СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. *Вероятностные модели*

Раздел 2. *Основы статистического анализа данных*

Раздел 1. *Вероятностные модели*

1.1. Случайные события

Система допущений:

а) определенный комплекс условий может быть воспроизведен любое число раз. Каждое такое воспроизведение называют опытом. Обозначение Е – опыт, эксперимент. Опыт Е может быть произведен любое (неограниченное) число раз;

б) результатом опыта Е является некоторое *элементарное событие* ω (исход, случай);

в) одно и только одно элементарное событие является результатом опыта Е.

Замечание: понятие элементарного события – первичное (формально не определяется, как понятие *точки* в геометрии).

Множество всех элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, связанных с опытом Е, называют пространством элементарных событий опыта Е.

Пример 1. Опыт Е – однократное подбрасывание однородной правильной игральной кости; на верхней ее грани может выпасть одно из чисел от 1 до 6 (число точек интерпретируем как числа): элементарные события $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$; множество всех элементарных событий данного опыта $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$.

Пример 2. Опыт Е – случайное (наудачу) бросание цветной точки на белый квадрат, при этом превращение одной любой белой точки квадрата в цветную считается равновозможным. Здесь Ω - множество всех точек квадрата.

Случайные события и действия с ними (алгебра событий)

def | Пусть $\Omega = \{\omega\}$ – множество всех элементарных событий, связанных с опытом Е. *Случайное событие – любое подмножество А множества* Ω (в дальнейшем будем говорить просто *событие*), связанное с опытом Е.

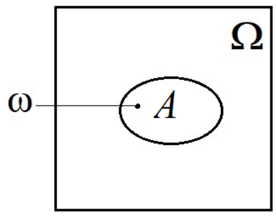
Случайные события обычно обозначают прописными буквами *A*, *B*, *C* и т.д.

Примеры:

а) событие A - выпадение четного числа на верхней грани игральной кости. Событие A произойдет, если выпадет четное число, то есть, если исходом опыта Е окажется либо ω_2, либо ω_4, либо ω_6: $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$.

б) событие A_1 - выпадение числа 1 на верхней грани: $A_1=\{\omega_1\}$.

в) событие A – попадание цветной точки в область A при бросании ее на белый квадрат:



def Каждое элементарное событие, содержащееся в A, называют благоприятствующим событию A:

$$\omega\in A \Leftrightarrow (\omega \textit{ благоприятствует } A),$$

Итак, пусть A – случайное событие, связанное с опытом Е.

def При проведении опыта Е событие A *происходит*, если результатом опыта оказывается элементарное событие ω, благоприятствующее событию A (содержащееся в A) и не происходит в противном случае.

def Событие называют достоверным, если оно происходит при каждом проведении опыта Е, обозначают достоверное событие через Ω. Достоверному событию Ω благоприятствует любое элементарное событие ω из пространства элементарных событий $\Omega=\{\omega\}$.

def Событие $\varnothing$ называют невозможным, если оно не происходит ни при одном проведении опыта Е ($\varnothing$ – обозначение пустого подмножества исходов опыта Е).

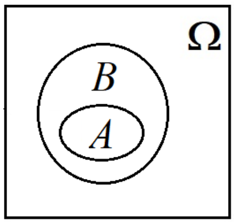
def Пусть A и B – события, связанные с опытом Е. События A и B называются равными, равносильными или эквивалентными, если они состоят из одних и тех же элементарных событий ω:

$$\forall\ \omega\ (\omega\in A \Leftrightarrow \omega\in B) \Leftrightarrow (A = B).$$

Иначе говоря, A и B равны, если при проведении опыта Е: а) событие B *происходит* всякий раз, когда *происходит* событие A и б) событие B *не происходит* всякий раз, когда *не происходит* событие A. Равносильные (равные) события A и B происходят (или не происходят) одновременно.

def| Если событие B происходит всякий раз, как происходит событие A, то говорят, что A влечет B; каждый случай ω, благоприятствующий A, благоприятствует B:

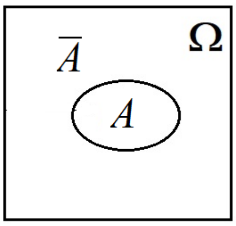
$$\forall\, \omega\ (\omega \in A\ \Rightarrow\ \omega \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B.$$



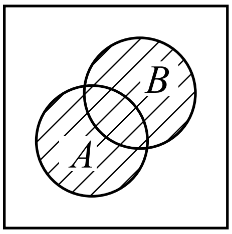
Ясно, что: а) $\forall A\ A \subseteq \Omega$; б) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow (A = B)$.

def| Событие $\overline{A}$, которое происходит всякий раз, как не происходит событие A при любом проведении опыта Е, называется противоположным (дополнительным) событию A. Очевидно, что $\overline{\overline{A}} = A$. Если $A=B$, то $\overline{A} = \overline{B}$.

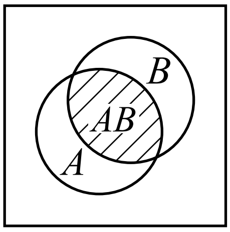
Пусть A и $\overline{A}$ связаны с опытом Е, $\Omega=\{\omega\}$ – пространство элементарных событий, тогда для любого элементарного события ω либо $\omega \in A$, либо $\omega \in \overline{A}$.



def| Сумма (объединение) событий A и B – это событие $A+B$ ($A \cup B$), которое *происходит*, если *происходит хотя бы одно* из них (A или B) и *не происходит*, если *не происходят оба* эти события. Событие $A+B$ состоит из тех и только тех элементарных событий ω, которые благоприятствуют *хотя бы одному* из этих событий.



def Произведение (пересечение) событий A и B – это событие AB ($A \bigcap B$), которое *происходит*, если *происходят оба* эти события и *не происходит*, если *не происходит хотя бы одно* из них (или A или B). Событие AB состоит из тех и только тех элементарных событий ω, которые благоприятствуют *обоим* этим событиям (и A и B).



Свойства операций сложения, умножения, дополнения:

$A+A = A$; $A+\Omega = \Omega$; $A+\varnothing = A$; $AA = A$; $A\varnothing = \varnothing$;

$A+B = B+A$– коммутативность сложения;

$(A+B) + C=(A+(B+C) = A+B+C$ – ассоциативность сложения;

$AB = BA$– коммутативность умножения;

$(AB)C=A(BC) =ABC$ – ассоциативность умножения;

$(A+B)C=AC+BC$ – дистрибутивность, 1-й закон;

$(AB)+C=(A+C)(B+C)$ – дистрибутивность, 2-й закон;

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}\\ \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}\end{array}\right\}$$ правила (формулы) *Де Моргана.*

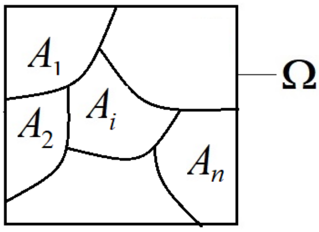
Введенные операции сложения и умножения событий (объединения и пересечения) естественно обобщаются на случай $n \geq 2$ событий (включая $n = \infty$): $\sum_{i=1}^{n} A_i$ $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ и $\prod_{i=1}^{n} A_i$ $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$ – сумма и произведение n событий $A_1,\ldots,A_n$.

Формулы *Де Моргана*: $\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$; $\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

$\underline{def}|$ События A и B называют несовместными, если их произведение есть невозможное событие: $AB = \varnothing$.

