

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**На правах рукописи**

**Гельгор Александр Леонидович**

**СИНТЕЗ СПЕКТРАЛЬНО-ЭФФЕКТИВНЫХ  
МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ  
ОГРАНИЧЕНИЙ НА ВЕЛИЧИНУ ПИК-ФАКТОРА КОЛЕБАНИЙ И  
КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА**

**Специальность 05.12.04 – Радиотехника, в том числе  
системы и устройства телевидения**

**Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

**Научный руководитель – Попов Евгений Александрович  
кандидат технических наук, доцент**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ – 2010**

## Оглавление

|  |    |
|--|----|
| Оглавление .....   | 2  |
| Список обозначений .....   | 4  |
| Введение.....  | 6  |
| Глава 1. Характеристики однокомпонентных спектрально-эффективных сигналов..... | 12 |
| 1.1. Сигналы со сглаженными огибающими.....                                    | 12 |
| 1.2. Пик-фактор сигналов со сглаженными огибающими .....                       | 14 |
| 1.3. Спектральные характеристики сигналов со сглаженными огибающими .....      | 18 |
| 1.4. Прием сигналов со сглаженными огибающими .....                            | 25 |
| 1.5. Задача синтеза сигналов со сглаженными огибающими .....                   | 28 |
| 1.6. Многокомпонентные сигналы .....   | 41 |
| 1.7. Цель работы и постановка задач исследований.....                          | 47 |
| Глава 2. Характеристики многокомпонентных сигналов .....                       | 49 |
| 2.1. Пик-фактор многокомпонентных сигналов .....                               | 49 |
| 2.2. Спектральные характеристики многокомпонентных сигналов .....              | 56 |
| 2.3. Прием многокомпонентных сигналов .....                                    | 58 |
| 2.4. Задача синтеза многокомпонентных сигналов .....                           | 60 |
| 2.5. Выводы по главе 2.....  | 73 |
| Глава 3. Оптимизация формы огибающей многокомпонентных сигналов ....           | 74 |
| 3.1. Оптимизация при наличии ограничений на пик-фактор колебаний 74            |    |
| 3.1.1. Оптимизация для сигналов с ФМ-4 .....                                   | 76 |
| 3.1.2. Оптимизация для сигналов с ФМ-2 .....                                   | 85 |
| 3.1.3. Сравнение результатов оптимизации для сигналов с ФМ-2 и ФМ-4.....       | 92 |
| 3.2. Оптимизация при наличии ограничений на корреляционные свойства.....       | 94 |
| 3.2.1. Оптимизация при ограничении на МКГК.....                                | 95 |

|   |     |
|---|-----|
| 3.2.2. Оптимизация при ограничении на МКПК .....  | 103 |
| 3.2.3. Сравнение результатов оптимизации при ограничениях на МКГК и МКПК.....                       | 112 |
| 3.3. Оптимизация при наличии ограничений на пик-фактор и корреляционные свойства .....              | 113 |
| 3.4. Выводы по главе 3.....   | 114 |
| Глава 4. Формирование и прием многокомпонентных сигналов .....                                      | 116 |
| 4.1. Метод формирования многокомпонентных сигналов .....  | 116 |
| 4.2. Демодулятор многокомпонентных сигналов.....  | 123 |
| 4.3. Имитационная модель системы передачи информации .....  | 130 |
| 4.4. Помехоустойчивость алгоритмов приема многокомпонентных сигналов .....                          | 136 |
| 4.5. Характеристики эффективности использования многокомпонентных сигналов .....                    | 140 |
| 4.6. Выводы по главе 4.....   | 142 |
| Заключение .....  | 144 |
| Список литературы .....   | 148 |
| Приложение 1. Текст программы решения оптимизационной задачи на языке программирования Matlab ..... | 152 |

## Список обозначений

- $\Lambda_{rq}$  – функционал отношения правдоподобия;
- $\Pi$  – пик-фактор колебаний;
- $\beta_F$  – удельные затраты полосы;
- $\beta_E$  – удельные энергетические затраты;
- $\varphi$  – фаза, определяемая видом сигнального созвездия;
- $\kappa_g, \kappa_p$  – значение ограничения на максимальный коэффициент групповой либо парциальной корреляции соответственно;
- $\mu$  – коэффициент, характеризующий затухание сигнала при распространении;
- $\rho$  – значение ограничения на пик-фактор;
- $\omega_0$  – несущая частота;
- $\gamma$  – скорость спада энергетического спектра в области внеполосных излучений,  $G(\omega) \sim 1/\omega^\gamma$ ;
- $A$  – амплитуда, определяемая видом сигнального созвездия;
- $E$  – операция математического ожидания;
- $E_a$  – энергия огибающей на тактовом интервале;
- $E_b$  – энергия, затрачиваемая на передачу одного бита информации;
- $F_a(\omega)$  – спектр вещественной огибающей  $a(t)$ ;
- $\Delta F$  – ширина полосы занимаемых частот;
- $G(\omega)$  – энергетический спектр;
- $KG$  – значение коэффициента групповой корреляции;
- $KP$  – значение коэффициента парциальной корреляции;
- $L$  – количество компонент в многокомпонентном сигнале;
- $M$  – размерность сигнального созвездия;
- $N$  – количество тактовых интервалов в последовательности сигналов одной компоненты;
- $N_0$  – физическая спектральная плотность средней мощности шумов;
- $P_{\text{п}}$  – пиковая мощность;

$P_{\text{cp}}$  – средняя мощность;

$R$  – скорость передачи информации, измеряемая в бит/с;

$T$  – период следования символов канального алфавита;

$a(t)$  – огибающая;

$f_0$  – несущая частота;

$\bar{g}$  – средняя вредность излучения;

$g(\omega)$  – функция вредности излучения;

$h, h_0$  – отношение сигнал/шум при фиксированной средней и пиковой мощностях соответственно;

$k, l$  – номер тактового интервала ( $0, 1, \dots, N - 1$ );

$m$  – число членов разложения в ряд Фурье;

$p, d$  – номер компоненты ( $1, 2, \dots, L$ );

$r, q$  – номер символа канального алфавита ( $1, 2, \dots, M$ ).

## Введение

**Актуальность темы диссертации.** Повышение эффективности систем передачи информации по радиоканалам было и остаётся одной из основных задач, стоящих перед разработчиками приёмо-передающей аппаратуры. Обычно для количественного описания эффективности вводят удельные параметры: *удельные затраты полосы*  $\beta_F = \Delta F/R$ , где  $\Delta F$  – ширина полосы занимаемых частот,  $R$  – скорость передачи информации, измеряемая в бит/с, и *удельные энергетические затраты*  $\beta_E = E_b/N_0$ , где  $E_b$  – энергия, затрачиваемая на передачу одного бита информации, а  $N_0$  – спектральная плотность средней мощности шумов.

На современном этапе развития программно-аппаратных средств формирования и обработки сигналов удается использовать такие достижения в области повышения эффективности систем передачи информации как многоуровневая модуляция, помехоустойчивое кодирование и перемежение. Однако с каждым годом возрастает потребность в передаче все более скоростных потоков информации, при этом уже задействованы практически все пригодные для радиосвязи участки спектра: от десятков Гц до десятков ГГц. В этой связи не ослабевают попытки исследователей повышения эффективности использования отведенных существующим системам участков спектра, уже и без того достаточно загруженных. При этом наряду с такими мерами, как многократное использование частот за счет пространственно-временного уплотнения каналов, необходимо решать задачи оптимизации видов сигналов, методов модуляции и кодирования, приближая характеристики систем к потенциально возможным, обусловленным границей Шеннона [17].

В общем случае повышение эффективности связано с увеличением объёмов передаваемой информации за счёт и повышения скорости передачи и использования многопозиционных сигнально-кодовых конструкций, обеспечивая при этом приемлемую достоверность приёма. При этом чем меньше значения удельных затрат полосы частот и удельных энергетических затрат, тем выше эффективность системы.

Исторически первыми методами снижения удельных затрат полосы частот, по-видимому, следует считать фильтрацию традиционных сигналов с прямоугольной формой огибающей. При использовании фильтров больших порядков удаётся получить высокие значения удельных затрат полосы, однако возникающая при этом неуправляемая межсимвольная интерференция (МСИ) приводит к существенному ухудшению качества приёма [39], компенсация которого возможна лишь путём существенного увеличения удельных энергетических затрат.

Выбор формы сглаженной огибающей сигналов для снижения удельных затрат полосы частот как решение оптимизационной задачи, по-видимому, впервые был предложен в [3], когда в качестве критерия рассматривалась максимизация энергии в заданной полосе частот. При этом из-за наличия скачков огибающей на концах тактового интервала скорость спада энергетического спектра  $\gamma$  оказывалась невысокой. Указанный недостаток преодолён в [29], где была поставлена задача поиска формы огибающей, минимизирующей среднюю вредность излучения при дополнительном ограничении  $\mu_a$ . Огибающая на концах тактового интервала оказывалась равной нулю, однако пик-фактор  $\Pi$  сигналов с такими огибающими оказывался тем выше, чем сильнее ограничивалась  $\gamma$ .

Во второй половине XX века усилиями ряда отечественных и зарубежных исследователей возникло и стало активно развиваться новое направление, связанное с использованием в системах передачи дискретных сообщений нового класса сигналов, называемых спектрально-эффективные [10, 13]. Для таких сигналов характерны гладкие амплитудно-фазовые траектории, что приводит к высокой степени компактности спектра, т.е. малым удельным затратам полосы частот, а использование оптимальных или, даже, подоптимальных алгоритмов приёма позволяет получать приемлемые удельные энергетические затраты.

