1.11. Определение одномерной случайной величины, закон распределения, функция распределения

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ – множество всех элементарных событий опыта E.

def Одномерной случайной величиной называется числовая функция X(ω), определенная на пространстве элементарных событий Ω={ω}, которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие определенное действительное число ($X(\omega)$: $\Omega \xrightarrow{X} R$). При этом считается, что для любого $x \in$ R определена вероятность $P(X < x)$ события $X < x$.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а принимаемые ими значения – строчными буквами x, y, z и т.д.

Примеры случайных величин.

1. Опыт – проведение серии из n подбрасываний правильной монеты; случайная величина X – число выпавших гербов. Множество возможных значений: 0, 1, 2, …, n (конечное множество).
2. Опыт – подбрасывание правильной монеты до первого выпадения герба; случайная величина X – число подбрасываний до первого выпадения герба. Множество возможных значений: 1, 2, … (счетное множество).
3. Опыт – измерение какой-то величины с помощью прибора с грубыми делениями; случайная величина X – ошибка, возникающая при округлении до ближайшего целого значения. Множество возможных значений сплошь заполняет отрезок [–1/2; +1/2].
4. Опыт – измерение времени безотказной работы прибора; случайная величина X – время от начала работы до момента отказа. Множество возможных значений (теоретически) сплошь заполняет всю правую полуось – промежуток [0;+∞).

def Закон распределения случайной величины – это функция (заданная таблицей или формулой), устанавливающая связь между отдельными значениями случайной величины (или интервалами значений) и вероятностями принять эти отдельные значения (или значения из интервала).

def Функция распределения случайной величины $\mathrm{F_X}(x)$ определяется следующим образом: $\forall\ x \in \mathrm{R}\ \ \mathrm{F_X}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < x)$.

Смысл функции распределения – это <u>*вероятность*</u> *события* $(-\infty < \mathrm{X} < x)$: *случайная величина* X *приняла значение на полуоси левее точки x, не включая саму эту точку*.

Основные свойства функции распределения:

(а) $0 \le \mathrm{F_X}(x) \le 1$ (т.к. $\mathrm{F_X}(x)$ – вероятность);

(б) $\mathrm{F_X}(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F_X}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} < x) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$,

$\mathrm{F_X}(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F_X}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} < x) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$;

(в) $\mathrm{P}(a \le \mathrm{X} < b) = \mathrm{F_X}(b) - \mathrm{F_X}(a)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < b) = \mathrm{P}(a \le \mathrm{X} < b) + \mathrm{P}(\mathrm{X} < a);$$

(г) $\forall\ x_1 < x_2\ \ \mathrm{F_X}(x_2) - \mathrm{F_X}(x_1) = \big[$по свойству (в)$\big] = \mathrm{P}(x_1 \le \mathrm{X} < x_2) \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{F_X}(x_1) \le \mathrm{F_X}(x_2)$ таким образом, $\mathrm{F_X}(x)$ – неубывающая функция.

1.12. Дискретная одномерная случайная величина: определение, закон распределения, функция распределения

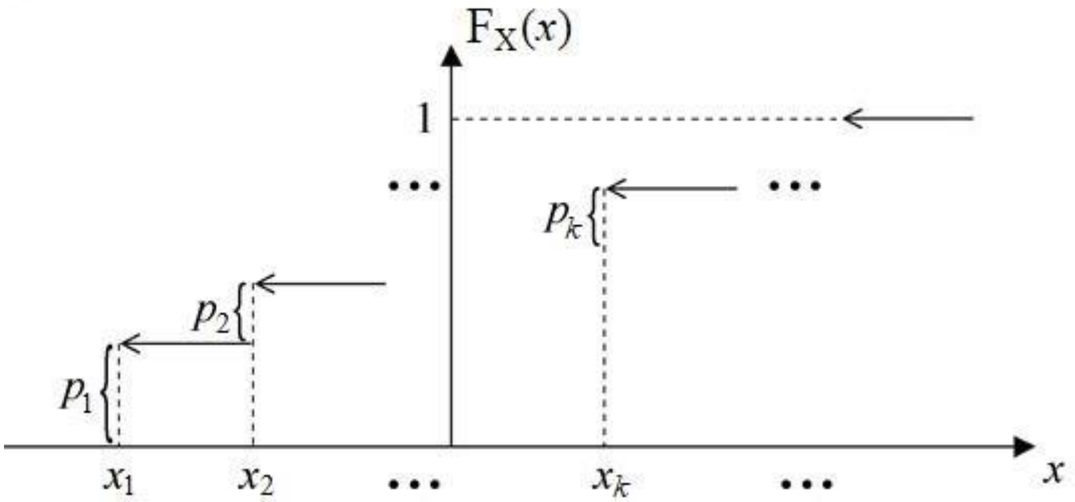
def | Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее возможных значений $\{x_1, x_2,\ldots, x_k,\ldots\}$ *счетно* (в частности, конечно).