$\underline{def}|$ События $A_1,\ldots,A_n$ образуют *полную группу*, если $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$;

если эти события *попарно несовместны* $A_i\, A_j = \varnothing\ \forall\,(i,j\colon\ i\neq j)$, то они образуют *полную группу попарно несовместных событий*.



Например:

а) $A+\overline{A} = \Omega$;

б) Пусть n – общее (конечное) число всех элементарных событий $\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ опыта E, тогда события $\{\omega_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ образуют полную группу попарно несовместных событий, поскольку, по смыслу элементарного события имеем $\{\omega_1\}\cap\{\omega_j\}=\varnothing$ $(i\neq j)$ и $\sum_{i=1}^{n}\{\omega_i\}=\Omega$.

1.2. Определение вероятности

Классическое определение вероятности

$\underline{def|}$ Опыт Е проводится по классической схеме, если пространство его элементарных событий $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ конечно и события $\{\omega_i\}$ $(i = 1,\ldots, n)$ *равновозможны* (опыт Е обладает симметрией по отношению к исходам – ни один из исходов опыта Е не является предпочтительным по отношению ко всем другим). Понятие равновозможности или равновероятности считается первичным (не определяется формально).

$\underline{def|}$ (*классическое определение вероятности*)

Пусть опыт Е проводится по классической схеме, пространство его элементарных событий $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ – конечное множество, n – число всех элементарных событий (случаев или исходов опыта), $n(A)$ – число случаев, благоприятствующих событию A, тогда *вероятностью* $\mathrm{P}(A)$ *события A называется отношение*:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n\,(A)}{n}$$

Замечания.

а) классическое определение вероятности основано на понятии *равновероятности*, формально не определяемом;

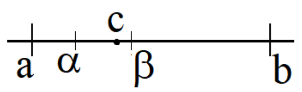
б) вероятности событий $\{\omega_i\}$, в силу классического определения вероятности, равны $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = 1/\,n$ $(i = 1,\ldots, n)$.

Очевидными следствиями классического определения вероятности являются следующие свойства вероятности:

1) $\mathrm{P}(\Omega)=1$;
2) $\mathrm{P}(\varnothing)=0$;
3) $\forall A \quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$;
4) $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$;
5) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathrm{P}(A) \le \mathrm{P}(B)$;
6) для любых A и B: $\mathrm{P}(AB) \le \mathrm{P}(A)$.

Геометрическое определение вероятности

Рассмотрим на оси абсцисс отрезок [a;b] и внутри него фиксируем отрезок $[\alpha;\beta]$. Пусть опыт состоит в случайном бросании точки $(\cdot)$c на отрезок [a;b]. Достоверным событием считается попадание $(\cdot)$c на отрезок [a;b], причем попадание $(\cdot)$c на любую точку отрезка [a;b] предполагается равновозможным.·



def | Вероятность события $A=\{c\in[\alpha;\beta]\subseteq[a;b]\}$ – попадание точки $(\cdot)$c на отрезок $[\alpha;\beta]$, вложенный в [a;b], *по определению* равна

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\textit{длина}\,[\alpha;\beta]}{\textit{длина}\,[a;b]}.$$

Аналогично определяется *геометрическая* вероятность для плоского и пространственного случаев.

Аксиоматическое определение вероятности

Рассмотрим опыт E, Ω – пространство его элементарных событий.

def | Множество событий F, связанных с опытом, называется σ -алгеброй, если F обладает свойствами:

1. $\Omega \in F, \varnothing \in F$ (F содержит достоверное и невозможное события);
2. $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$ (наряду с A, множество F содержит и противоположное событие $\overline{A}$);
3. $A_1,\ldots, A_n,\ldots \in F$ счетное (в частности, конечное) множество событий, принадлежащих F, и при этом $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ и $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ (счетные суммы и произведения принадлежат F).

def Вероятностью $P(A)$ события A называется числовая функция, определенная на σ-алгебре событий F и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $P(A) \geq 0$ – аксиома неотрицательности;
2. $P(\Omega) = 1$ – аксиома нормированности;
3. для любого счетного множества попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n \ldots$ $A_i A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ справедливо $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ – аксиома сложения (аксиома счетной аддитивности).

Из перечисленных аксиом могут быть выведены все формулы исчисления вероятностей.

Рассмотрим несколько примеров:

(а) $P(\varnothing)=0$

$\Omega = \Omega + \varnothing \Rightarrow P(\Omega) = P(\Omega+\varnothing)=P(\Omega)+P(\varnothing) \Rightarrow 1=1+ P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing)=0$

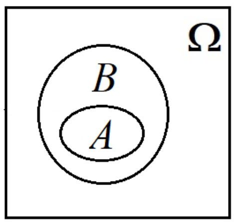
(б) $P(\overline{A}) = 1- P(A)$

$A + \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(A+\overline{A})= P(\Omega) \Rightarrow P(A)+P(\overline{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(A)+P(\overline{A})=1\Rightarrow$
$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1- P(A)$

(в) $0 \leq P(A) \leq 1$

$0 \leq P(A)$ – аксиома неотрицательности,
$P(A) = 1- P(\overline{A}) \leq 1$ (т.к. $P(\overline{A}) \geq 0$).

(г) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



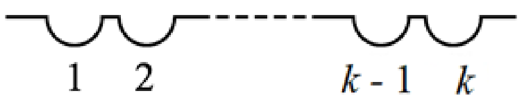
$B = A+\overline{A}B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(\overline{A}B) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$ (т.к. $P(\overline{A}B) \geq 0$)

1.3. Элементы комбинаторики; непосредственный подсчет вероятностей

(1) Упорядоченные комбинации по одному элементу из каждой группы.

Имеется k групп элементов:
$$\begin{cases} a_1, \ldots, a_{n_1} \\ b_1, \ldots, b_{n_2} \\ c_{i_1}, \ldots, c_{n_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1, \ldots, x_{n_k} \end{cases}$$

Найдем *число упорядоченных комбинаций* $(a_{i_1}; b_{i_2}; \ldots; x_{i_k})$, содержащих по одному элементу из каждой группы: на первое место ставится элемент из первой группы, на второе – из второй и т.д.



При $k = 2$ выбор первого элемента пары $(a_{i_1}; b_{i_2})$ можно осуществить числом способов n_1, равным числу элементов первой группы, второго – числу n_2 элементов второй группы. Число способов, которыми можно образовать все упорядоченные пары $(a_{i_1}; b_{i_2})$, равно $n_1 \cdot n_2$.

Число упорядоченных пар легко подсчитать так: составим прямоугольную таблицу, содержащую n_1 строк и n_2 столбцов. На пересечении i_1 -й строки и i_2 -го столбца будет стоять упорядоченная пара $(a_{i_1}; b_{i_2})$. Каждая такая пара встречается один и только один раз, а число пар, очевидно, будет равно $n_1 \cdot n_2$.

При $k = 3$ имеем упорядоченные тройки $(a_{i_1}; b_{i_2}; c_{i_3})$. Составим все пары $(a_{i_1}; b_{i_2})$, примем их за элементы новой группы (их число равно

$n_1 \cdot n_2$, как уже показано), и n_3 элементов третьей группы. Таким образом, число троек ($a_{i_1}; b_{i_2}; c_{i_3}$) будет равно $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$.

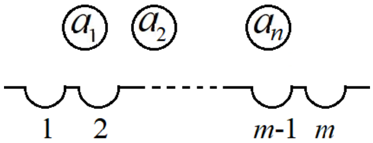
По индукции получим, что *число всех упорядоченных комбинаций* ($a_{i_1}; b_{i_2}; \ldots, x_{i_k}$) *по одному элементу из каждой группы* равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$. Полученный результат иногда называют *комбинаторным правилом умножения.*

(2) Размещения и перестановки.