Для таких сигналов в [22, 25] получены оптимальные формы огибающих, когда по-прежнему минимизируется средняя вредность излучения и дополнительно ограничиваются пик-фактор и уровень управляемой МСИ как условие

на величину коэффициента корреляции  $K$ . Однако результаты были получены лишь для малой глубины МСИ и предельных значений  $\Pi$  и  $K$ . Таким образом, остается открытым вопрос, как изменится решение при увеличении глубины МСИ и вариации значений  $\Pi$  и  $K$ .

Удельные энергетические затраты, т.е., по существу, энергетическая эффективность используемых сигналов существенным образом зависит от выбранного метода приёма. Разумеется, наибольшей помехоустойчивостью обладает приём “в целом” всей передаваемой последовательности сигналов. Однако, зачастую, фактором, сдерживающим широкое применение такого метода, является его значительная сложность реализации. Ещё более актуальным становится этот фактор, когда алгоритм приёма содержит переборную составляющую. В этой связи представляет интерес, с одной стороны, использование различных более простых подоптимальных алгоритмов, а с другой – формирование сигналов, для которых наряду со свойствами спектральной эффективности также присущ ряд особенностей, обеспечивающих упрощение алгоритмов приёма.

**Объектом** исследования в работе являются спектрально-эффективные многокомпонентные сигналы.

**Предметом исследования** являются удельная спектральная и энергетическая эффективности многокомпонентных спектрально-эффективных сигналов.

**Целью работы** является синтез спектрально-эффективных многокомпонентных сигналов, обеспечивающих заданную спектральную и энергетическую эффективность при наличии ограничений на величину пик-фактора колебаний и корреляционные характеристики.

Для достижения указанной цели требуется решить следующие **задачи**.

1. Постановка и решение оптимизационной задачи поиска огибающей случайной последовательности многокомпонентных сигналов, имеющих заданную скорость спада энергетического спектра вне занимаемой полосы частот при ограничениях на величину пик-фактора и коэффициент групповой либо парциальной корреляции.

2. Оценка точности численного метода синтеза огибающей многокомпонентных сигналов для различных значений заданных ограничений на скорость спада энергетического спектра, величину пик-фактора и коэффициент групповой либо парциальной корреляции.

3. Разработка алгоритма когерентного приема “в целом” с поэлементным принятием решений на основе алгоритма Витерби.

4. Построение имитационной модели формирования, передачи и приема многокомпонентных сигналов с оценкой помехоустойчивости приема.

5. Определение шенноновской эффективности использования полученных многокомпонентных сигналов.

**Структура диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и одного приложения.

Во введении характеризуется актуальность, новизна, научная и практическая значимость, цель работы, формулируются научная задача и основные вопросы исследований, проводится краткий анализ работ, посвященных данной теме, перечислены основные научные и практические результаты, выносимые на защиту, и раскрывается содержание основных разделов работы и структура исследований.

В первой главе рассматриваются традиционные однокомпонентные сигналы со сглаженными огибающими, для которых повышение спектральной эффективности связано с выбором формы огибающей. Определяются их временные и спектральные характеристики. Приводится алгоритм приема таких сигналов, оптимальный по критерию максимума отношения правдоподобия. Освещается вопрос синтеза огибающей однокомпонентных сигналов, как решение вариационной задачи. Для задачи синтеза огибающей при заданных условиях на внеполосные излучения предложено численное решение, когда искомая огибающая раскладывается в усеченный ряд Фурье, и вариационная задача сводится к поиску минимума функции многих переменных.

Далее вводятся в рассмотрение многокомпонентные сигналы, объясняется принцип их построения, определяются корреляционные характеристики таких сигналов.

Заканчивается глава постановкой цели и задач исследований.

Во второй главе определяются временные и спектральные характеристики многокомпонентных сигналов. Рассматриваются вопросы приема многокомпонентных сигналов. Далее описывается постановка оптимизационной задачи синтеза огибающей многокомпонентных сигналов при наличии ограничений на пик-фактор и коэффициент парциальной либо групповой корреляции. Как и в случае однокомпонентных сигналов, предлагается решение такой задачи путем сведения ее к задаче поиска минимума функции многих переменных. Освещаются вопросы достижения заданной точности и выбора начального приближения при численном решении вариационной задачи.

В третьей главе представлены решения поставленной задачи для различных комбинаций ограничений и исходных параметров. В первом разделе исследовано влияние на решение ограничения пик-фактора колебаний, во втором – максимального коэффициента групповой, либо парциальной корреляций, наконец, в третьем разделе определено влияние одновременного ограничения и пик-фактора и коэффициента групповой корреляции. Во всех случаях рассмотрены решения для количества компонент  $L = 2, 4, 8, 16, 32$  и скорости спада энергетического спектра  $\gamma = 6, 10, 14$ .

Точность решения, полученного для числа членов разложения  $m$ , считается приемлемой, если среднеквадратическое отклонение от решения для числа членов разложения  $m + 1$  не превосходит 0,001. Поиск решений ведется для  $m \leq 40$ .

В четвертой главе рассмотрены квадратурные методы формирования и демодуляции многокомпонентных сигналов. Предложен алгоритм приема многокомпонентных сигналов на основе алгоритма Витерби. Описана имитационная модель системы передачи информации, использующая многокомпонентные сигналы и позволяющая оценить помехоустойчивость приема.

На основе спектральных характеристик и полученных кривых помехоустойчивости оценена эффективность использования многокомпонентных сигналов с точки зрения близости к границе Шеннона.

В заключении дана обобщенная итоговая оценка диссертационной работы и охарактеризованы научные результаты, представляющие теоретический и практический интерес.

В приложении представлен текст программы решения оптимизационной задачи на языке программирования Matlab.

# Глава 1. Характеристики однокомпонентных спектрально-эффективных сигналов

В первой главе рассматриваются традиционные однокомпонентные сигналы со сглаженными огибающими, для которых повышение спектральной эффективности связано с выбором формы огибающей. Определяются их временные и спектральные характеристики. Приводится алгоритм приема таких сигналов, оптимальный по критерию максимума отношения правдоподобия. Освещается вопрос синтеза огибающей многокомпонентных сигналов, как решение вариационной задачи. Для задачи синтеза огибающей при заданных условиях на внеполосные излучения предложено численное решение, когда искомая огибающая раскладывается в усеченный ряд Фурье, и вариационная задача сводится к поиску минимума функции многих переменных.

Далее вводятся в рассмотрение многокомпонентные сигналы, объясняется принцип их построения, определяются корреляционные характеристики таких сигналов.

Заканчивается глава постановкой цели и задач исследований.

## 1.1. Сигналы со сглаженными огибающими

Исторически первыми методами повышения спектральной эффективности были методы, основанные на применении сглаженных форм огибающих на каждом тактовом интервале. Такой подход позволяет добиться значительного повышения компактности спектра.

Рассмотрим случайную последовательность  $y_N$ , состоящую из  $N$  независимых сигналов с произвольным  $M$ -элементным сигнальным созвездием, сформированных на несущей частоте  $f_0$  и следующих с тактовым интервалом  $T$

$$y_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} a(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_r^{(k)}), \quad -T/2 \leq t \leq -T/2 + NT, \quad (1.1)$$

где  $a(t)$  – ограниченная на интервале  $[-T/2, T/2]$  огибающая,  $A_r^{(k)}$ ,  $\varphi_r^{(k)}$  – амплитуда и фаза, соответствующие  $k$ -му символу канального алфавита и определяе-

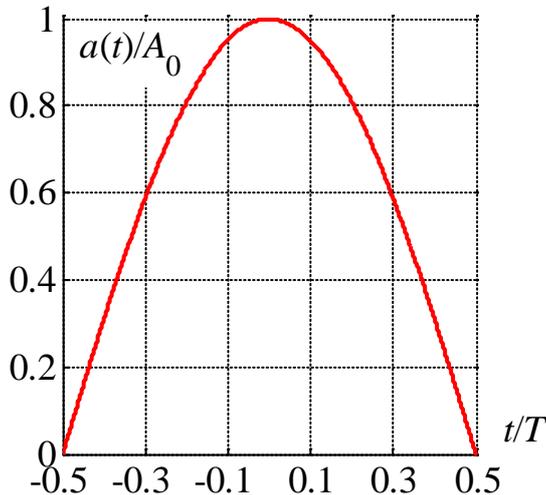
мые сигнальным созвездием, причем нижний индекс  $r = 1, 2, \dots, M$  соответствует номеру символа в канальном алфавите, а верхний индекс  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  отражает принадлежность к соответствующему тактовому интервалу, при этом  $A_r^{(k)} \in [0, 1]$  и  $\varphi_r^{(k)} \in [-\pi, \pi]$ . В частности, для созвездия ФМ-4 имеем:  $A_r^{(k)} = 1$ ,  $\varphi_r^{(k)} = -3\pi/4 + r\pi/2$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$ . Форма огибающей  $a(t)$  длительности  $T$  выбирается, исходя из требований к компактности энергетического спектра случайной последовательности таких сигналов.