Дискретную случайную величину задают, указывая множество всех ее возможных значений и соответствующие этим значениям вероятности событий $(X = x_k)$: $p_k = P(X = x_k)$. При этом должно быть выполнено *условие нормировки* $p_1 + p_2 +,\ldots,+ p_k +\ldots=1$.
Условимся сопоставлять *нулевую вероятность* любой точке числовой оси, отличной от x_k: $\forall\, x \;\; x \neq x_k \quad P(X = x) = 0$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно представить таблицей (рядом распределения):

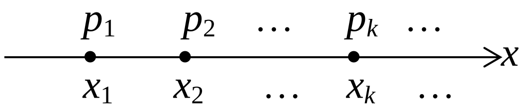
X	x_1	x_2	…	x_k	…
$p_k = P(X = x_k)$	p_1	p_2	…	p_k	…

Функция распределения дискретной случайной величины:
$F_X(x) = P(X < x) = \sum\limits_{k:\, x_k < x} p_k$; график $F_X(x)$ – ступенчатая линия со скачками p_k в точках x_k $(k = 1,2,\ldots)$:



В каждой точке $x \neq x_k$ числовой оси функция распределения $F_X(x)$ непрерывна; в точках x_k она непрерывна слева, величина скачка справа равна p_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

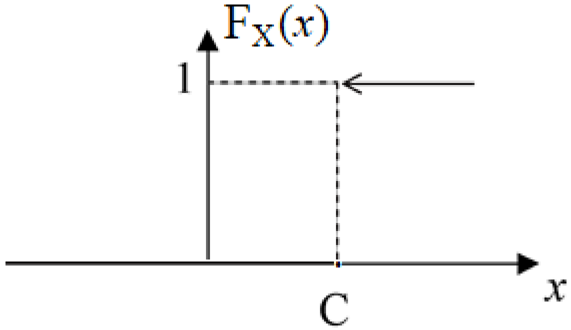
Дискретную случайную величину можно интерпретировать как систему точечных масс на числовой оси: в точках с абсциссами $x = x_k$ сосредоточены точечные массы p_k, сумма которых равна 1.



В каждой точке x числовой оси функция распределения $F_X(x)$ равна сумме точечных масс, абсциссы которых находятся *левее точки* x.

Примеры

(а) Всякую неслучайную постоянную C (C = const) можно интерпретировать как случайную величину, принимающую единственное значение C с вероятностью, равной 1 (*вырожденное распределение*): $\begin{cases} P(X = C) = 1; \\ P(X \neq C) = 0. \end{cases}$

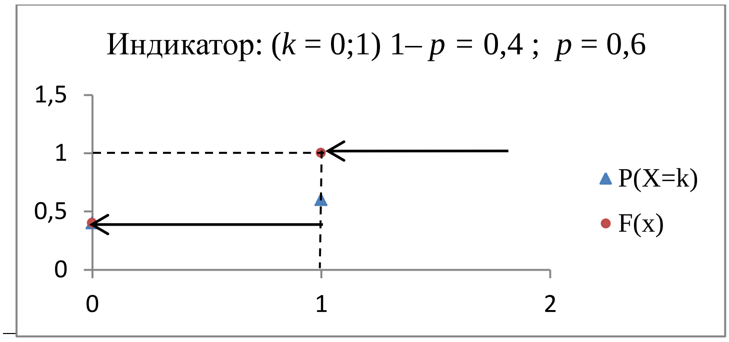


(б) Пусть при проведении опыта E событие A происходит с вероятностью p, а противоположное ему событие $\bar{A}$ с вероятностью $1 - p$. Случайная величина X_A – индикатор события A:

$$X_A = \begin{cases} 1, & A \\ 0, & \bar{A} \end{cases}$$

X_A	0	1
P	$1 - p$	p

Ниже приведены графики $F_X(x)$ и $P(X = k)$ для индикатора (k = 0;1) при $p = 0{,}6$.



(в) В партии из 10 изделий 3 бракованных и 7 небракованных. Наудачу берется выборка из 5 изделий. Случайная величина X – число бракованных изделий в выборке. Записать закон распределения случайной величины X, построить график функции распределения $\mathrm{F_X}(x)$.