Пусть имеется n - элементное множество $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Найдем число всех *упорядоченных* m-элементных подмножеств данного n-элементного множества ($1 \le m \le n$).

Для наглядности рассмотрим n различных шариков и m занумерованных лунок.



Будем размещать шарики в лунках последовательно, по одному, начиная с первой лунки, *без возвращения*: произвольно выбранный шарик изымается из исходного набора – остается в лунке – и не может быть выбран еще раз. Выбор шарика для помещения его в первую лунку можно осуществить n способами (выбирается один из всех имеющихся вначале n-шариков), во вторую – $(n - 1)$ способами (выбор одного из $(n - 1)$ оставшихся) и так далее; в последнюю m-ю лунку выбор возможен из $n - (m - 1)$ оставшихся шариков.

Здесь воспроизводится ситуация, рассмотренная в п. (1), когда составлялись упорядоченные комбинации по одному из каждой группы: первая группа имеет n элементов, вторая $n - 1$ элементов, последняя $n - (m - 1)$ элементов. Искомое число комбинаций, таким образом, равно $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - (m - 1))$.

def| *Упорядоченные m-элементные подмножества данного n-элементного множества называются размещениями из n элементов по m элементов.*

Размещения отличаются друг от друга либо самими элементами, либо их порядком.

Число размещений *из n элементов по m элементов* ($1 \le m \le n$) принято обозначать символом A_n^m. Из рассмотренного примера, с учетом п.(1) ясно, что

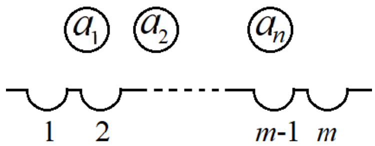
$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1 \le m \le n).$$

def| В случае $m = n$ (размещения из n элементов по n элементов). размещения называются *перестановками*. Перестановки состоят из одних и тех же n элементов и различаются только их порядком. Число *перестановок из n элементов* равно

$$P_n = A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

(3) Выбор с возвращением (размещения с повторениями).

Пусть, как в п. (2), имеем n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, из которых составим m- элементные упорядоченные комбинации, однако выбор будем осуществлять *с возвращением*.



В этом случае выбор на каждом шаге осуществляется из всего множества $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n – способами), т.е. имеем m одинаковых групп по n элементов в каждой группе (см. п (1)): $\left\{\begin{array}{l} a_1, \ldots, a_n \\ \ldots\ldots\ldots.. \\ a_1, \ldots, a_n. \end{array}\right.$

Число образованных m - элементных упорядоченных комбинаций (*размещений с повторениями из n элементов по m элементов*) равно, очевидно, n^m. Опыт при *выборе с возвращением* можно интерпретировать как формирование сообщений длиной m символов, при условии, что в распоряжении имеется n - символьный алфавит и символы в сообщении могут повторяться. Число способов, которыми можно сформировать такое сообщение равно n^m . Ясно, что общее число таких сообщений равно n^m .

(4) Сочетания

$\underline{def}|$ m-элементные подмножества данного n-элементного множества ($1 \le m \le n$) называются *сочетаниями*. Сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, понятно, что порядок элементов в них не важен.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m .

Найдем формулу для вычисления C_n^m .

Составим всевозможные сочетания из n по m,(их число обозначено C_n^m). В каждом из сочетаний выполним всевозможные перестановки, число таких перестановок равно $P_m = m!$. В результате получим упорядоченные m - элементные подмножества данного n - элементного множества, т.е. размещения из n по m , число которых равно A_n^m . Таким образом, имеем соотношение:

$$C_n^m \; P_m = A_n^m ,$$

откуда число сочетаний из n по m равно $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Заметим, что $C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^0 = C_n^n = 0! = 1$.

С учетом этого замечания запишем связь между числом сочетаний, размещений и перестановок $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ $(0 \le m \le n)$.

В известной формуле разложения бинома $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}$ *биномиальные коэффициенты* C_n^m – это число сочетаний из n по m .

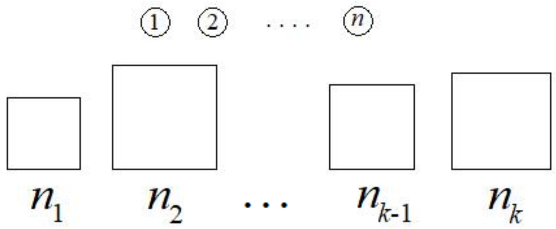
Полагая $a = b = 1$, получим: $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$: *сумма биномиальных коэффициентов равна* 2^n.

Отметим также одно полезное соотношение: $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$.

З А Д А Ч И

Задача. О распределении n шариков по k ящикам.

Имеется n шариков и k ящиков, вмещающих:
первый *ровно* n_1, второй – $n_2,\ldots$, k-й – n_k шариков, соответственно, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. Найти число способов, которыми можно распределить все шарики по ящикам.



Решение.

При $k = 2$, имеем $n_1+n_2= n$. Число способов выбора n_1 шариков из n для размещения их в первом ящике равно $C_n^{n_1} = \dfrac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$, при этом $n-n_1= n_2$ оставшихся шариков окажутся во втором ящике.

Таким образом, искомое число способов $m = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!}$ при k =2.

При $k = 3$ имеем, очевидно:

$$m = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$

Обобщая (по индукции), получаем :

$$m = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Заметим, что результат может быть сформулирован в виде утверждения (теоремы) следующим образом.

Пусть $n_1, n_2,\ldots,$ n_k – целые неотрицательные числа, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$ ($n_k \geq 0$), тогда число способов, посредством которых n элементов могут быть разделены на k групп, из которых первая содержит n_1 элементов, вторая n_2 элементов и т.д., равно

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$ (*полиномиальные коэффициенты*).

Задача (*о выборе*).

Всего имеется α шаров, из которых β– черные, а остальные α–β – белые. Наугад выбирают s шаров (выборка объема s). Какова вероятность того что в этой выборке r шаров – черные, а остальные белые (событие A).

Решение

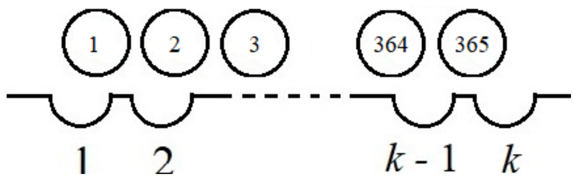
$n = C_\alpha^s$;

$n(A) = C_\beta^r C_{\alpha-\beta}^{s-r}$ = (число способов выбора r шаров из β черных шаров)×(число способов выбора $s-r$ шаров из $\alpha-\beta$ белых шаров).

Таким образом, $P(A) = \dfrac{C_\beta^r C_{\alpha-\beta}^{s-r}}{C_\alpha^s}$.

Задача. О днях рождения.

В аудитории k студентов. Найти вероятность того, что, по крайней мере, у двух из них дни рождения совпадают (одно и то же число одного и того же месяца). Примем допущение, что в любом году 365 дней (не учитываем, что бывают високосные годы).



Пусть A – интересующее нас событие, а $\overline{A}$– противоположное ему (дни рождения у всех k студентов разные).

Тогда общее число всех способов распределения студентов по дням рождения (выбор с возвращением) равно $n = 365^k$.