Как известно, традиционные сигналы с прямоугольной формой вещественной огибающей  $a(t)$  не обеспечивают высокое значение спектральной эффективности. В литературе [12, 30] известен ряд сглаженных форм огибающей, обеспечивающих существенное повышение спектральной эффективности по сравнению с прямоугольной формой. К таким огибающим относятся, к примеру: огибающая вида  $\cos(x)$  (рис. 1.1а)

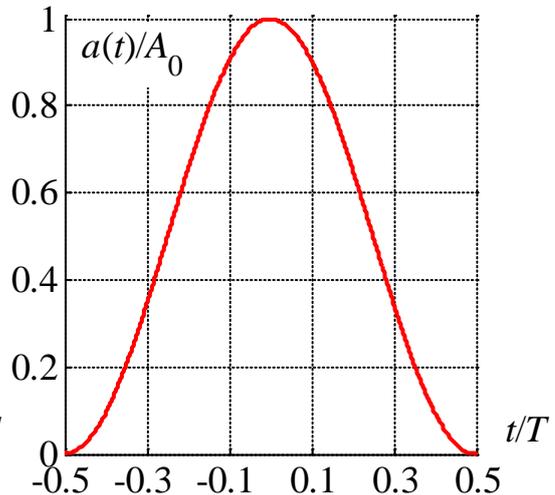
$$a(t) = A_0 \cos(\pi t/T), \quad -T/2 \leq t \leq T/2; \quad (1.2)$$

огибающая вида  $\cos^2(x)$  или “приподнятый косинус” (рис. 1.1б)

$$a(t) = A_0 \cos^2(\pi t/T), \quad -T/2 \leq t \leq T/2. \quad (1.3)$$



а)

Рис. 1.1а. Огибающая вида  $\cos(x)$ 

б)

Рис. 1.1б. Огибающая вида  $\cos^2(x)$ 

Рассмотрим основные характеристики последовательностей сигналов (1.1) со сглаженными огибающими во временной и спектральной областях.

## 1.2. Пик-фактор сигналов со сглаженными огибающими

Пик-фактор колебаний  $\Pi$  определяется отношением пиковой  $P_{\text{п}}$  к средней  $P_{\text{ср}}$  мощности:

$$\Pi = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{ср}}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\max\{y_N^2(t)\}}{\mathbf{E}\left\{\frac{1}{NT} \int_{-T/2}^{-T/2+NT} y_N^2(t) dt\right\}}, \quad (1.4)$$

где символ  $\mathbf{E}$  обозначает операцию математического ожидания, причем усреднение производится по всем возможным усеченным реализациям. Считая, что предел существует, рассмотрим отдельно числитель и знаменатель (1.4). В числителе получим:

$$P_{\text{п}} = \max\{y_N^2(t)\} = \max\{[A_r^{(k)} a(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_r^{(k)})]^2\} \leq \max\{a^2(t)\}.$$

В знаменателе перейдем от интегрирования по  $N$  тактовым интервалам к интегрированию по одному тактовому интервалу, при этом опустим верхний индекс амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} P_{\text{ср}} &= \mathbf{E}\left\{\frac{1}{NT} \int_{-T/2}^{-T/2+NT} y_N^2(t) dt\right\} = N\mathbf{E}\left\{\frac{1}{NT} \int_{-T/2}^{T/2} A_r^2 a^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi_r) dt\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} A_r^2 a^2(t) [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_r)] dt\right\}. \end{aligned}$$

Отбросим быстроосциллирующую составляющую, тогда

$$P_{\text{ср}} \approx \mathbf{E}\left\{\frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} A_r^2 a^2(t) dt\right\} = \frac{1}{2T} \mathbf{E}\{A_r^2\} \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t) dt.$$

Вводя обозначение для энергии огибающей на тактовом интервале

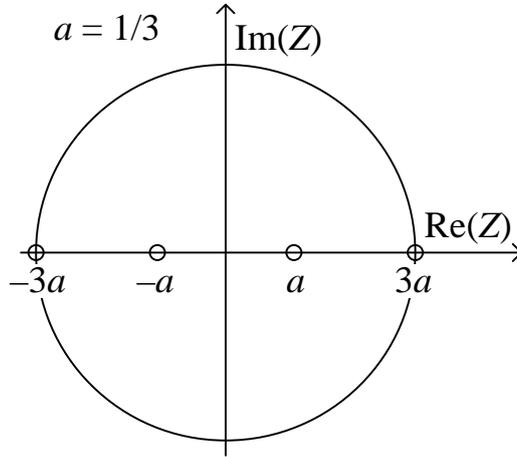
$$E_a = \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t) dt, \quad (1.5)$$

получим

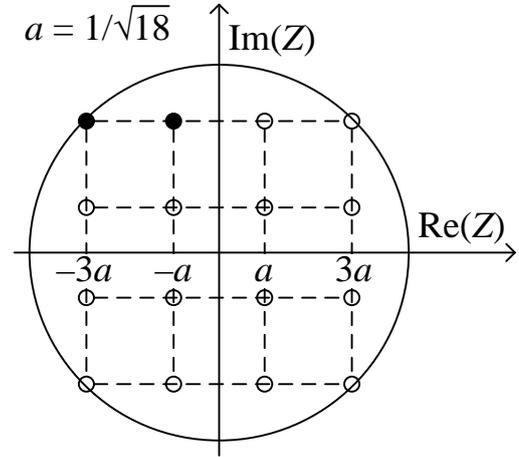
$$\Pi = \frac{2}{\mathbf{E}\{A_r^2\}} \frac{\max\{a^2(t)\}}{E_a / T}. \quad (1.6)$$

Понятно, что  $\mathbf{E}\{A_r^2\}$  и, следовательно, значение пик-фактора определяются видом сигнального созвездия. Рассмотрим два вида модуляции и, соответственно, сигнальных созвездий: амплитудно-фазовую (АФМ) и квадратурную

амплитудную (КАМ), рис. 1.2а–б соответственно. Будем считать, что число точек созвездия в каждом случае есть  $M$ , причем  $M = 2^n$ , где  $n$  – любое натуральное, для АФМ, и  $M = 2^{2n}$  – для КАМ.



а)

Рис. 1.2а. Созвездие АФМ,  $M = 4$ 

б)

Рис. 1.2б. Созвездие КАМ,  $M = 16$ 

Созвездие АФМ – это  $M$  точек, равномерно расположенных на интервале  $[-1, 1]$ , при этом амплитуда и фаза определяются следующими выражениями:

$$A_r = \left| 1 - (r-1) \frac{2}{M-1} \right|, \quad r = 1, 2, \dots, M,$$

$$\varphi_r = \begin{cases} 0, & 1 \leq r \leq M/2, \\ \pi, & M/2 < r \leq M. \end{cases}$$

Для одновременного определения амплитуды и фазы точек созвездий часто используют комплексные числа  $Z_r$ . При этом  $A_r = |Z_r|$  и  $\varphi_r = \arg(Z_r)$  или  $A_r \cos \varphi_r = \operatorname{Re}\{Z_r\}$  и  $A_r \sin \varphi_r = \operatorname{Im}\{Z_r\}$ . Например, для созвездия АФМ получим

$$Z_r = 1 - (r-1) \frac{2}{M-1}, \quad r = 1, 2, \dots, M. \quad (1.7)$$

Найдем математическое ожидание квадрата амплитуды  $\mathbf{E}\{A_r^2\}$  для АФМ с учетом равновероятного появления символов канального алфавита и, следовательно, значений амплитуды  $A_r$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{A_r^2\} &= \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M \left(1 - (r-1) \frac{2}{M-1}\right)^2 = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M \left(\frac{(M+1) - 2r}{M-1}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{M(M-1)^2} \sum_{r=1}^M ((M+1)^2 - 4(M+1)r + 4r^2) = \\
&= \frac{1}{M(M-1)^2} \left( M(M+1)^2 - 4(M+1) \sum_{r=1}^M r + 4 \sum_{r=1}^M r^2 \right).
\end{aligned}$$

Учитывая [4], что суммы равны соответственно

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

и

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1),$$

получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{A_r^2\} &= \frac{1}{M(M-1)^2} \left( M(M+1)^2 - 4(M+1) \frac{M}{2}(M+1) + 4 \frac{M}{6}(M+1)(2M+1) \right) = \\
&= \frac{1}{(M-1)^2} (M+1) \frac{M-1}{3} = \frac{M+1}{3(M-1)}.
\end{aligned}$$

Окончательное выражение для пик-фактора сигналов с АФМ имеет следующий вид:

$$\Pi_{\text{АФМ}} = 2 \frac{3(M-1)}{M+1} \frac{\max\{a^2(t)\}}{E_a/T}. \quad (1.8)$$

Заметим, что у этого выражения есть предел при устремлении  $M$  к бесконечности:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Pi_{\text{АФМ}} = \lim_{M \rightarrow \infty} 2 \frac{3(M-1)}{M+1} \frac{\max\{a^2(t)\}}{E/T} = 6 \frac{\max\{a^2(t)\}}{E_a/T}. \quad (1.9)$$

Созвездие КАМ можно представить как произведение двух одинаковых созвездий АФМ (назовем их порождающими) в разных квадратурах. Для сохранения созвездия в пределах окружности единичного радиуса точки порождающих созвездий должны располагаться на интервале  $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ , и количество точек в каждом из них должно быть  $\sqrt{M}$ . Квадрат амплитуды любой

точки созвездия КАМ можно разложить на сумму квадратов амплитуд порождающих созвездий:  $A_r^2 = A_{rc}^2 + A_{rs}^2$ . Тогда получим:

$$\mathbf{E}\{A_{rc}^2\} = \mathbf{E}\{A_{rs}^2\} = \frac{\sqrt{M} + 1}{6(\sqrt{M} - 1)},$$

$$\mathbf{E}\{A_r^2\} = \mathbf{E}\{A_{rc}^2\} + \mathbf{E}\{A_{rs}^2\} = \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)}.$$

Следовательно, значения пик-фактора для АФМ и КАМ совпадают, если  $M_{\text{АФМ}}^2 = M_{\text{КАМ}}$ :

$$\Pi_{\text{КАМ}} = 2 \frac{3(\sqrt{M} - 1) \max\{a^2(t)\}}{\sqrt{M} + 1 E_a / T}. \quad (1.10)$$

Предельное значение  $\Pi_{\text{КАМ}}$  при устремлении  $M$  к бесконечности совпадает с (1.9).