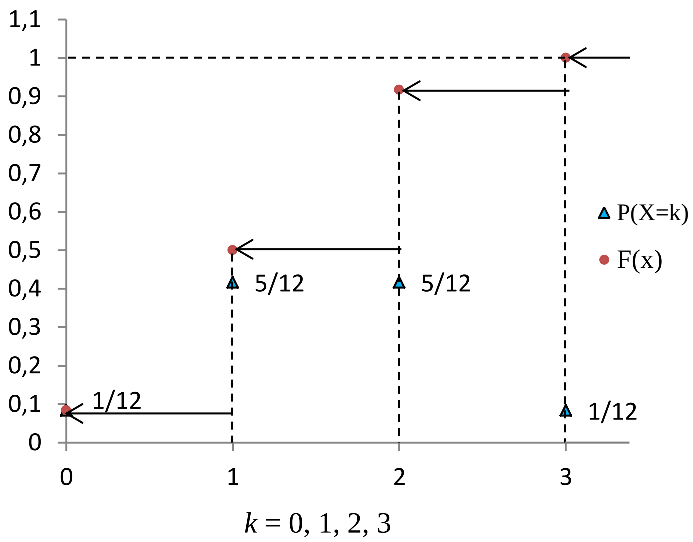
Решение

Множество возможных значений случайной величины X: {0, 1, 2, 3},

$$\mathrm{P(X} = k) = \frac{C_3^k C_7^{5-k}}{C_{10}^5} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

X	0	1	2	3
$p_k = \mathrm{P(X} = k)$	1/12	5/12	5/12	1/12

$$\mathrm{P(X} = k) = p_k\,; \;\; \mathrm{F_X}(x) = \sum_{k:\, x_k < x} p_k\,.$$



1.13. Математическое ожидание одномерной дискретной случайной величины

Пусть задана дискретная случайная величина X, множество ее возможных значений $\{ x_1, x_2, \ldots\ x_k, \ldots\}$ (счетное или конечное), закон распределения: $p_k = P(X = x_k)$ $(\sum_k p_k = 1)$.

def| Математическим ожиданием MX дискретной случайной величины X называется *сумма произведений возможных значений* x_k *случайной величины* X *на вероятности* p_k, *соответствующие этим значениям*: $MX = \sum_k x_k p_k$.

Математическое ожидание обозначают MX, M(X), M[X], m_X.
Если множество возможных значений бесконечно, то MX – числовой ряд. Математическое ожидание MX существует и равно сумме ряда если этот ряд абсолютно сходится, в противном случае математическое ожидание не существует.
Заметим, что математическое ожидание – *среднее значение* случайной величины X:

$$x_{min}\sum_k p_k \le \sum_k x_k p_k \le x_{max}\sum_k p_k \Rightarrow \left[\sum_k p_k = 1\right] \Rightarrow x_{min} \le \sum_k x_k p_k \le x_{max}.$$

Математическое ожидание – взвешенное среднее значение случайной величины X, веса значений x_k – соответствующие вероятности p_k .
Если интерпретировать дискретную случайную величину как систему точечных масс, то MX – абсцисса центра масс этой системы:

$$x_{центра\ масс} = \sum_k x_k p_k / \sum_k p_k = \left[\sum_k p_k = 1\right] = MX.$$

def| (*функция дискретной случайной величины*)

Пусть дана дискретная случайная величина X и функция φ, которая определена на множестве ее возможных значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$.
Функция случайной величины X – это случайная величина $Y = \varphi(X)$, которая принимает значение $y_k = \varphi(x_k)$, когда X принимает значение x_k $(k = 1,2,\ldots)$:

$$\forall k\ (X = x_k) \Rightarrow (Y = y_k).$$

T| Теорема о математическом ожидании функции дискретной случайной величины

Пусть задана случайная величина X: { x_1, x_2, … x_k,…}, $p_k = P(X = x_k)$, и пусть $Y = \varphi(X)$ – функция случайной величины X,

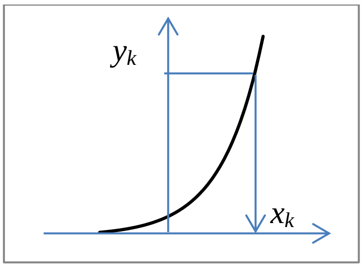
$$\text{тогда } MY = \sum_k \varphi(x_k) p_k$$

Док| (*доказательство*)

а) φ – взаимно однозначна,

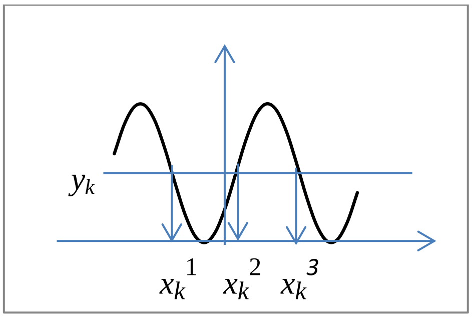
прообраз каждого y_k – одноэлементное множество $\{x_k\}$,

$$\forall k \ (X = x_k) = (Y = y_k),$$



откуда $MY = \sum_k y_k P(Y = y_k) = \left[P(Y = y_k) = P(X = x_k) = p_k\right] = \sum_k \varphi(x_k) p_k$.