Число исходов, благоприятствующих событию $\overline{A}$,

$$n(\overline{A}) = A_{365}^k = \frac{365!}{(365-k)!}$$

$$P(\overline{A}) = n(\overline{A})/n = \frac{365!}{(365-k)!365^k} = \frac{365\,(365-1)(365-2)...(365-(k-1))}{365^k} =$$

$$= (1-\frac{1}{365})(1-\frac{2}{365})\ \dots(1-\frac{k}{365}) \approx \left[e^{-x}=1-x+o(x)\right] \approx e^{-\frac{1+2+...+(k-1)}{365}} = e^{-\frac{k(k-1)}{2\cdot 365}}$$

Искомая вероятность $P(A) = 1- P(\overline{A})$.

Заметим, что при $k = 23$ вероятность P(A) = 0,507, а при $k = 60$ эта вероятность равна уже P(A) = 0,994.

Задача (о первом тузе).

Колода в 52 карты тщательно перемешивается, после чего последовательно, одна за другой, открываются верхние карты до появления первого туза. Найти вероятность того, что первым тузом окажется:

а) пятая карта $A_а$;

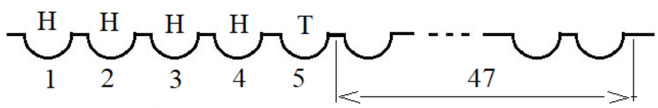
б) k-я карта $A_б$;

в) первый туз встретится не далее k-й карты $A_в$.

Указание: Рассмотреть карты только двух видов Т – туз Н – не туз. Каждому расположению карт в колоде соответствует цепочка из 52 символов из которых 4 символа Т и 48 символов Н.

Решение

Всего способов расположить 4 символа Т на 52 местах равно $n = C_{52}^4$



Число последовательностей символов, в которых первые 5 мест зафиксированы, а на оставшихся 47 местах располагаются 3 символа Т (эти последовательности, таким образом, отличаются друг от друга различными расположениями в них трех символов Т), равно $n(A_а) = C_{47}^3$.

Ответ: $P(A_а)= \dfrac{C_{47}^3}{C_{52}^4}$; $P(A_б)= \dfrac{C_{52-k}^3}{C_{52}^4}$ (k=1,2,…,49); $P(A_в)= 1-\dfrac{C_{52-k}^4}{C_{52}^4}$ (k≤48)

Задача.

В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошли 5 пассажиров. Каждый из них независимо от остальных может выйти на любом этаже (со 2-го по 9-й). Найти вероятность того, что

а) все пять пассажиров выйдут на разных этажах (событие A)

б) на одном этаже выйдут три, а на другом два пассажира (событие B).

Решение

$n = 8^5$ – каждый из пассажиров может выбрать любой из этажей

$n(A) = A_8^5$ (все пять пассажиров выходят на разных этажах)

$n(B)$ = [(число способов разбиения на две группы, состоящие из 2-х и из 3-х пассажиров)×(число вариантов выбора этажей для выхода этих групп)] $= C_5^2 \cdot A_8^2$.

Задача

Для уменьшения общего количества игр $2k$ команд спортсменов по жребию разбивается на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся а) в разных подгруппах ($A_{а}$); б) в одной подгруппе ($A_{б}$).

Решение

$n = C_{2k}^k$; $n(A_{а}) = C_2^1 C_{2k-2}^{k-1}$; $n(A_{б}) = 2 \cdot C_2^2 C_{2k-2}^{k-2}$.

Задача.

Кодовый замок имеет всего 10 кнопок и открывается только при одной определенной комбинации нажатых кнопок. Найти вероятность того, что замок будет открыт в результате одного случайного нажатия некоторых кнопок (событие A).

Решение

$n = 2^{10}$; $n(A) = 1$; $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{1024}$.

1.4. Условная вероятность, правило вычисления вероятностей произведений событий

Пусть A и B – два события, связанные с опытом E.

def| Вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло (или просто – при условии A) , называют *условной вероятностью* и обозначают $\mathrm{P}(B/A)$.

Вероятность события B, вычисленную без каких-либо дополнительных сведений о событии A, называют безусловной вероятностью $\mathrm{P}(B)$.

Пример. В урне имеется всего 2 белых и 3 черных шара. Опыт E: последовательно (без возвращения) вынимают 2 шара. Найдем вероятность вынуть черный шар, при условии, что первым был вынут белый шар (произошло событие A).

После того, как был вынут белый шар, в урне осталось 4 шара, из которых 3 – черных и 1– белый; общее число исходов при извлечении второго шара равно 4, а число исходов, благоприятствующих событию B равно 3. Поэтому $\mathrm{P}(B/A) =3/4$.

T| *Правило (теорема) умножения вероятностей*

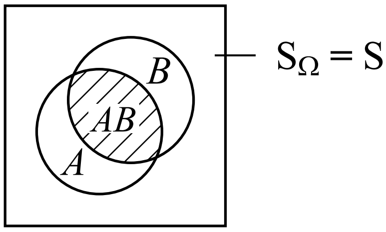
Пусть A и B – события, связанные с опытом E, проводимым по классической схеме, тогда:

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B/A) \qquad (*)$$

Док| Пусть n – число всех элементарных событий (случаев), связанных с опытом Е, $n\,(AB)$ – число случаев, благоприятствующих событию AB, $n(A)$ – число случаев, благоприятствующих событию A. Пусть событие A произошло, тогда общее число случаев становится равным $n(A)$, из них число случаев, благоприятствующих событию B, равно $n\,(AB)$. Поэтому $\mathrm{P}(B/A) = n\,(AB)/n(A)$, откуда и следует справедливость равенства $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B/A)$.

Действительно, $\mathrm{P}(AB) = n\,(AB)/n = (n(A)/n)\cdot(n\,(AB)/n(A)) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B/A)$.

Правило (теорема) умножения вероятностей наглядно иллюстрируется геометрическими вероятностями.



Обозначим площади соответствующих областей через S, S_A, S_{AB} и выразим через них вероятности событий:

$P(AB) = S_{AB}/S$, $P(A) = S_A/S$, $P(B/A) = S_{AB}/S_A$. Подставим эти вероятности в (∗), получим $P(AB) = P(A)\,P(B/A)$.

Заметим, что буквы A и B входят в формулу (∗) симметрично и запишем окончательно правило (теорему умножения) для двух событий:

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$$

По индукции доказывается *теорема умножения для n событий* ($n \geq 2$): пусть события $A_1, \ldots, A_n$ таковы, что $P(A_i) > 0$, тогда

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1 \ldots A_{n-1})$$

Пример

Студент знает 10 вопросов из 20. На экзамене задали 3 вопроса. Какова вероятность того, что все 3 заданных вопроса из числа тех 10, ответы на которые студент знал до экзамена (событие A)?

Ответ: $P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1.)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2) = 10/20 \times 9/19 \times 8/18$

Другое решение: искомая вероятность равна $P(A) = \dfrac{C_{10}^3}{C_{20}^3}$ (см. задачу о выборе).

1.5. Независимые события, независимость в совокупности

Пусть A и B – два события, связанные с опытом E.

def| Событие B не зависит от события A, если $\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$: осуществление события A не влияет на вероятность события B.

Утверждение:

$$B \text{ не зависит от } A \Leftrightarrow A \text{ не зависит от } B$$

Док| Пусть B не зависит от A: $\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$, найдем $\mathrm{P}(A/B)$.

По правилу умножения вероятностей:

$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A/B) \Rightarrow \left[\text{по условию } \mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A/B) \Rightarrow \mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A) \Rightarrow$ *A не зависит от B*.

Достаточность (A не зависит от $B \Rightarrow B$ не зависит от A) доказывается аналогично. Таким образом, понятие независимости двух событий *симметрично*.