Определим значения пик-фактора последовательности сигналов (1.1) при использовании различных огибающих. Для сигналов с прямоугольной огибающей и огибающими (1.2), (1.3)

$$\max\{a^2(t)\} = A_0^2,$$

а в табл. 1.1 приведены результаты вычисления энергий указанных огибающих.

Табл. 1.1

| Вид огибающей    | $E_a$          |
|------------------|----------------|
| Прямоугольная    | $A_0^2 T$      |
| Вида $\cos(x)$   | $(1/2)A_0^2 T$ |
| Вида $\cos^2(x)$ | $(3/8)A_0^2 T$ |

В табл. 1.2 приведены значения пик-фактора для АФМ и КАМ для разных  $M$  и различных огибающих, рассчитанные по выражениям (1.8), (1.9) и (1.10).

Табл. 1.2

| Вид огибающей    | Количество точек сигнального созвездия       |   |   |              |
|------------------|--|---|---|--------------|
|                  | $M_{\text{АФМ}} = 2$<br>$M_{\text{КАМ}} = 4$ | $M_{\text{АФМ}} = 4$<br>$M_{\text{КАМ}} = 16$ | $M_{\text{АФМ}} = 16$<br>$M_{\text{КАМ}} = 256$ | $M = \infty$ |
| Прямоугольная    | 2,00   | 3,60  | 5,29  | 6,00         |
| Вида $\cos(x)$   | 4,00   | 7,20  | 10,59   | 12,00        |
| Вида $\cos^2(x)$ | 5,33   | 9,60  | 14,12   | 16,00        |

Из анализа представленных в табл. 1.2 данных следует, что, во-первых, переход к сглаженным огибающим приводит к значительному возрастанию пик-фактора, например, для  $M_{\text{КАМ}} = 4$  (т.е. модуляции ФМ-4) при переходе от прямоугольной огибающей к огибающей вида  $\cos^2(x)$  пик-фактор возрастает в 2,67 раза. Во-вторых, с увеличением размерности созвездия пик-фактор также возрастает, причем максимальное увеличение может составить 300%. В-третьих, при фиксированной размерности созвездия  $M$  сигналы с КАМ обладают меньшим пик-фактором по сравнению с АФМ. Например, для огибающей вида  $\cos(x)$  и  $M = 4$  при переходе от КАМ к АФМ пик-фактор возрастает в 1,8 раза.

### 1.3. Спектральные характеристики сигналов со сглаженными огибающими

Основной спектральной характеристикой является полоса занимаемых частот, определяемая по энергетическому спектру. Для случайной последовательности сигналов энергетический спектр  $G(\omega)$  определяется как

$$G(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \mathbf{E} \left\{ |S_N(\omega)|^2 \right\}, \quad (1.11)$$

где  $S_N(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_N(t) \exp(-j\omega t) dt$  – спектр усеченной  $N$ -элементной реализации

(1.1), а математическое ожидание  $\mathbf{E} \left\{ |S_N(\omega)|^2 \right\}$  определяется путем усреднения

по всем возможным таким реализациям.

При передаче сообщений по частотно-ограниченным каналам количественно спектральная эффективность может быть оценена по значению  $\beta_F = \Delta F/R$  и, следовательно, зависит от способа определения ширины полосы  $\Delta F$ .

Наиболее часто определяют необходимую полосу частот как полосу  $\Delta F = \Delta F_\varepsilon$ , в которой сосредоточено  $\varepsilon$  процентов от полной энергии. Например, в соответствии с рекомендацией МККР [1] определяют полосу частот  $\Delta F_{99\%}$ , в пределах которой сосредоточено 99% энергии сигнала. Применительно к относительно узкополосным сигналам, у которых центральная частота  $\omega_0 = 2\pi f_0 \gg 1/T$ , где  $T$  – период следования информационных символов, полоса частот  $\Delta F_\varepsilon$  определяется из условия

$$\frac{\varepsilon}{100\%} = \int_{\omega_0 - \pi \Delta F_\varepsilon}^{\omega_0 + \pi \Delta F_\varepsilon} G(\omega) d\omega / \int_0^\infty G(\omega) d\omega.$$

Характеристика  $\Delta F_\varepsilon$  может в некоторых случаях оказаться недостаточной для оценки эффективности применения тех или иных сигналов, поскольку у различных видов сигналов при величинах  $\Delta F_\varepsilon$ , незначительно отличающихся друг от друга, скорость спада внеполосных излучений может быть существенно различной. Поэтому также определяют ширину полосы частот по значению полосы  $\Delta F_\sigma$ , при котором спектральная плотность мощности  $G(\omega)$  для отстройки  $|\omega - \omega_0| \geq \pi \Delta F_\sigma$  ниже максимального значения не менее чем на  $\sigma$  дБ [7]. Такое определение полосы частот используется, например, в случае применения сигналов с ограниченной полосой частот в многоканальных системах с частотным уплотнением каналов, когда уровень внеполосных излучений определяет величину межканальных помех.

В отдельных случаях важна не только мощность  $G(\pi \Delta F_\sigma)$  при фиксированном значении  $\sigma$ , но и то, какое значение будет иметь  $G(\omega)$  при увеличении расстройки в  $k$  раз. Можно найти асимптотическое поведение энергетического спектра  $G(\omega) \sim 1/\omega^\gamma$ , характеризующее скорость спада внеполосных излучений, и оценить значение  $G(\omega)$  при величине отстройки  $\pi k \Delta F_\sigma$ .

Следует отметить, что сигналы, имеющие более высокую эффективность в смысле критерия  $\Delta F_\varepsilon$ , могут иметь меньшую эффективность в смысле критерия  $\Delta F_\sigma$  или критерия скорости спада внеполосных излучений, поэтому при рассмотрении конкретных видов сигналов необходимо, вообще говоря, приводить все перечисленные характеристики.

Обратимся к определению энергетического спектра последовательности сигналов (1.1). Представим спектр  $S_N(\omega)$  усеченной  $N$ -элементной реализации в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 S_N(\omega) &= \int_{-T/2}^{-T/2+NT} \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} a(t-kT) \cos(\omega_0 t + \varphi_r^{(k)}) \exp(-j\omega t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{-T/2+NT} \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} a(t-kT) (\exp(j\omega_0 t + j\varphi_r^{(k)}) + \exp(-j\omega_0 t - j\varphi_r^{(k)})) \exp(-j\omega t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-T/2}^{-T/2+NT} \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} \exp(j\varphi_r^{(k)}) a(t-kT) \exp(-j(\omega - \omega_0)t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-T/2}^{-T/2+NT} \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} \exp(-j\varphi_r^{(k)}) a(t-kT) \exp(j(-\omega - \omega_0)t) dt \right] = \\
 &= \frac{1}{2} [S_N(\omega - \omega_0) + S_N^*(\omega + \omega_0)].
 \end{aligned}$$

С учетом относительной узкополосности рассматриваемых сигналов представим (1.11) в виде

$$G(\omega) = G_+(\omega) + G_-(\omega),$$

где

$$G_+(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4NT} \mathbf{E} \left\{ |S_N(\omega - \omega_0)|^2 \right\},$$

$$G_-(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4NT} \mathbf{E} \left\{ |S_N(\omega + \omega_0)|^2 \right\}.$$

Поменяем местами знак суммы и интеграл в  $S_N(\omega - \omega_0)$ :

$$S_N(\omega - \omega_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-T/2}^{-T/2+NT} A_r^{(k)} \exp(j\varphi_r^{(k)}) a(t-kT) \exp(-j(\omega - \omega_0)t) dt.$$

Заменяя переменную  $x = t - kT$ , имеем:

$$S_N(\omega - \omega_0) = \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} \exp(j\varphi_r^{(k)}) \exp(-j(\omega - \omega_0)kT) \int_{-T/2}^{T/2} a(x) \exp(-j(\omega - \omega_0)x) dx.$$

Наконец

$$S_N(\omega - \omega_0) = F_a(\omega - \omega_0) \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} \exp(j\varphi_r^{(k)}) \exp(-j(\omega - \omega_0)kT),$$

где

$$F_a(\omega - \omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \exp(-j(\omega - \omega_0)t) dt \quad (1.12)$$

есть спектр вещественной огибающей  $a(t)$ , смещенный на величину  $\omega_0$ . Тогда математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{|S_N(\omega - \omega_0)|^2\} &= |F_a(\omega - \omega_0)|^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-j(\omega - \omega_0)(k-l)T) \times \\ &\times \mathbf{E}\{A_r^{(k)} A_q^{(l)} \exp(j(\varphi_r^{(k)} - \varphi_q^{(l)}))\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Будем считать, что в сигналах используется КАМ с размерностью созвездия  $M$ . Рассмотрим подробнее выражение под знаком математического ожидания:

$$\begin{aligned} A_r^{(k)} \exp(j\varphi_r^{(k)}) A_q^{(l)} \exp(-j\varphi_q^{(l)}) &= (Z_{rc}^{(k)} + jZ_{rs}^{(k)})(Z_{qc}^{(l)} - jZ_{qs}^{(l)}) = \\ &= Z_{rc}^{(k)} Z_{qc}^{(l)} - jZ_{rc}^{(k)} Z_{qs}^{(l)} + jZ_{rs}^{(k)} Z_{qc}^{(l)} + Z_{rs}^{(k)} Z_{qs}^{(l)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_{rc}^{(k)} &= A_r^{(k)} \cos(\varphi_r^{(k)}), \quad Z_{rs}^{(k)} = A_r^{(k)} \sin(\varphi_r^{(k)}), \\ Z_{qc}^{(l)} &= A_q^{(l)} \cos(\varphi_q^{(l)}), \quad Z_{qs}^{(l)} = A_q^{(l)} \sin(\varphi_q^{(l)}). \end{aligned}$$