б) φ – не взаимно однозначна, прообраз каждого y_k – не одноэлементное множество: $\{x_k^1; x_k^2; \ldots; x_k^m\}$



$$(Y = y_k) = (X = x_k^1) \cup (X = x_k^2) \cup \ldots \cup (X = x_k^m)$$

$$MY = \sum_k y_k P(Y = y_k) =$$

$$= \left[\ P(Y = y_k) = P((X = x_k^1) \cup (X = x_k^2) \cup \ldots \cup (X = x_k^m))\ \right] = \sum_i \varphi(x_i) p_i \ .$$

Некоторые свойства математического ожидания MX

(1) MC = C, где C – неслучайная константа P(X = C) =1:

$$MC = C \cdot P(X = C) = C$$

(2) $M(CX) = C \cdot MX$ здесь $Y = \varphi(X) = CX$

$$M(CX) = \sum_k \varphi(x_k) p_k = \sum_k C x_k p_k = C \cdot MX$$

(3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$

Предполагается, что все три математических ожидания существуют (свойство 3 будет доказано далее).

Обобщение: $M \sum_i X_i = \sum_i M(X_i)$.

1.14. Дисперсия дискретной случайной величины

Пусть задана дискретная случайная величина X: $\{ x_1, x_2, \dots x_k, \dots \}$, закон распределения $p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_k)$ $(\sum_k p_k = 1)$.

Запишем математическое ожидание функции $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2$ случайной величины X: $\mathrm{MY} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \sum_k (x_k - \mathrm{MX})^2 p_k$ (см. п.1.13. – теорема о математическом ожидании функции случайной величины).

$\underline{def|}$ Дисперсией DX дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания MX:

$$\mathrm{DX} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2.$$

Дисперсия DX – мера рассеяния значений случайной величины относительно ее математического ожидания MX. Наряду с дисперсией ($\mathrm{DX} \geq 0$), мерой рассеяния служит также *стандартное отклонение* $\sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{\mathrm{DX}}$ (другое название σ_{X} – среднее квадратическое отклонение). Заметим, что σ_{X} имеет размерность ту же, что случайная величина X.

Некоторые свойства дисперсии DX

(1) Формула для вычисления дисперсии: $\mathrm{DX} = \mathrm{MX}^2 - (\mathrm{MX})^2$.

$\mathrm{DX} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \mathrm{M}(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{XMX} + (\mathrm{MX})^2) = \mathrm{M}(\mathrm{X})^2 - 2(\mathrm{MX})^2 + (\mathrm{MX})^2 =$
$= \mathrm{MX}^2 - (\mathrm{MX})^2$.

(2) $\mathrm{DC} = 0$ т.к. $\mathrm{MC}^2 - (\mathrm{MC})^2 = \mathrm{C}^2 - \mathrm{C}^2 = 0$, где C – неслучайная константа.

Иначе: Пусть X = C (C= const) – случайная величина P(X = C) = 1 (вырожденное распределение),

тогда $\mathrm{DX} = \mathrm{M}(\mathrm{X} - \mathrm{MX})^2 = \mathrm{M}(\mathrm{C} - \mathrm{MC})^2 = \mathrm{M}(\mathrm{C} - \mathrm{C})^2 = 0$, т.е. DC = 0

(3) $\mathrm{D}(\mathrm{X} + \mathrm{C}) = \mathrm{DX}$ (*дисперсия не меняется при сдвиге случайной величины на постоянную*):

$\mathrm{D}(\mathrm{X} + \mathrm{C}) = \mathrm{M}((\mathrm{X}+\mathrm{C}) - \mathrm{M}(\mathrm{X}+\mathrm{C}))^2 = \mathrm{M}(\mathrm{X}+\mathrm{C}-\mathrm{MX}-\mathrm{MC})^2 = \mathrm{M}(\mathrm{X}-\mathrm{MX})^2 =$
$= \mathrm{DX}$

(4) $D(CX) = C^2\, DX$, действительно,
$D(CX) = M(CX)^2 - (MCX)^2 = C^2(MX^2 - (MX)^2) = C^2 \cdot DX$.

Замечание

Рассмотрим выражение $M(X - t\, MX)^2 = M(X^2 - 2t\, X\, MX + t^2(MX)^2) =$
$= MX^2 + (t^2 - 2t)\, (MX)^2$

Это выражение, рассматриваемое как функция t, достигает минимума при $t = 1$, т.е. квадрат отклонения X от $t \cdot MX$ минимален при $t = 1$ и равен дисперсии $DX = M(X - MX)^2$.

1.15. Производящая функция вероятностей целочисленной случайной величины; вычисление математического ожидания и дисперсии с помощью производящей функции

$\underline{def|}$ Дискретную случайную величину X будем называть *целочисленной*, если множество ее возможных значений – целые неотрицательные числа $0, 1, 2, \ldots$.

$\underline{def|}$ *Производящей функцией вероятностей* данной целочисленной случайной величины X: $p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$, $(k = 0,1,2,\ldots)$ называется функция $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad (0 \le z \le 1)$.

Производящую функцию вероятностей называют также просто производящей функцией или производящей функцией распределения.