Критерий (необходимое и достаточное условие) *независимости двух событий*:

$$A \text{ и } B \text{ независимые события} \Leftrightarrow \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \qquad (*)$$

Соотношение $(*)$ часто принимают в качестве *определения* независимости двух событий.

Отсюда следует определение зависимых событий:

def| A и B зависимые события $\Leftrightarrow \mathrm{P}(AB) \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.

Упражнение: Доказать, что если A и B независимые события, то $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – независимые.

Указание: воспользоваться формулами де Моргана $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A + B}$, а также свойством $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

Независимость n событий в совокупности

def| События $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ называются независимыми в совокупности, если для любого подмножества этих событий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ выполняется условие $\mathrm{P}(\prod_{l=1}^{k} A_{i_l}) = \prod_{l=1}^{k} \mathrm{P}(A_{i_l})$.

Замечания

а) Иначе это определение можно сформулировать так:

События $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ называются независимыми в совокупности, если каждое из этих событий не зависит от любого произведения остальных событий.

б) При $n > 2$ равенство $P(A_1, \ldots, A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$, очевидно, является необходимым, но не достаточным условием независимости в совокупности событий $A_1, \ldots, A_n$. При $n = 2$ оно является необходимым и достаточным условием.

Пример 1.

Опыт: из карточной колоды, содержащей 36 карт, наугад извлекается одна карта. Пусть событие A состоит в том, что это "пика", а событие B, что это –"дама". Являются ли A и B независимыми?

Решение: $P(A) = 9/36$; $P(B) = 4/36 = 1/9$; $P(AB) = 1/36$;

$P(AB) = P(A)\,P(B) \Rightarrow A$ и B независимые события.

Пример 2.

В урне лежат 4 одинаковые карточки с написанными на них числами 1, 6, 10, 15:

$\boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{10}\ \boxed{15}$

Случайно вынимается одна карточка. Пусть на этой карточке оказалось число x. Рассмотрим три события:

$A = \{\, x$ делится на $2\}$; $B = \{\, x$ делится на $3\}$; $C = \{\, x$ делится на $5\}$

Являются ли события A, B, C попарно независимыми (а); независимыми в совокупности (б)?

Решение

(а) $P(A) = 2/4 = 1/2$; $P(B) = 1/2$; $P(C) = 1/2$;

$P(AB) = 1/4$; $P(AC) = 1/4$; $P(BC) = 1/4$;

$P(AB) = P(A)\,P(B) \Rightarrow A, B$ – независимы.

Аналогично A, C и B, C – независимы.

(б) $P(ABC) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$, таким образом, события A, B, C – зависимые события, при этом они являются попарно независимыми.

1.6. Правило вычисления вероятностей сумм событий

<u>*Т*</u>| *Правило (теорема) сложения вероятностей для несовместных событий*

Пусть несовместные события A и B связаны с опытом E, проводимым по классической схеме, тогда:

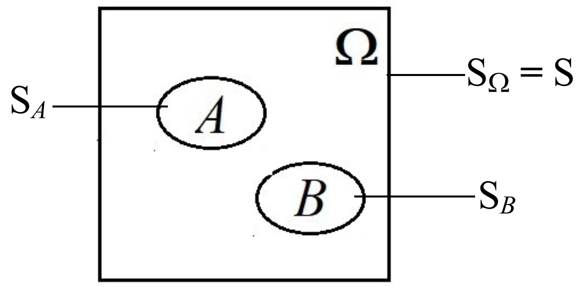
$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

<u>*Док*</u>| Пусть n – число всех элементарных событий опыта E, $n(A)$ и $n(B)$ – число случаев, благоприятствующих событиям A и B, соответственно.

Поскольку A и B – несовместны, $n\,(A+B)=n(A)+n(B)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

Проиллюстрируем эту теорему с помощью геометрических вероятностей.



Обозначим площади соответствующих областей через S, S_A, S_B , S_{A+B}, тогда $\mathrm{S}_{A+B}=\mathrm{S}_A+\mathrm{S}_B$ (т.к. A и B – несовместны). Отсюда вероятности событий: $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{S}_{A+B}/\mathrm{S}$, $\mathrm{P}(A)=\mathrm{S}_A/\mathrm{S}$, $\mathrm{P}(B)=\mathrm{S}_B/\mathrm{S}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

<u>*Т*</u>| *Правило (теорема) сложения вероятностей для произвольных событий*:

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).$$

<u>*Док*</u>| $A+B=AB+A\overline{B}+\overline{A}B$ – попарно несовместные события, поэтому

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(AB)+\mathrm{P}(A\overline{B})+\mathrm{P}(\overline{A}B) \qquad (+)$$

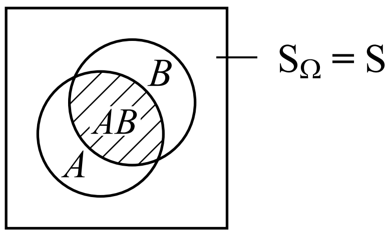
$A = AB + A\overline{B}$ (несовместные события) $\Rightarrow$ P(A)= P(AB)+P($A\overline{B}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P($A\overline{B}$) = P(A) – P(AB) (∗)

B= $AB + \overline{A}B \Rightarrow$ P(B)= P (AB)+P($\overline{A}B$) $\Rightarrow$ P($\overline{A}B$) = P(B) – P (AB) (∗∗)

Подставляя (∗) и (∗∗) в (+), получаем P($A + B$)=P(A) + P(B) – P(AB).

Правило (теорема) сложения вероятностей наглядно иллюстрируется геометрическими вероятностями.



Обозначим площади соответствующих областей через S, S_A, S_B, S_{A+B}, S_{AB} и запишем $S_{A+B} = S_A + S_B - S_{AB}$.
Откуда P(A+B) = S_{A+B}/S = ($S_A + S_B - S_{AB}$)/S = P(A) + P(B) – P(AB).

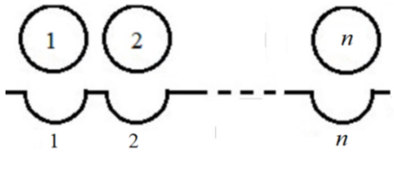
T| *Обобщение правила (теоремы) сложения вероятностей для n произвольных событий* ($n \geq 2$)

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j} P(A_iA_j) + \sum_{1\leq i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \ldots +$$
$$(-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

(доказывается по индукции)

Задача о совпадениях

Имеется n занумерованных шариков и n занумерованных лунок. Шарики перемешиваются и помещаются в лунки. Найти вероятность того, что хотя бы один шарик окажется “на своем месте” – в лунке с номером, совпадающим с номером шарика.



Решение

Обозначим искомое событие через A. Общее число исходов опыта – число перестановок шариков равно $n!$. Введем события A_i – i -й шарик находится “на своем месте”, а остальные размещены по лункам произвольно, тогда $A = A_1 + A_2 +\ldots+ A_n$ – хотя бы один шарик “на своем месте”. По *правилу* (*теореме*) *сложения*, вероятность события A – суммы n событий ($n \geq 2$), равна:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j} \mathrm{P}(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k} \mathrm{P}(A_i A_j A_k) + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) \qquad (*)$$

$\mathrm{P}(A_i) = (n–1)!/n!$ – вероятность того, что i-й шарик зафиксирован на своем месте, а остальные произвольно размещены на оставшихся местах числом способов равным $(n–1)!$ – числу их перестановок,

$\mathrm{P}(A_i\, A_j) = (n–2)!/n!$ – вероятность того, что i-й и j-й шарики находятся на своих местах,

...

$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = 1/n!$ – вероятность того, что *все* шарики находятся на своих местах.