Понятно, что  $Z_{rc}^{(k)}$ ,  $Z_{rs}^{(k)}$ ,  $Z_{qc}^{(l)}$  и  $Z_{qs}^{(l)}$  – это точки созвездий АФМ, порождающих рассматриваемое созвездие КАМ. При этом их значения составляют дискретный набор:  $Z_{rc} = Z_{rs} = (\sqrt{M} + 1 - 2r) / \sqrt{2}(\sqrt{M} - 1)$ ,  $r = 1, 2, \dots, \sqrt{M}$ . В силу симметричности этого набора относительно нуля получаем, что:

$$\mathbf{E}\{Z_{rc}^{(k)} Z_{qs}^{(l)}\} = \mathbf{E}\{Z_{rs}^{(k)} Z_{qc}^{(l)}\} = 0, \text{ для всех } k, l,$$

$$\mathbf{E}\{Z_{rc}^{(k)} Z_{qc}^{(l)}\} = \mathbf{E}\{Z_{rs}^{(k)} Z_{qs}^{(l)}\} = 0, \text{ для } k \neq l.$$

Тогда, используя результаты, полученные при вычислении пик-фактора, имеем

$$\mathbf{E}\{Z_{rc}^{(k)} Z_{qc}^{(l)}\} = \mathbf{E}\{A_{rc}^2\} = \frac{\sqrt{M} + 1}{6(\sqrt{M} - 1)}, \quad k = l,$$

$$\mathbf{E}\{Z_{rs}^{(k)} Z_{qs}^{(l)}\} = \mathbf{E}\{A_{rs}^2\} = \frac{\sqrt{M} + 1}{6(\sqrt{M} - 1)}, \quad k = l.$$

Таким образом, (1.13) упрощается:

$$\mathbf{E}\left\{|S_N(\omega - \omega_0)|^2\right\} = N |F_a(\omega - \omega_0)|^2 \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)}.$$

Итак, энергетический спектр в области положительных частот равен

$$G_+(\omega) = \frac{1}{4T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} |F_a(\omega - \omega_0)|^2, \quad (1.14)$$

и аналогичный вид энергетический спектр имеет в области  $\omega < 0$ :

$$G_-(\omega) = \frac{1}{4T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} |F_a(\omega + \omega_0)|^2.$$

Легко показать, что для сигналов с АФМ в (1.14) необходимо лишь заменить  $\sqrt{M}$  на  $M$ . Из (1.14) видно, что энергетический спектр последовательностей сигналов (1.1) с АФМ и КАМ определяется лишь огибающей  $a(t)$ .

Используя (1.14), получим выражения для энергетического спектра последовательностей сигналов (1.1) в случае использования прямоугольной огибающей и огибающих вида (1.2), (1.3).

Для прямоугольной огибающей:

$$G_+(\omega) = \frac{A_0^2 T}{4} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \frac{\sin^2(\Delta\omega T / 2)}{(\Delta\omega T / 2)^2}, \quad (1.15)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ .

Для огибающей (1.2):

$$G_+(\omega) = \frac{A_0^2 T}{4} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \frac{4\pi^2}{(\pi^2 - (\Delta\omega T)^2)^2} \cos^2(\Delta\omega T / 2). \quad (1.16)$$

Для огибающей (1.3):

$$G_+(\omega) = \frac{A_0^2 T}{4} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \frac{4\pi^4}{((2\pi)^2 - (\Delta\omega T)^2)^2} \frac{\sin^2(\Delta\omega T / 2)}{(\Delta\omega T / 2)^2}. \quad (1.17)$$

На рис. 1.3 представлены энергетические спектры (1.15), (1.16) и (1.17) – кривые (1), (2) и (3) соответственно.

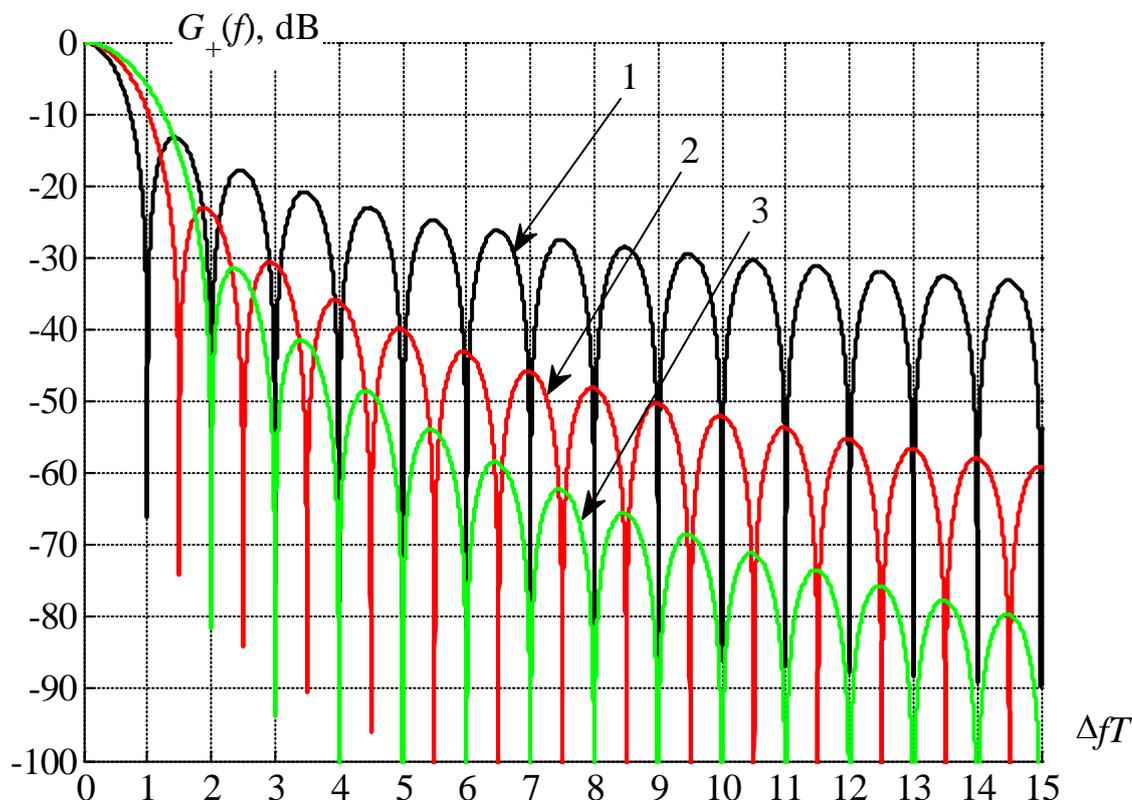


Рис. 1.3. Энергетические спектры последовательностей сигналов (1.1) с различными огибающими

Спектры реальных сигналов могут несколько отличаться от (1.14), причем как в меньшую, так и в большую сторону. Это может повлиять на результат определения полосы частот по уровню внеполосных излучений. Например, на рис. 1.3 для кривой 2 полоса  $\Delta F_{-30 \text{ дБ}} \sim 2,25/T$ , однако для реального сигнала выбросы в центре третьего лепестка могут привести к значению  $\Delta F_{-30 \text{ дБ}} \sim 3,00/T$ . Предлагается разрешение подобной неоднозначности путем учета огибающей энергетического спектра. Для построения огибающей будем соединять все соседние локальные максимумы отрезками прямых (в логарифмическом масштабе) [2]. В областях, где прямые проходят ниже энергетического спектра (центральные части лепестков, особенно, главного), огибающая устанавливается равной исходной кривой. На рис. 1.4 представлены энергетический спектр

(1.16) – кривая (1) и его огибающая – кривая (2). В дальнейшем при вычислении полосы частот по уровню внеполосных излучений всегда будем учитывать такие огибающие энергетических спектров.