Заметим, что $\varphi(1) = \sum\limits_{k} p_k = 1$; степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ сходится в области $|z| \le 1$ и $\varphi(z)$ – сумма степенного ряда: $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$.

Коэффициенты p_k степенного ряда равны $p_k = \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0,1,2,\ldots)$, где $\varphi^{(k)}(0)$ – k-я производная функции $\varphi(z)$ в точке 0.

Таким образом, задание $\varphi(z)$ однозначно определяет вероятности $p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$, т.е. закон распределения случайной величины X.

Итак, пусть дана целочисленная случайная величина X, имеющая математическое ожидание MX и дисперсию DX и пусть $\varphi(z)$ – производящая функция распределения этой случайной величины.

Дифференцируя ряд $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ почленно, получаем

$$\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k z^{k-1} \qquad (*).$$

Полагая в $(*)$ $z = 1$, получаем: $\varphi'(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k k$ = MX – математическое ожидание случайной величины X.

Далее, умножим на z обе части (*): $z\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k z^k$,

продифференцируем это равенство $(z\varphi'(z))' = (\sum_{k=0}^{\infty} p_k k z^k)'$,

получим $\varphi'(z) + z\varphi''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k^2 z^{k-1}$.

Полагая в последнем равенстве $z = 1$, имеем: $\varphi'(1) + \varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k k^2$.

Поскольку $\sum_{k=0}^{\infty} p_k k^2 = MX^2$, $DX = MX^2 - (MX)^2$ и $(MX)^2 = (\varphi'(1))^2$,

получаем, $DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi''(1))^2$.

Итог: $\begin{cases} MX = \varphi'(1) \\ DX = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi''(1))^2. \end{cases}$

Замечания

1. Производящую функцию $\varphi(z)$ можно представить как математическое ожидание функции z^X: $M(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \varphi(z)$ (см. п.1.13 – теорема о математическом ожидании функции дискретной случайной величины).

2. $\varphi(0) = 0$ $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(z) \geq 0 \Rightarrow \varphi(z)$ – неубывающая функция на $0 \leq z \leq 1$, причем $0 \leq \varphi(z) \leq 1$.

1.16. Распределения целочисленных случайных величин: Бернулли, биномиальное, Пуассона, геометрическое

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые часто встречающиеся распределения *целочисленных случайных величин,* множество возможных значений которых – целые неотрицательные числа $0, 1, 2, \ldots$.

(1) *Распределение Бернулли*

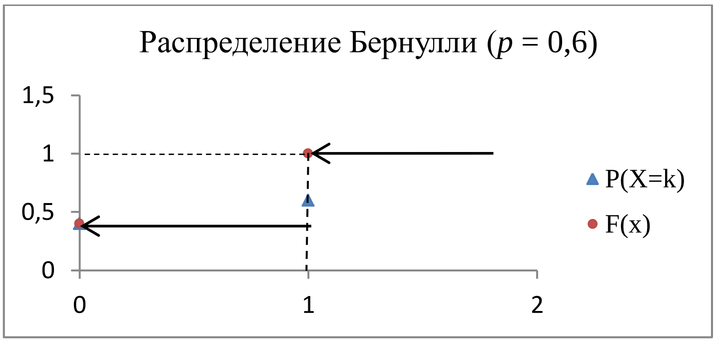
X	0	1
P	$q = 1 - p$	p

$p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = p^k (1-p)^{1-k}$, $(k = 0,1)$ *–распределение Бернулли*

$$\mathrm{MX} = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p; \quad \mathrm{DX} = \mathrm{MX}^2 - (\mathrm{MX})^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Производящая функция: $\varphi(z) = \sum_k p_k z^k = q\cdot z^0 + p\cdot z = pz + q.$

Случайная величина X – индикатор события (см. п. 1.12., пример (б)) подчиняется распределению Бернулли.



(2) *Биномиальное распределение*

Случайная величина X – число успехов при проведении n независимых испытаний, p – вероятность успеха в каждом испытании, $q = 1 - p$ – вероятность неуспеха (см.п.1.8.);
множество возможных значений с.в. X: $\{0, 1, \ldots, n\}$.
Закон распределения с.в. X – *биномиальное распределение*:

$$p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = b_k(n,p) = C_n^k\, p^k q^{n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$ – условие нормировки.