В равенстве $(*)$ под знаком суммы стоят равные слагаемые:

сумма $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$ равных слагаемых $\mathrm{P}(A_i)$, сумма $\mathrm{P}(A_i A_j)$, и т.д.

Число слагаемых для каждой суммы равно соответствующему числу сочетаний из n по k ($k = 1,2,\ldots, n$), тогда:

$$\mathrm{P}(A) = C_n^1\, \mathrm{P}(A_i) - C_n^2\, \mathrm{P}(A_i\, A_i) + C_n^3\, \mathrm{P}(A_i\, A_i A_k) + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} C_n^n\, \mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) =$$
$$= n\, \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

$$\mathrm{P}(A) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{e}^{-1}$$

(здесь использовано разложение $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$).

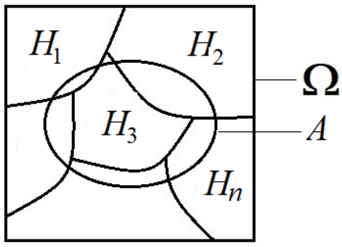
1.7. Формула полной вероятности и формула Байеса

<u>Т</u>| *Формула полной вероятности*

Пусть событие A и события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (гипотезы), связаны с опытом E, причем $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, $H_i H_j = \varnothing$ $i \neq j$ (*гипотезы попарно несовместны и образуют полную группу*); заданы вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$. Тогда вероятность $P(A)$ может быть вычислена по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i)$$

<u>*Док*</u>| Из условия теоремы следует, что любое событие A, связанное с опытом E, может произойти *совместно с одним и только одним из событий* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (*гипотезы попарно несовместны*)



$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = \sum_{i=1}^{n} AH_i$ – сумма попарно несовместных событий (т.к. H_i – попарно несовместны), получаем

$$P(A) = P\sum_{i=1}^{n}(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i) -$$

– формула полной вероятности

Замечания:

а) разбиение $\Omega = \sum_{i=1}^{n} H_i$ ($H_i H_j = \varnothing$ $i \neq j$) может быть счетным ($n = \infty$).

б) при применении формулы полной вероятности необходимо проверять выполнение условия $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

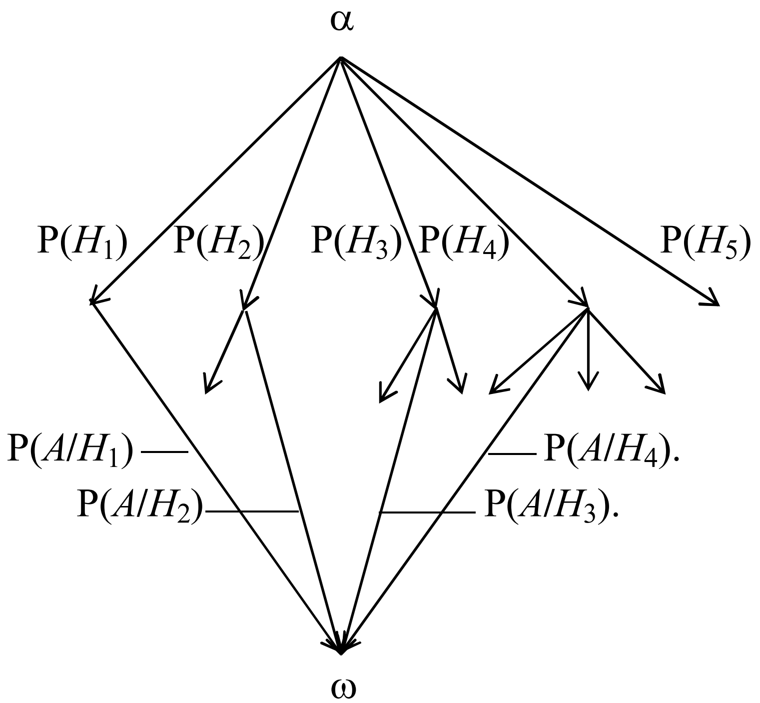
$\underline{T}|$ *Формулы Байеса* (*формулы апостериорных вероятностей гипотез*)

Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы и *в результате опыта событие A произошло*. По условию событие A могло произойти лишь с одним и только одним из событий H_i. Найдем условные вероятности $\mathrm{P}(H_i\,/\,A)$ – *апостериорные* (*после опыта*) *вероятности гипотез*:

$$\mathrm{P}(H_i\,/\,A)=\frac{\mathrm{P}(AH_i)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A\,/\,H_i)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A\,/\,H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A\,/\,H_i)}\quad (i=1,2,\ldots,n)\ –$$

– *формулы Байеса* (*формулы вероятностей гипотез*).

Формулы Байеса выражают *апостериорные* вероятности гипотез через заданные (*априорные*) вероятности гипотез $\mathrm{P}(H_i)$ и условные вероятности $\mathrm{P}(A/H_i)$.



Рассмотрим пример.

На рисунке выше показаны различные возможные пути из начальной точки α в конечную точку ω. Гипотезы H_1, $H_2,\ldots, H_5$ соответствуют выбору пути из начальной точки. Событие A – достижение точки ω.

Найдем вероятность P(A) при условии, что заданы вероятности гипотез P(H_i) и условные вероятности события A при соответствующих гипотезах P(A/H_i):

P(H_1) = p_1 = 0,015; P(H_2) = p_2 = 0,22; P(H_3) = p_3 = 0,2; P(H_4) = p_4 = 0,3;

P(H_5) = p_5 = 0,265 (заметим, что $\sum_{i=1}^{5} \mathrm{P}(H_i) = 1$);

P(A/H_1) =1,0; P(A/H_2) = 0,1; P(A/H_3) = 0,2; P(A/H_4) = 0,15; P(A/H_5) = 0.

Вероятность P(A) вычислим по формуле полной вероятности:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{5} \mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A/H_i) = 0{,}015 + 0{,}022 + 0{,}04 + \mathbf{0{,}045} = 0{,}122 \ (*)$$

Пусть теперь событие A произошло. С помощью формул Байеса установим, какой путь из начальной точки α наиболее вероятно был выбран для достижения конечной точки ω.

$$\mathrm{P}(H_i / A) = \frac{\mathrm{P}(H_i A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A/H_i)}{\mathrm{P}(A)} \qquad (i = 1,2,\ldots,5).$$

В этих формулах для разных значений i различаются только числители дробей при одном и том же знаменателе P(A). Из (∗) видим, что максимальной является апостериорная вероятность $\mathrm{P}(H_4 / A) =$ = **0,045** .

Задача

25 экзаменационных билетов содержат по 2 из 50 различных вопросов. Студент знает только 40 вопросов. Определить вероятность того что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на 2 вопроса билета или на 1 вопрос из первого билета и на указанный экзаменатором дополнительный вопрос из второго билета.

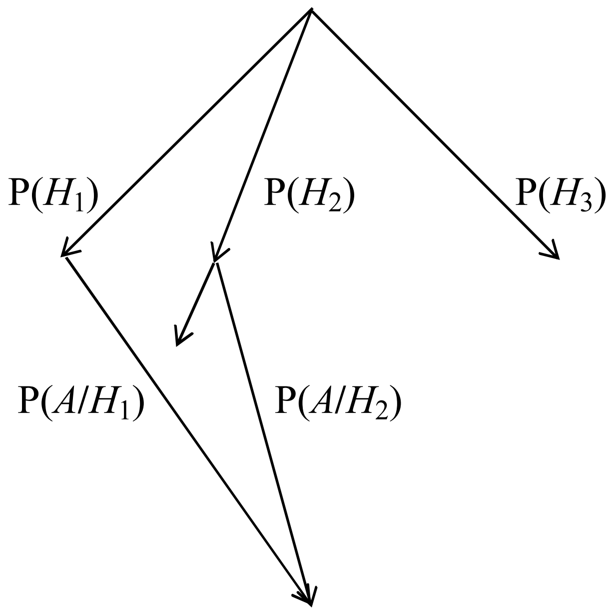
Решение

Событие A – экзамен сдан. Гипотезы: H_1 – студент знает оба вопроса билета; H_2 – знает один вопрос билета; H_3 – не знает ни одного вопроса билета. Для подсчета вероятностей гипотез воспользуемся результатом задачи о выборе (см. п. 1.3.).