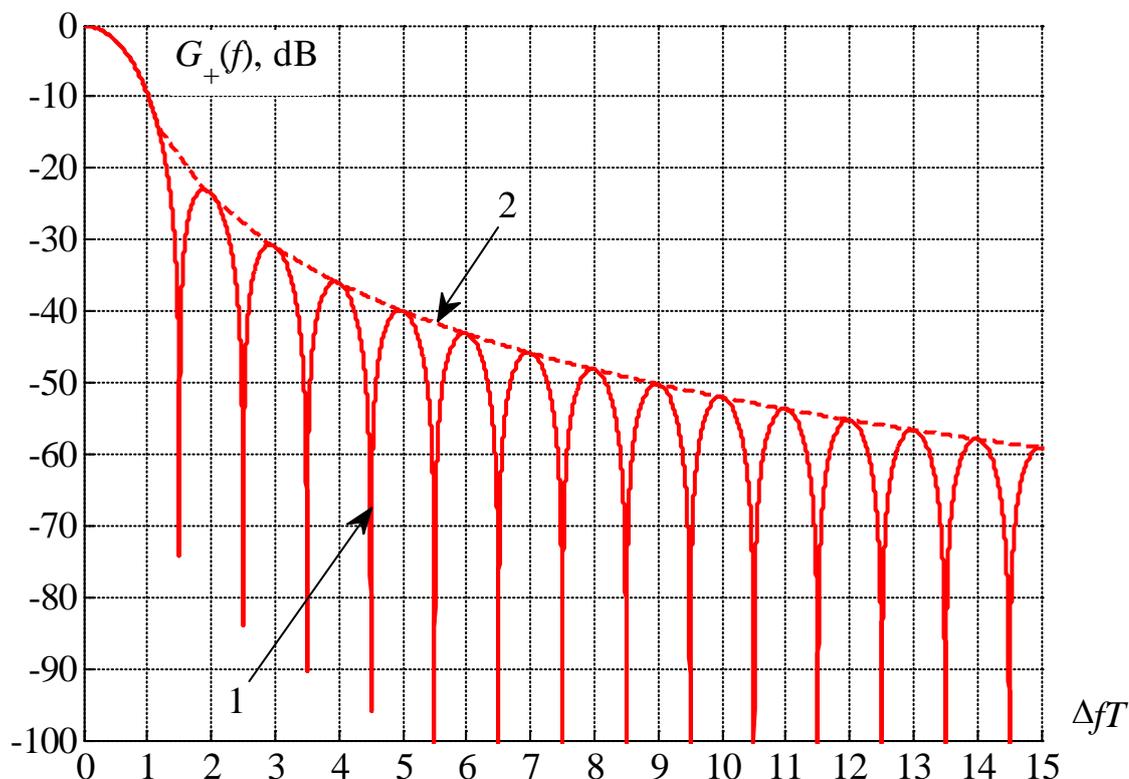


Рис. 1.4. Энергетический спектр (1.16) и его огибающая

Рассчитанные двумя способами (по критерию заданной концентрации энергии и по критерию заданного уровня внеполосных излучений), значения нормированной (в единицах  $1/T$ ) полосы занимаемых частот для последовательностей сигналов (1.1) для различных форм огибающих сведены в табл. 1.3.

Табл. 1.3

| Вид огибающей    | $\Delta F_{95\%}T$ | $\Delta F_{99\%}T$ | $\Delta F_{-40 \text{ дБ}}T$ | $\Delta F_{-60 \text{ дБ}}T$ |
|------------------|--------------------|--------------------|------------------------------|------------------------------|
| Прямоугольная    | 4,15               | 20,57              | 63,66                        | >100                         |
| Вида $\cos(x)$   | 1,82               | 2,36               | 10,04                        | 31,64                        |
| Вида $\cos^2(x)$ | 2,23               | 2,82               | 6,51                         | 13,74                        |

Из анализа кривых на рис. 1.3 и данных табл. 1.3 следует, что, во-первых, переход к сглаженным огибающим приводит к значительному сужению полосы частот (определяемой тем или иным образом), занимаемой последовательностью сигналов. Например, при переходе от прямоугольной огибающей к огибающей вида  $\cos(x)$  полоса частот по критерию 99% концентрации энергии в полосе уменьшается с 20,57 до 2,36, т.е. в 8,7 раза. Во-вторых, при рассмотрении различных критериев определения полосы частот предложенные сглаженные огибающие всегда дают лучший результат, чем прямоугольная. Так, при рассмотрении полосы частот по уровню 95% концентрации энергии в полосе лучший результат показывает огибающая вида  $\cos(x)$ , а при рассмотрении полосы частот по уровню  $-60$  дБ – огибающая вида  $\cos^2(x)$ .

#### 1.4. Прием сигналов со сглаженными огибающими

Задача приема сводится к принятию решения относительно того, какой комбинации символов исходного сообщения соответствует поступившая на вход устройства обработки реализация процесса  $x(t)$ , причем в условиях наличия аддитивного шума

$$x(t) = \mu s_r(t) + n(t),$$

где  $\mu$  – коэффициент, характеризующий затухание сигнала при распространении,  $s_r(t)$  – полезный сигнал ( $r = 1, 2, \dots, M$ ),  $M$  – количество возможных реализаций полезного сигнала, совпадающее с размерностью сигнального созвездия,  $n(t)$  – аддитивная помеха. Как правило, важно получить алгоритм приема, обеспечивающий минимум средней вероятности ошибок. При равенстве априорных вероятностей используемых сигналов (равновероятное распределение символов канального алфавита) такой алгоритм совпадает с алгоритмом, оптимальным по критерию максимума отношения правдоподобия: регистрируется  $s_r(t)$ , если для всех  $r \neq q$  ( $r, q = 1, 2, \dots, M$ ) справедливо неравенство

$$\Lambda_{rq} > 1,$$

где  $\Lambda_{rq}$  – функционал отношения правдоподобия. Рассматривая в качестве аддитивной помехи нормальный случайный процесс с равномерным энергетическим спектром и используя разложение Карунена – Лоэва, можно получить [5]:

$$\Lambda_{rq}(\mathbf{x}) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \Lambda_{rq}^{(Z)}(\mathbf{x}) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{w^{(Z)}(\mathbf{x} / s_r)}{w^{(Z)}(\mathbf{x} / s_q)} = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}^Z \prod_{n=1}^Z \sigma_n \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^Z \frac{(x_n - \mu s_{r,n})^2}{\sigma_n^2} \right]}{\sqrt{2\pi}^Z \prod_{n=1}^Z \sigma_n \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^Z \frac{(x_n - \mu s_{q,n})^2}{\sigma_n^2} \right]}, \quad (1.18)$$

здесь  $w^{(Z)}(\mathbf{x}/s_r)$  –  $Z$ -мерная функция плотности вероятности случайного процесса на входе приемника (принятый сигнал) при условии наличия полезного сигнала  $s_r$ ,  $\sigma_n^2 = \text{const}(n) = N_0/2$ ,  $N_0$  – спектральная плотность средней мощности шумов. Можно показать [11, 14], что при когерентном приеме двоичных сигналов ( $M = 2$ ) по рассмотренному алгоритму вероятность ошибки определяется выражением:

$$p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = p_1 = p_2 = 1 - F \left( \sqrt{\frac{\mu^2 \Delta E_{12}}{2N_0}} \right),$$

где  $p_r$  ( $r = 1, 2$ ) – вероятность ошибочного приема при передаче сигнала  $s_r(t)$ ,  $F$  – функция Лапласа, т.е. интегральная функция стандартного (с нулевым средним и единичной дисперсией) нормального распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2 / 2) dt,$$

а  $\Delta E_{12}$  – евклидово расстояние между сигналами  $s_1$  и  $s_2$ :

$$\Delta E_{12} = \int_{-T/2}^{T/2} [s_2(t) - s_1(t)]^2 dt.$$

Таким образом, вероятность ошибки при прочих равных условиях определяется евклидовым расстоянием между используемыми сигналами. Учитывая монотонность функции Лапласа, получаем, что, чем больше такое евклидово расстояние, тем при меньших отношениях сигнал/шум можно добиваться заданного значения вероятности ошибок и, следовательно, тем выше энергетическая эффективность.

В случае многопозиционных сигналов ( $M > 2$ ) для вероятностей ошибок справедлива оценка, называемая аддитивной границей [8]:

$$p_r \leq \sum_{q=1}^M p_{rq}, \quad r \neq q, \quad (1.19)$$

здесь  $p_r$ , как и выше, – вероятность ошибочного приема при передаче сигнала  $s_r(t)$ ,  $p_{rq}$  – вероятность ошибки в двоичной системе, использующей сигналы  $s_r(t)$  и  $s_q(t)$ . Граница (1.19) допускает упрощение за счет огрубления:

$$p \leq (M - 1) \max_{(r,q)} p_{rq}.$$

где  $p$  – средняя вероятность ошибочного приема в  $M$ -ичной системе при передаче любого сигнала,  $\max_{(r,q)} p_{rq}$  – максимальная по всем парам  $(r, q)$  вероятность ошибки в двоичной системе с сигналами  $s_r(t)$  и  $s_q(t)$  ( $r \neq q$ ). В частности, из вышесказанного следует, что для канала с аддитивным белым гауссовским шумом при когерентном приеме

$$p \leq (M - 1) \left[ 1 - \min_{(r,q)} F \left( \sqrt{\frac{\mu^2 \Delta E_{rq}}{2N_0}} \right) \right]. \quad (1.20)$$

Из (1.20) видно, что энергетическая эффективность соответствующей  $M$ -ичной системы сигналов определяется минимальным евклидовым расстоянием  $\Delta E_{\min} = \min_{(r,q)} (\Delta E_{rq})$  по всем парам полезных сигналов.

Рассмотрим подробнее вычисление  $\Delta E_{\min}$  для сигналов, построенных на основе ФМ-4, т.е. с одним значением амплитуды и четырьмя различными значениями фазы. Учитывая, что  $A_r = A_q = 1$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\min} &= \min_{(r,q)} (\Delta E_{rq}) = \min_{(r,q)} \left( \int_{-T/2}^{T/2} [s_r(t) - s_q(t)]^2 dt \right) = \\ &= \min_{(r,q)} \left( \int_{-T/2}^{T/2} [a(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_r) - a(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_q)]^2 dt \right). \end{aligned}$$

Раскладывая выражение под интегралом и отбрасывая быстроосциллирующие составляющие, получим:

$$\Delta E_{\min} = \min_{(r,q)} \left( \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t) [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_r) - 2\cos(4\pi f_0 t + \varphi_r + \varphi_q) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2\cos(\varphi_r - \varphi_q) + 1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_q) \Big] dt) \approx \\
& \approx \min_{(r,p)} (1 - \cos(\varphi_r - \varphi_p)) \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t) dt = E_a,
\end{aligned}$$

т.е. минимальное евклидово расстояние для ФМ-4 совпадает с энергией огибающей.