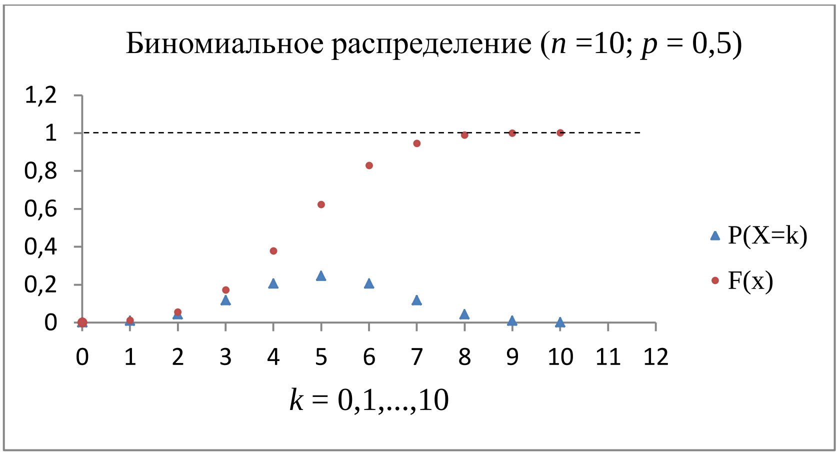
Производящая функция: $\varphi(z) = \sum_k p_k z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k q^{n-k} = (pz+q)^n$;

$\varphi'(z) = np(pz+q)^{n-1}$;

$\varphi''(z) = n(n-1)p^2(pz+q)^{n-2}$.

MX= $\varphi'(1) = np$,

DX=$\varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi''(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq$.



Замечание

Случайная величина X, подчиняющаяся биномиальному распределению $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – сумма n случайных величин X_i,

где $X_i = \begin{cases} 1, & A - \text{успех} \\ 0, & \bar{A} - \text{неуспех} \end{cases}$ – индикатор успеха в i-м испытании.

$MX_i = p \Rightarrow MX = \sum_{i=1}^{n} MX_i = np$ (мат. ожидание суммы случайных величин равно сумме их мат. ожиданий см. п.1.13.).

(3) *Распределение Пуассона*

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a} \quad (a > 0) \quad k = 0, 1, 2, \ldots \text{– \textit{распределение Пуассона}}$$

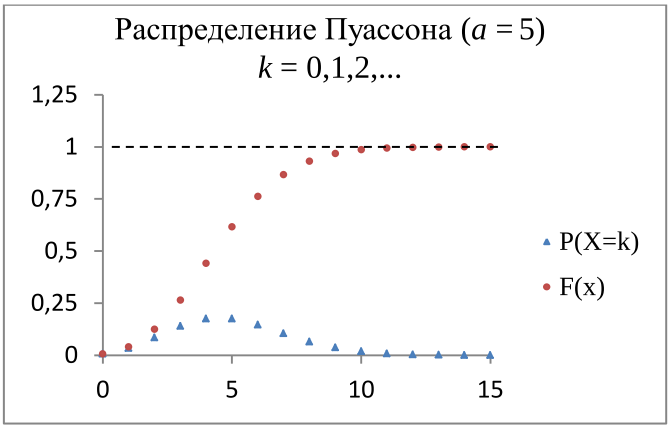
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} = e^{-a}e^{a} = 1 \text{– условие нормировки.}$$

Производящая функция: $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{a^k}{k!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{a^k}{k!} =$

$$= e^{-a}e^{az} = e^{a(z-1)}.$$

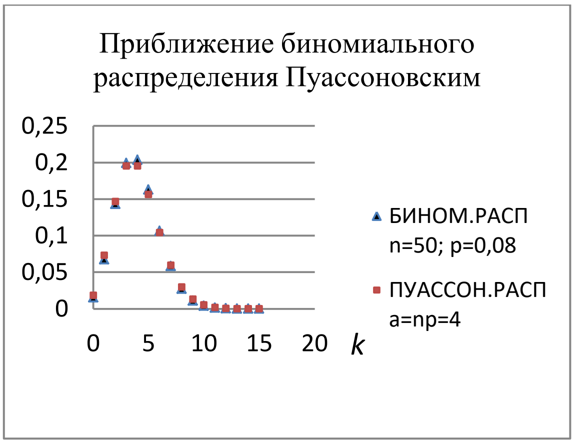
$$\varphi'(z) = a\,e^{a(z-1)}\ ; \quad \varphi''(z) = a^2 e^{a(z-1)}.$$

MX= $\varphi'(1) = a$, DX=$\varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi''(1))^2 = a^2 + a - a^2 = a$.



Замечание

Распределение Пуассона – асимптотическое (предельное) для биномиального распределения при выполнении условий теоремы Пуассона (см. п. 1.9.).



(4) *Геометрическое распределение*

Случайная величина X – число независимых *испытаний до первого успеха*, p – вероятность успеха в каждом испытании, $q = 1 - p$ – вероятность неуспеха; множество возможных значений X: $\{1, 2, \ldots\}$.

Закон распределения:

$$p_k = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = q^{k-1}p \qquad k = 1, 2, \ldots \text{ –}$$

– *геометрическое распределение*.