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{C_{40}^2}{C_{50}^2},\quad \mathrm{P}(H_2)=\frac{C_{40}^1C_{10}^1}{C_{50}^2},\quad \mathrm{P}(H_3)=\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2},$$

Условные вероятности $\mathrm{P}(A/H_1)=1$, $\mathrm{P}(A/H_2)=39/48$, $\mathrm{P}(A/H_3)=0$.

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{P}(A/H_1)+\mathrm{P}(H_2)\,\mathrm{P}(A/H_2)\approx 0{,}94$$



Другое решение: $A=A_1+A_2$, где A_1 – студент знает оба вопроса билета, A_2 – знает только один вопроса билета и один дополнительный вопрос, предложенный экзаменатором. Заметим, что A_1 и A_2 – несовместны.

$$\mathrm{P}(A_1)=\frac{C_{40}^2}{C_{50}^2},\quad \mathrm{P}(A_2)=\frac{C_{40}^1C_{10}^1}{C_{50}^2}\times\frac{39}{48},$$

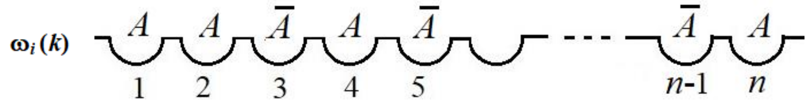
$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)\approx 0{,}94.$$

1.8. Последовательность независимых испытаний по схеме Бернулли, биномиальные вероятности

Пусть опыт E состоит в проведении *n независимых испытаний по схеме Бернулли*: *в каждом испытании* событие A (успех) происходит с заданной вероятностью p, а противоположное ему событие $\overline{A}$ (неуспех) с вероятностью $q = 1-p$.

Определим событие $B_k(n)$ как появление k успехов при проведении n испытаний, очевидно, $k = 0,1,\ldots, n$.

Обозначим вероятность этого события через $b_k(n,p) = P(B_k(n))$ и поставим задачу: считая заданными n и p, найти $b_k(n,p)$ для всех $k = 0,1,\ldots,n$. Для определенности выберем некоторое (любое) значение k $(0 \le k \le n)$ и представим себе в качестве исходов опыта E последовательности (сообщения) длиной n символов каждое, сформированные с помощью двухбуквенного алфавита (A и $\overline{A}$) так, что каждая такая последовательность состоит точно из k символов A (k успехов) и $(n-k)$ символов $\overline{A}$ ($(n-k)$ неуспехов): При этом одна последовательность $\omega_i(k)$ отличается от другой $\omega_j(k)$ лишь тем, на каких местах из n-мест стоят k символов A и $(n-k)$ символов $\overline{A}$.



Итак, $\omega_i(k)$, i=1,2,…, r – элементарные события (исходы опыта), благоприятствующее событию $B_k(n)$, тогда

$$B_k(n) = \{\omega_1(k), \omega_2(k),\ldots, \omega_i(k), \omega_r(k)\}.$$

Заметим, что при данном k число r элементарных событий $\omega_i(k)$ равно числу способов, которыми можно из имеющихся n мест выделить точно k мест под букву A и $(n-k)$ мест под букву $\overline{A}$ (т. е. равно числу способов разбиения n элементов на две группы, из которых одна содержит k элементов, а вторая $(n-k)$ элементов). Таким образом, $r = C_n^k$ – число сочетаний из n по k (см. п.1.3.).

По условию испытания независимы и вероятность появления успеха $P(A) = p$ или неуспеха $P(\overline{A}) = q$ в каждом испытании не зависит ни от номера испытания, ни от результатов предыдущих испытаний, поэтому:

$P\{\omega_i(k)\}$ = [правило умножения для независимых событий]$= p^k q^{n-k}$.

Имеем, $B_k(n) = \sum_{i=1}^{r}\{\omega_i(k)\}$, где $\{\omega_i(k)\} \cap \{\omega_j(k)\} = \varnothing$ ($i \neq j$);

$P(B_k) = P(\sum_{i=1}^{r}\{\omega_i(k)\}) = \sum_{i=1}^{r} P(\{\omega_i(k)\}) = \sum_{i=1}^{r} p^k q^{n-k}$ = [число слагаемых в этой сумме равно $r = C_n^k$, а каждое слагаемое равно $p^k q^{n-k}$] =

$= C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k = 0,1,\ldots,n)$.

Итак, $b_k(n,p) = C_n^k\ p^k q^{n-k}$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ – *биномиальные вероятности* (*вероятности появления k успехов при проведении n независимых испытаний по схеме Бернулли*).

<u>Замечания</u>

а) $\sum_{k=0}^{n} b_k(n,p) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$ (разложение бинома, отсюда название – *биномиальные вероятности*);

б) общее число всех элементарных событий $\omega_i(k)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, связанных с опытом E очевидно, равно 2^n (см. п.1.3. – число сообщений длиной n символов, сформированных *с возвращением* с помощью алфавита, состоящего из двух символов A и $\overline{A}$, равно 2^n).

Частные случаи

Вероятность того, что:

а) в серии из n испытаний событие A – успех не произойдет ни разу $b_0(n,p) = q^n$;

б) произойдет n раз $b_n(n,p) = p^n$;

в) произойдет один раз $b_1(n,p) = npq^{n-1}$;

г) произойдет хотя бы один раз $b_{\geq 1} = 1 - b_0(n,p) = 1 - q^n$;

д) произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз $= \sum_{k=k_1}^{k=k_2} b_k(n,p)$.

Задача

Определить необходимое число независимых испытаний n, при котором событие A – успех произойдет хотя бы один раз с вероятностью не меньшей, чем заданное значение P $(0 < P < 1)$, если вероятность появления события A в каждом испытании равна p $(0< p <1)$.

Решение

При проведении n испытаний событие A произойдет хотя бы один раз с вероятностью $1- b_0(n,p) = 1- q^n = 1- (1- p)^n$.

По условию, $1- (1- p)^n \geq P \Rightarrow (1- p)^n \leq 1- P \Rightarrow$

$$\Rightarrow n \ln(1- p) \leq \ln(1- P) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$

Задача

Найти *наивероятнейшее* значение числа появлений события A – успеха в серии из n испытаний по схеме Бернулли, если вероятность появления события A в отдельном испытании равна p.

Решение

Обозначим через m искомое наивероятнейшее число; ясно, что m определяется системой неравенств: $\begin{cases} b_m(n,p) \geq b_{m-1}(n,p) \\ b_m(n,p) \geq b_{m+1}(n,p). \end{cases}$

Решая систему относительно m, получим: $np - q \leq m \leq np + p$.