Конечно, при фиксированной средней мощности переход в последовательности сигналов (1.1) от прямоугольной к сглаженной огибающей будет сопровождаться сохранением значения  $\Delta E_{\min}$ , и, следовательно, сохранением энергетической эффективности. При этом, как было показано выше, спектральная эффективность значительно повышается. Таким образом, использование сглаженных огибающих позволяет значительно повысить эффективность в целом, т.е. приблизиться к границе Шеннона. Однако на практике зачастую оказывается фиксированной пиковая мощность передатчика; более того, желательно иметь как можно меньшую величину пик-фактора для минимизации динамического диапазона и увеличения КПД конечных усилителей мощности. В этом случае выигрыш от использования сигналов со сглаженными огибающими не так очевиден – спектральная эффективность, разумеется, возрастает, однако пик-фактор возрастает и  $\Delta E_{\min}$  уменьшается.

## 1.5. Задача синтеза сигналов со сглаженными огибающими

Выше были рассмотрены сигналы с различными формами сглаженных огибающих, при этом никак не аргументировался выбор именно таких форм. В данном разделе подробно будет освещен вопрос синтеза оптимальных форм огибающих в соответствии с различными критериями оптимальности [28, 33].

Одним из часто используемых критериев оптимальности является критерий максимальной концентрации энергии в необходимой полосе частот  $\Delta F_n$  или в полосе  $\Delta F_{99\%}$ . Решение этой задачи для сигналов с конечной длительностью получено в [3]. При этом задача формулируется следующим образом: необходимо отыскать форму огибающей  $a(t)$ , при которой частичная энергия  $E(F_0)$

импульса конечной продолжительности в полосе  $\Delta F_0$  составляет максимальную долю  $E_a$ , где

$$E(F_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi F_0}^{2\pi F_0} |F_a(\omega)|^2 d\omega,$$

$$E_a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_a(\omega)|^2 d\omega = \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t) dt.$$

Далее вводится новый параметр  $\theta$ , однозначно связанный с заданной полосой частот:

$$\theta = \frac{\pi}{2} (2F_0)T,$$

и условие нормировки полной энергии импульса:

$$E_a = \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t) dt = 1. \quad (1.21)$$

Из соображений симметрии решение ищется в виде четной функции, разложенной в следующий ряд:

$$a(\theta, \beta) = \sum_n 'd_n(\theta) P_n(\beta), \quad (1.22)$$

где  $\beta = 2t/T$  – нормированное время,  $d_n(\theta)$  табулированные коэффициенты-решения,  $P_n(\beta)$  – полиномы Лежандра степеней  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а штрих над  $\Sigma$  означает, что суммирование ведется по четным  $n$ , начиная с 0.

Табл. 1.4

|            |                         |               |                         |
|------------|-------------------------|---------------|-------------------------|
| $d_0(3,6)$ | $6,5775 \cdot 10^{-1}$  | $d_8(3,6)$    | $4,7440 \cdot 10^{-4}$  |
| $d_2(3,6)$ | $-5,9419 \cdot 10^{-1}$ | $d_{10}(3,6)$ | $-1,5071 \cdot 10^{-5}$ |
| $d_4(3,6)$ | $1,1201 \cdot 10^{-1}$  | $d_{12}(3,6)$ | $3,3400 \cdot 10^{-7}$  |
| $d_6(3,6)$ | $-9,6427 \cdot 10^{-3}$ | $d_{14}(3,6)$ | $-5,0000 \cdot 10^{-9}$ |

В [3] поставленная задача решена для дискретного набора значений  $\theta$  от  $\theta = 0$  до  $\theta = 5$  с шагом 0,1. Как было оговорено выше, интерес представляет полоса  $\Delta F_{99\%}$ . Из представленного набора значений  $\theta$  наиболее близкий результат обеспечивается при  $\theta = 3,6$ , и в этом случае в заданной полосе оказывается сосредоточено 99,15% полной энергии импульса. Значения соответствующих ко-

эффицентов  $d_n(\theta)$  представлены в табл. 1.4, а на рис. 1.5 представлена форма импульса (1.22) при  $\theta = 3,6$ .

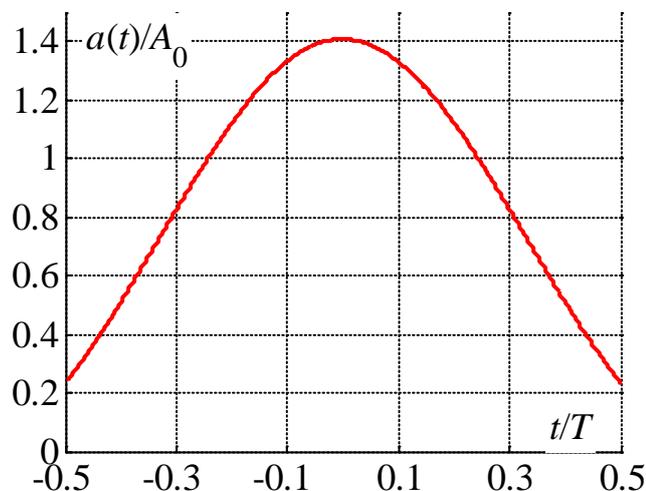


Рис. 1.5. Форма импульса (1.22) при  $\theta = 3,6$

Учитывая, что  $\theta = 3,6$ , получаем, что 99,15% полной энергии импульса содержится в полосе  $2,29/T$ ; если же говорить о концентрации 99%, то такая часть энергии содержится в полосе  $2,24/T$ . Основные параметры сигналов с огибающей (1.22) для  $\theta = 3,6$  сведены в табл. 1.5. На рис. 1.6 представлены энергетические спектры последовательностей сигналов (1.1) с огибающей прямоугольного вида – кривая (1) и огибающей вида (1.22) при  $\theta = 3,6$  – кривая (2).

Табл. 1.5

| $\Pi_{\text{ФМ-4}}$ | $\Delta F_{99\%} T$ | $\Delta F_{-60\text{дБ}} T$ | $\gamma$ |
|---------------------|---------------------|-----------------------------|----------|
| 3,96                | 2,24                | >100                        | 2        |

Из приведенных результатов следует, что последовательности сигналов с огибающей вида (1.22) при  $\theta = 3,6$  хотя и обладают самым компактным спектром по критерию 99% концентрации энергии в полосе, тем не менее, внеполосные излучения в этом случае оказываются значительными; также заметим, что значения огибающей на концах тактового интервала не равны нулю. Указанные недостатки, по-видимому, делают использование такой огибающей практически нецелесообразным.

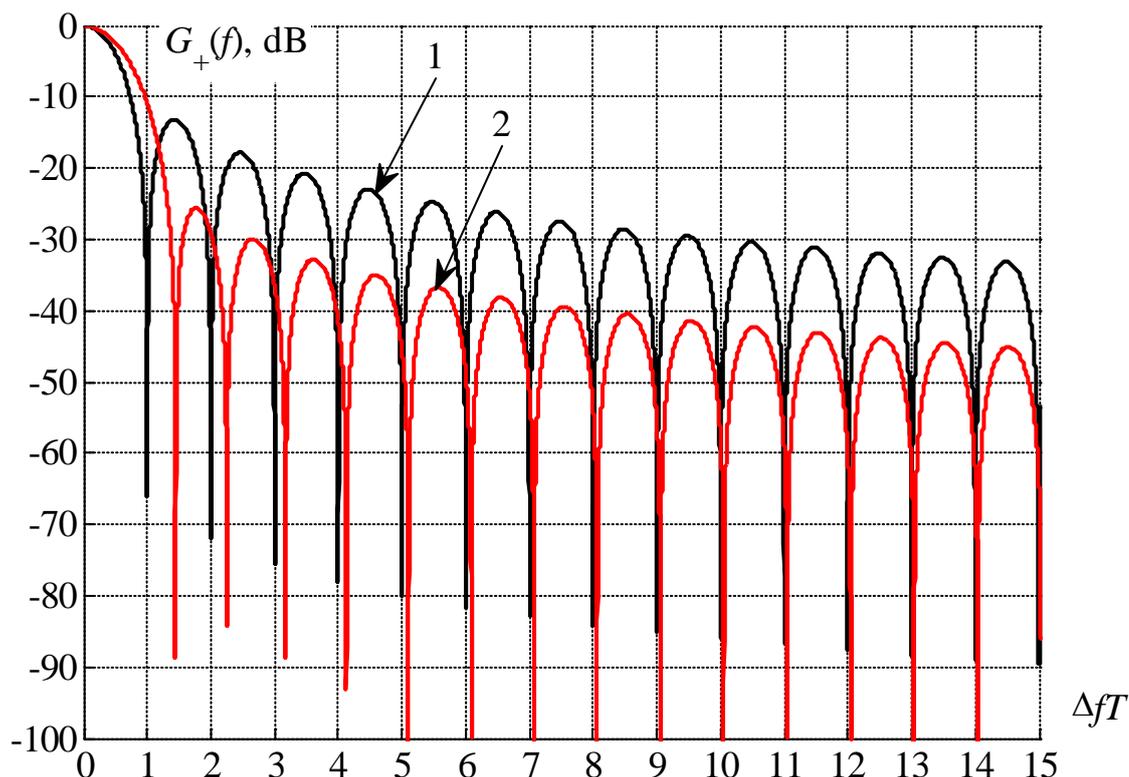


Рис. 1.6. Энергетические спектры последовательностей сигналов (1.1) с огибающими прямоугольного вида и вида (1.22) при  $\theta = 3,6$