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p\frac{1}{1-q} = 1 \text{ – условие нормировки.}$$

Производящая функция: $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(q^{k-1}p)\, z^k = pz\sum_{k=1}^{\infty}(qz)^{k-1} = \dfrac{pz}{1-qz}$

$$\varphi'(z) = \frac{p}{(1-qz)^2} = p(1-qz)^{-2}; \quad \varphi''(z) = -2(1-qz)^{-3}(-q)p = \frac{2pq}{(1-qz)^3}$$

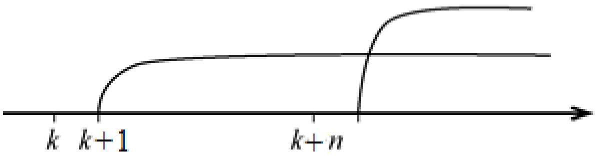
$$\mathrm{MX} = \varphi'(1) = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{DX} = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi''(1))^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Замечание (о “нестарении” геометрического распределения)

Заметим $\mathrm{P}(\mathrm{X} > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} q^{i-1}p = p\dfrac{q^k}{1-q} = q^k.$

Вычислим условную вероятность $\mathrm{P}(\mathrm{X} > k+n \mid \mathrm{X} > k) =$



$$= \frac{\mathrm{P}((\mathrm{X} > k+n)\bigcap(\mathrm{X} > k))}{\mathrm{P}(\mathrm{X} > k)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X} > k+n)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} > k)} = \frac{q^{k+n}}{q^k} = q^n$$ – *не зависит от* k,

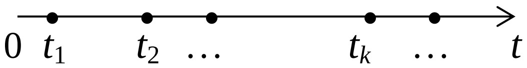
отсутствует последействие (имеет место “*нестарение*” *геометрического распределения*).

Если считать с.в. X временем безотказной работы до первого отказа, измеряемым в часах (целым неотрицательным числом), то *свойство “нестарения”* геометрического распределения означает, что вероятность работающему устройству проработать еще n часов не зависит от момента начала отсчета или от того, сколько времени (k часов) до этого момента устройство уже проработало.

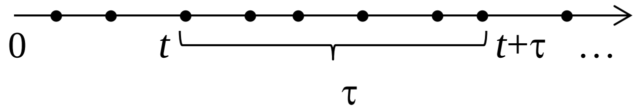
1.17. Простейший (стационарный пуассоновский) поток однородных событий

Потоком событий называют последовательность *однородных событий*, которые происходят одно за другим в некоторые, вообще говоря, случайные моменты времени t_n. Например: моменты времени редких ночных телефонных звонков, регистрируемых АТС; моменты регистрации счетчиком α- частиц при радиоактивном распаде; моменты времени отражения радиоволн от метеорных следов в выделенной области верхнего слоя атмосферы и т.п. Заметим, что термин *однородное событие* в понятии поток событий не означает “случайное событие”.

Последовательность *однородных событий* будем изображать на оси $0t$ последовательностью точек $\{t_n\}$ моментов времени, в которые, одно за другим, эти события происходят:



Введем целочисленную случайную величину $X_{(t;\, t+\tau)}$, такую что случайное событие $(X_{(t;\, t+\tau)},= k\,)$ означает: в течение времени от t до $t+\tau$ поступает k событий потока ($k = 0,1,2,\ldots$).



Простейшим (стационарным пуассоновским) называют поток событий, обладающий следующими <u>*тремя свойствами*</u>: *стационарностью, ординарностью, отсутствием последействия*.

def (1) *Стационарность*:

$$P(X_{(t;\, t+\tau)}=k) = P(X_{(0;\tau)}=k) = \left[\text{обозначим } X_{(0;\tau)}= X_\tau\right] = P(X_\tau=k) = P_k(\tau)$$

Вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от длительности τ этого промежутка и от числа k и не зависит от t – начала его отсчета.

def| (2) *Ординарность*:

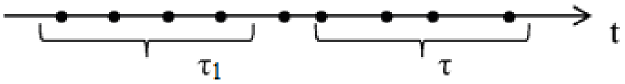
Обозначим $P_{>1}(\Delta\tau) = P_2(\Delta\tau) + P_3(\Delta\tau) + \ldots + P_i(\Delta\tau) + \ldots$ – вероятность того, что на промежутке длительностью $\Delta\tau$ произойдет более одного события потока и λ (λ = const) – интенсивность потока (среднее число событий потока, поступающих в единицу времени).

Ординарность означает выполнение условий:

$$\begin{cases} P_{>1}(\Delta\tau) = o(\Delta\tau) \\ P_1(\Delta\tau) = \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau) \qquad \left[o(\Delta\tau): \ \frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \underset{\Delta\tau\to 0}{\longrightarrow} 0\right] \end{cases}$$

Вероятность наступления за элементарный (малый) промежуток времени $\Delta\tau$ более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события.

def| (3) *Отсутствие последействия*:



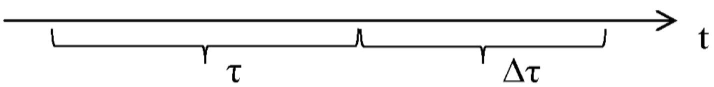
$$\forall\, m \; P((X_{\tau_1} = m) \cap (X_\tau = k)) = P(X_{\tau_1} = m) \cdot P(X_\tau = k) -$$

– *независимость* потока на непересекающихся промежутках времени. Иначе говоря, вероятность появления k событий на любом промежутке времени длительностью τ не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

Поставим задачу: найти распределение $P(X_\tau = k) = P_k(\tau)$ ($k = 0,1,2,\ldots$) для простейшего (стационарного пуассоновского) потока.

