frac{k}{\lambda^2}$.

Это распределение применяется в задачах телекоммуникации для моделирования входящего потока вызовов.

Замечание: связь с пуассоновским потоком.



Очевидно: $(X_t \geq k) = (\sum_{i=1}^{k} T_i \leq t)$ – равносильные события.

Далее, (см. п. 1.17.),

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$, отсюда

$$P(X_t \geq k) = 1 - P(X_t < k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = P(\sum_{i=1}^{k} T_i \leq t).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{k} T_i$ – *непрерывная* случайная величина, то (см. п. 1.18.)

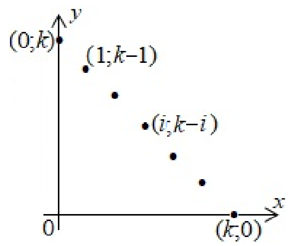
$$P(\sum_{i=1}^{k} T_i \leq t) = P(\sum_{i=1}^{k} T_i < t).$$

Итог: $F_{\sum_{i=1}^{k} T_i}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$ – *функция распределения* случайной величины $\sum_{i=1}^{k} T_i = T$, распределенной по закону Эрланга k-го порядка.

1.32. Распределение суммы двух целочисленных случайных слагаемых, теорема о производящей функции композиции законов распределения

Пусть (X,Y) – целочисленная двумерная случайная величина, множество ее возможных значений $\{i, j\}$ ($i = 0,1,\ldots$; j = 0,1,…), задан закон совместного распределения P(X= i, Y=j) = p_{ij} и стоит задача найти распределение случайной величины Z = X+Y.

Решение:



Зафиксируем некоторое значение k, тогда

$$P(Z = k) = P(X+Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} p_{i,\, k-i}\,.$$

Если X,Y независимы, то (см. п. 1.25.):

$$P(Z = k) = P(X+Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) \cdot P(Y = k - i)\ -$$

– композиция законов распределения.

Обозначим $P(X = i) = p_i^X$; $P(Y = j) = p_j^Y$ и запишем

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} p_i^X \cdot p_{k-i}^Y\,.$$

<u>Т</u>| Теорема о производящей функции композиции законов распределения целочисленных случайных величин

Пусть X,Y – независимы и

X: $P(X= i) = p_i^X$; $\varphi_X(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i^X \cdot z^i$,

Y: $P(Y = j) = p_j^Y$; $\varphi_Y(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j^Y \cdot z^j$,

$$\varphi_{X+Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P((X + Y=k)) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} p_i^X \cdot p_{k-i}^Y \right) \cdot z^k,$$

тогда: $\varphi_{X+Y}(z) = \varphi_X(z) \cdot \varphi_Y(z)$.

Док $\varphi_X(z)\cdot\varphi_Y(z)=(\sum_{i=0}^{\infty}p_i^X\cdot z^i)\cdot(\sum_{j=0}^{\infty}p_j^Y\cdot z^j)=$

$$=(p_0^X+p_0^Y)z^0+(p_0^X p_1^Y+p_1^X p_0^Y)z+\ldots+\underline{(p_0^X p_k^Y+p_1^X p_{k-1}^Y+\ldots+p_k^X p_0^Y)\cdot z^k}+\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}p_i^X\cdot p_{k-i}^Y\right)\cdot z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}((\mathrm{X}+\mathrm{Y}=\mathrm{k}))\cdot z^k=\varphi_{X+Y}(z).$$

Пример 1.

Дано: X,Y – независимы, распределены по закону Пуассона с параметрами a_1 ($a_1>0$) и a_2 ($a_2>0$), соответственно.

Найти: закон распределения Z = X+Y.

Решение: $\varphi_X(z)=e^{a_1(z-1)}$; $\varphi_Y(z)=e^{a_2(z-1)}$; $\varphi_{X+Y}(z)=e^{(a_1+a_2)(z-1)}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Z = X+Y распределена по закону Пуассона с параметром (a_1+a_2):

$p_k=\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)=\dfrac{(a_1+a_2)^k}{k!}e^{-(a_1+a_2)}$, $k=0,1,2\ldots$ – *распределение Пуассона*

Пример 2.

Дано: X,Y – независимы, распределены по биномиальному закону с параметрами (n_1,p) и (n_2,p), соответственно.

Найти закон распределения Z = X+Y.

Решение: Очевидно, что $p_k=\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)=b_k((n_1+n_2);p)$, $k=0,1,\ldots,(n_1+n_2)$.

Пример 3.

Случайная величина X – число успехов при проведении n независимых испытаний, p – вероятность успеха в каждом испытании (схема Бернулли, см. п.1.16.), $\mathrm{X}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ – сумма n индикаторов успеха X_i ($i=1,\ldots,n$).

Найти закон распределения $\mathrm{X}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$

X_i	0	1
P	$q=1-p$	p

Решение: $\varphi_{X_i}(z)=pz+q$;

$\varphi_X(z)=\varphi_{(X_1+\ldots+X_n)}(z)=(pz+q)^n\ \Rightarrow\ p_k=\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=b_k(n;p)=$

$=C_n^k\,p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,\ldots,n)$ – *биномиальное распределение.*