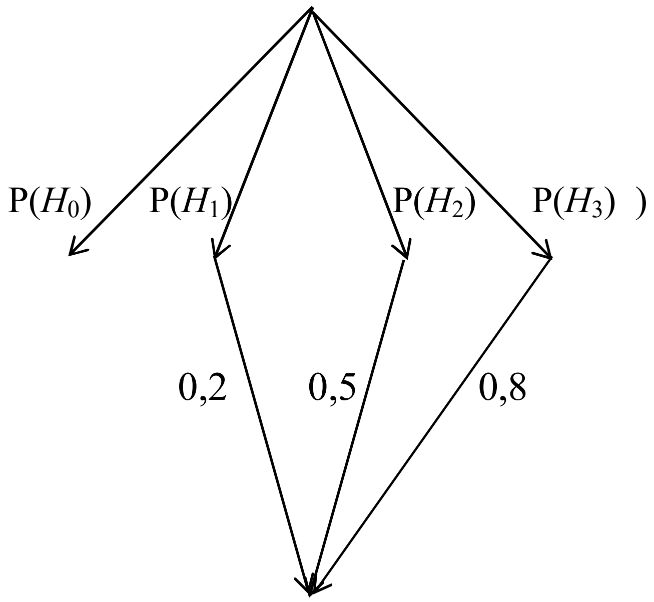
Задача

В семье 10 детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить а) вероятность того, что в этой семье пять мальчиков и б) наивероятнейшее число мальчиков.

Ответ: а) $b_5(10;0,5) = 63/256$; б) $m = 5$.

Задача

Вероятность возникновения перегрузки, опасной для прибора, в каждом опыте равна 0,4. Вероятности отказа прибора при одной, двух и трех перегрузках равны, соответственно: 0,2; 0,5; 0,8. Найти вероятность отказа прибора, если проведены три независимых опыта.



Решение:

Гипотезы о возможном числе перегрузок H_k при проведении трех независимых опытов равны:

$$\mathrm{P}(H_k) = b_k(3;\, 0{,}4),\ k = 0{,}1{,}2{,}3.$$

$\mathrm{P}(H_0) = (0{,}6)^3$; $\mathrm{P}(H_1) = C_3^1\ 0{,}4\ (0{,}6)^2$; $\mathrm{P}(H_2) = C_3^2\ (0{,}4)^2\ 0{,}6$;

$\mathrm{P}(H_3) = (0{,}4)^3$

По условию $\mathrm{P}(A/H_0) = 0$; $\mathrm{P}(A/H_1) = 0{,}2$; $\mathrm{P}(A/H_2) = 0{,}5$; $\mathrm{P}(A/H_3) = 0{,}8$.

Ответ: $\mathrm{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{k=3} \mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A/H_k) = 0{,}2816$

1.9. Теорема Пуассона и ее следствие – приближенное вычисление биномиальных вероятностей

Пусть вероятность успеха p_n *зависит* от числа испытаний n: при любом конкретном n и $0 \le k \le n$, имеем: $b_k(n,p_n) = C_n^k\ p_n{}^k\,(1-p_n)^{n-k}$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ – биномиальные вероятности.

Т| Теорема Пуассона

Пусть $p_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, при этом $np_n \underset{n\to+\infty}{\to} a$ $(a>0)$,

тогда при любом фиксированном $k \ge 0$: $b_k(n,p_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$.

Док| $np_n \underset{n\to+\infty}{\to} a \Rightarrow np_n = a + \alpha_n$, где $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (α_n – бесконечно малая при $n\to\infty$), откуда $p_n = (a+\alpha_n)/n$.

Имеем: $b_k(n,p_n) = C_n^k\ p_n{}^k\,(1-p_n)^{n-k} = \dfrac{n\,(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}\left(\dfrac{a+\alpha_n}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{a+\alpha_n}{n}\right)^{n-k}$

$$= \frac{n\,(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k}\,\frac{a^k}{k!}\,\left(1+\frac{\alpha_n}{a}\right)^k e^{(n-k)\ln(1-\frac{a+\alpha_n}{n})} = (*)$$

Вычислим предел $(*)$ при $n\to\infty$: в выражении $(*)$ заменим сомножители их пределами (или эквивалентными бесконечно малыми при $n\to\infty$), учтем также $u^v = e^{v\ln u}$, $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$; $\left(1+\dfrac{\alpha_n}{a}\right)^k \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$; $\ln\left(1-\dfrac{a+\alpha_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(-\left(\dfrac{a+\alpha_n}{n}\right)\right) = -\dfrac{1}{n}(a+\alpha_n)$, тогда получим:

$$(*) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^k}{k!}e^{-\frac{n-k}{n}(a+\alpha_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

Таким образом: $b_k(n,p_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$.

Следствие

Приближенная формула для вычисления биномиальных вероятностей: $b_k(n,p) \approx \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$, где $a = np$.

Это приближение, основанное на теореме Пуассона, рекомендуется применять при достаточно больших n и малых p, а именно, $n > 40$, $p < 1/10$, np – несколько единиц и $k \ll n$.

1.10. Полиномиальные вероятности

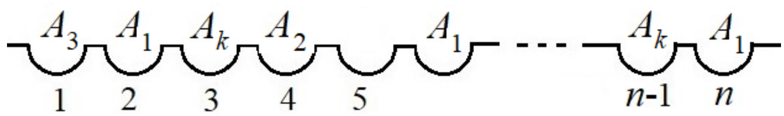
В рассмотренной в п.1.8. *схеме Бернулли* в каждом из n независимых испытаний происходит *одно из двух событий*: событие A – (успех), либо $\overline{A}$ (неуспех) с заданными вероятностями p и q, соответственно, ($p + q = 1$). Рассмотрим обобщение этой схемы.

Пусть теперь опыт E состоит в проведении n независимых испытаний в каждом из которых может произойти *одно из k событий* $A_1, \ldots, A_k$ $(k \geq 2)$ с вероятностями, соответственно равными $p_1, \ldots, p_k$, причем $A_1 + \ldots + A_k = \Omega$; $p_1 + \ldots + p_k = 1$.

Определим событие $\mathrm{B}_{n_1 \ldots n_k}(n)$ следующим образом: при проведении n независимых испытаний

событие A_1 произошло n_1 раз,
событие A_2 произошло n_2 раз,
…………………
событие A_k произошло n_k раз,
при этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Обозначим через $\omega_i(n_1, n_2, \ldots n_k)$ i-й исход опыта – элементарное событие, благоприятствующее событию $\mathrm{B}_{n_1 \ldots n_k}(n)$,



тогда $\mathrm{B}_{n_1 \ldots n_k}(n) = \sum\limits_{i=1}^{r} \{\omega_i(n_1, n_2, \ldots n_k)\}$ – сумма попарно несовместных событий, $\{\omega_i(n_1, n_2, \ldots n_k)\} \cap \{\omega_j(n_1, n_2, \ldots n_k)\} = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Число слагаемых r в этой сумме равно числу способов, которыми можно разместить n_1 символов A_1, n_2 символов A_2, … , n_k символов A_k в последовательности длиной n символов. Алфавит в "сообщении" состоит из k "букв" $A_1, \ldots, A_k$; r – число таких "сообщений".

$r = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$ (см. п.1.3. – задача о распределении n шариков по k ящикам, емкости которых $n_1, n_2, \ldots, n_k$ удовлетворяют условию $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).

$$P(B_{n_1 \dots n_k}(n)) = P\left(\sum_{i=1}^{r} \{\omega_i(n_1, n_2, \dots n_k)\}\right) = \sum_{i=1}^{r} P(\{\omega_i(n_1, n_2, \dots n_k)\}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} = [\text{сумма } r \text{ равных слагаемых}] = r \cdot (p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}) =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$ – *полиномиальные вероятности.*