Решение:

Фиксируем величину τ и создадим приращение $\Delta\tau$ ($\Delta\tau$ – переменная).



(а) Положим $k = 0$ и найдем $P_0(\tau)$.

$P_0(\tau+\Delta\tau) = \left[\text{свойство (3)}\right] = P_0(\tau)\, P_0(\Delta\tau)$;

$P_0(\Delta\tau) = 1 - P_{\geq 1}(\tau) = \left[\text{свойство (2)}\right] = 1 - \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)$;

$P_0(\tau+\Delta\tau) = P_0(\tau)\,(1 - \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau))$;

$$P_0(\tau+\Delta\tau) - P_0(\tau) = -\lambda\, P_0(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau).$$

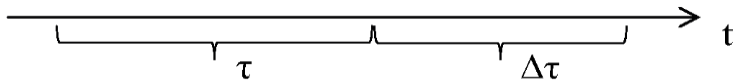
Разделим обе части на $\Delta\tau$ и перейдем к пределу при $\Delta\tau \to 0$ (учтем $\frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \underset{\Delta\tau\to 0}{\longrightarrow} 0$), получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\,P_0(\tau)}{d\tau} = -\lambda\, P_0(\tau) \;\Rightarrow\; P_0(\tau) = P_0(0)\, e^{-\lambda\tau}.$$

Начальное условие $P_0(0) = \lim\limits_{\tau\to 0} P_0(\tau) = \lim\limits_{\tau\to 0}(1-\lambda\tau + o(\tau)) = 1.$

Таким образом, $P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$.

(б) Найдем теперь $P_k(\tau)$ для $k \geq 0$.



Имеем: $P_k(\tau+\Delta\tau) = P_k(\tau)\, P_0(\Delta\tau) + P_{k-1}(\tau)\, P_1(\Delta\tau) +$

$$+ \underbrace{P_{k-2}(\tau)\, P_2(\Delta\tau) + \ldots + P_0(\tau)\, P_k(\Delta\tau)}_{o(\Delta\tau)}$$

$P_k(\tau+\Delta\tau) = P_k(\tau)(1-\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + P_{k-1}(\tau)\,(\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + o(\Delta\tau);$

$P_k(\tau+\Delta\tau) - P_k(\tau) = P_k(\tau)\,(-\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + P_{k-1}(\tau)\,(\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)) + o(\Delta\tau).$

Разделим обе части на $\Delta\tau$ и перейдем к пределу при $\Delta\tau \to 0$, получим дифференциально-разностное уравнение:

$$\frac{d\,P_k(\tau)}{d\tau} = \lambda(\,P_{k-1}(\tau) - P_k(\tau)) \qquad (*)$$

Положим $P_{-1}(\tau) \equiv 0$, тогда уравнение справедливо для всех $k \geq 0$.

Умножим обе части $(*)$ на z^k и просуммируем по k от 0 до $+\infty$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d\,P_k(\tau)}{d\tau} z^k = \lambda\,(\sum_{k=0}^{\infty} P_{k-1}(\tau)\, z^k - \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\tau)\, z^k);$$

заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k(\tau)\, z^k = \varphi(\tau; z)$ – производящая функция.

Таким образом, в результате преобразований уравнения $(*)$ получаем дифференциальное уравнение для производящей функции $\varphi(\tau; z)$:

$$\varphi'_\tau(\tau; z) = \lambda(z\,\varphi(\tau; z) - \varphi(\tau; z)),$$

$$\varphi'_\tau(\tau; z) = \lambda(z-1)\,\varphi(\tau; z) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\tau; z) = \varphi(0; z)\, e^{\lambda(z-1)\tau}.$$

Начальное условие $\varphi(0; z) = P_0(0)\, z^0 + P_1(0)\, z^1 + \ldots$,

условие нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0) = 1$; показано, что $P_0(0) = 1$,

поэтому $P_1(0) = P_2(0) = \ldots = 0$, следовательно $\varphi(0; z) = 1$.

Имеем, $\varphi(\tau; z) = e^{\lambda(z-1)\tau} = e^{\lambda\tau(z-1)}$ – производящая функция распределения Пуассона с параметром $\lambda\tau$ (см. п. 1.16.), поэтому

$$P_k(\tau) = P(X_\tau = k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \qquad (k = 0,1,2,\ldots) –$$

– распределение Пуассона.