Другим критерием оптимальности, используемым, как правило, в многоканальных системах связи с частотным уплотнением каналов, является критерий обеспечения максимальной скорости спада уровня внеполосных излучений или обеспечения гарантированного уровня излучений за пределами занимаемой полосы частот. Так в [3] показано, что спектр последовательности сигналов в области внеполосных излучений будет убывать не медленнее, чем  $C/\omega^{n+1}$ , если все производные огибающей  $a(t)$  вплоть до производной  $(n-1)$ -го порядка  $a^{(n-1)}(t)$  не имеют скачков, а  $a^{(n)}(t)$  всюду конечна. В случае разложения огибающей  $a(t)$  в ряд ограниченных функций данное условие вырождается в граничные условия вида:

$$a^{(k)}(t)|_{t=\pm T/2} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.23)$$

В качестве функций, обеспечивающих выполнение (1.23), можно предложить следующее семейство:

$$a(t) = A_0 \cos^n(\pi t/T), \quad -T/2 \leq t \leq T/2. \quad (1.24)$$

При таком выборе функций в точках  $t = \pm T/2$  не будет скачков в  $(n - 1)$ -й производной, но  $n$ -я производная будет содержать член вида  $\sin^n(\pi t/T)$ , который в точках  $t = \pm T/2$  не будет равен нулю, хотя все остальные члены  $n$ -й производной и обратятся в ноль. Таким образом, огибающая (1.24) обеспечит убывание частотного спектра не медленнее, чем  $C/\omega^{(n+1)}$ . На рис. 1.7 приведены формы огибающей (1.24) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$  с учетом нормировки энергии (1.21).

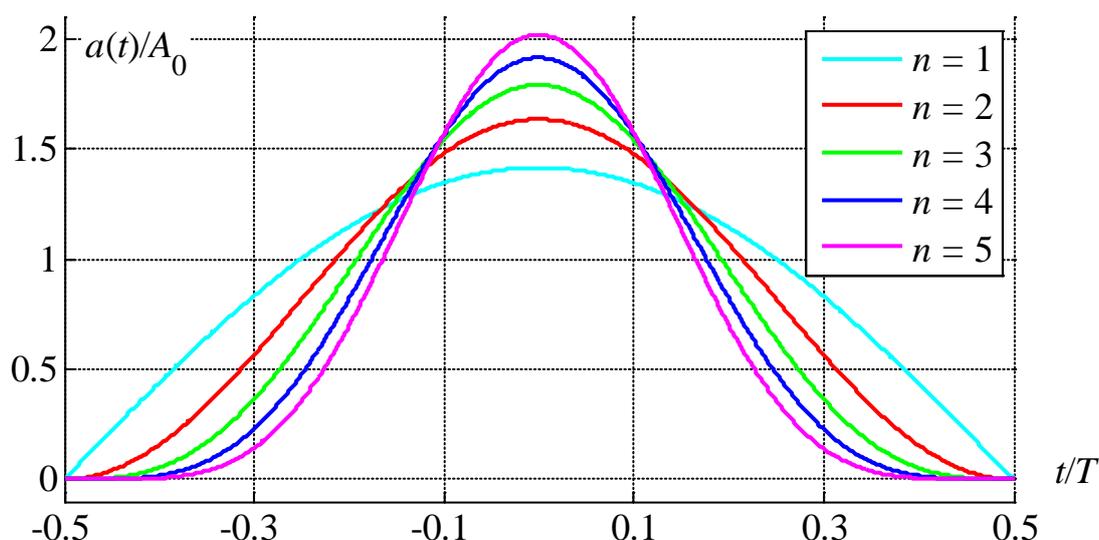


Рис. 1.7. Огибающая вида (1.24) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$

В табл. 1.6 приведены основные параметры сигналов с огибающей вида (1.24) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$ . На рис. 1.8 представлены энергетические спектры последовательностей сигналов (1.1) с огибающей прямоугольного вида (*rect*) и огибающей вида (1.24) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$  [21].

Табл. 1.6

| $n$ | $\Pi_{\text{ФМ-4}}$ | $\Delta F_{99\%} T$ | $\Delta F_{-60\text{дБ}} T$ | $\gamma$ |
|-----|---------------------|---------------------|-----------------------------|----------|
| 1   | 4,00                | 2,36                | 31,64                       | 4        |
| 2   | 5,33                | 2,82                | 13,74                       | 6        |
| 3   | 6,40                | 3,31                | 10,00                       | 8        |
| 4   | 7,31                | 3,77                | 8,72                        | 10       |
| 5   | 8,13                | 4,18                | 8,49                        | 12       |

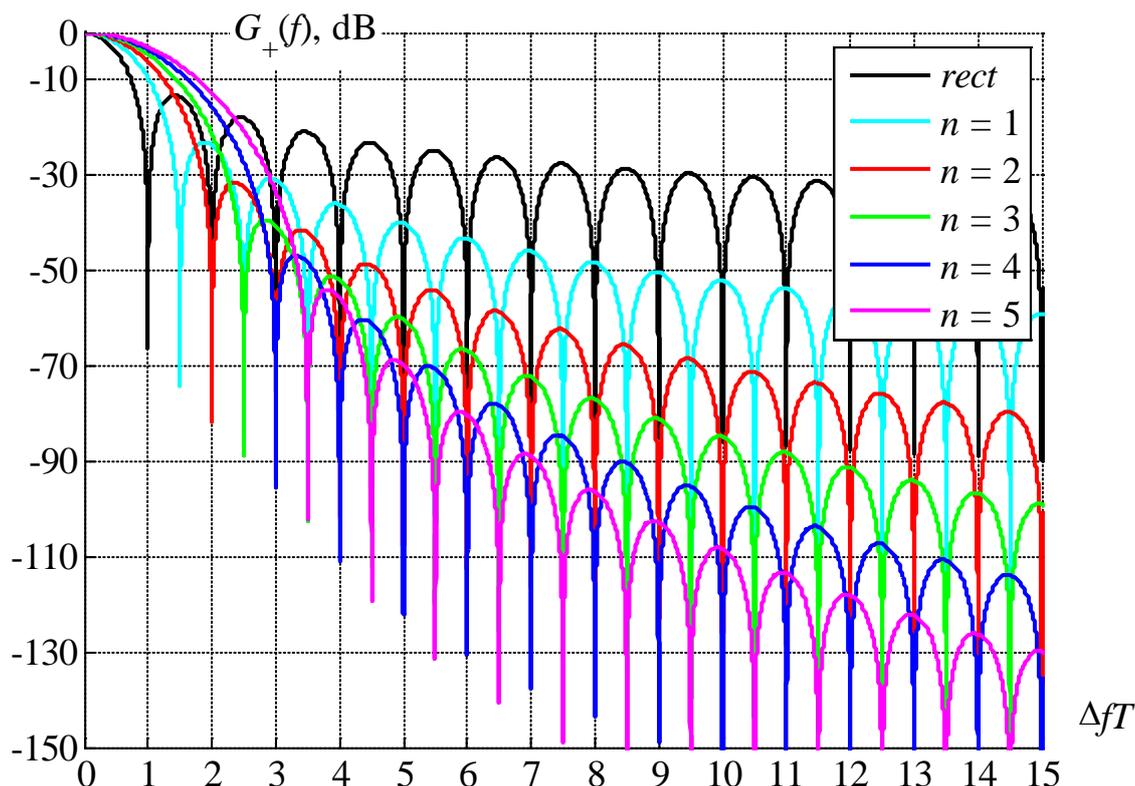


Рис. 1.8. Энергетические спектры последовательностей сигналов (1.1) с огибающими прямоугольного вида и вида (1.24) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$

Из представленных данных следует, что попытка повысить скорость спада спектра неизбежно влечет к расширению основного лепестка и увеличению  $\Delta F_{99\%}$ . Так, при переходе от  $n = 1$  к  $n = 5$  полоса по уровню  $-60$  дБ уменьшается в 3,73 раза, а полоса по 99% концентрации энергии возрастает в 1,78 раза. С другой стороны, повышение скорости спада спектра приводит к возрастанию пик-фактора и, следовательно, уменьшению энергетической эффективности и повышению требований к оконечным усилителям передающей аппаратуры. При тех же изменениях  $n$  пик-фактор увеличивается в 2,03 раза.

Таким образом, решения, полученные при выборе одного критерия оптимальности, могут оказаться неэффективными по другим критериям. Так, решение, полученное для критерия максимальной концентрации энергии в полосе частот, имеет разрывы на границах тактового интервала, и, следовательно, спектр убывает не медленнее, чем  $C/\omega$ . С другой стороны, огибающая (1.24)

при  $n = 5$  хотя и обладает высокой скоростью спада спектра, но при этом её полоса частот по уровню 99% концентрации энергии оказывается равной  $4,18/T$ , что в 1,87 раз больше, чем для огибающей (1.22) при  $\theta = 3,6$ .

В [29] поставлена и решена оптимизационная задача, в которой на огибающую одновременно накладываются условия по скорости спада спектра и минимизации средней вредности излучения, которая определяется следующим образом

$$\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) |F_a(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.25)$$

где  $g(\omega)$  – функция вредности излучения. Видно, что при такой постановке задачи в качестве излучаемого колебания, вообще говоря, рассматривается не последовательность (1.1), а лишь сигнал её одного тактового интервала; более того, никак не учитывается размерность и вид сигнального созвездия; наконец, сигнал считается снесенным на нулевую частоту. Понятно, что это сделано специально, учитывая, что отличие энергетического спектра (1.1), снесенного на нулевую частоту, от  $|F_a(\omega)|^2$  заключается лишь в умножении на константу

$$\frac{1}{T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)}$$

(здесь у  $T$  нет коэффициента 4, из-за рассмотрения (1.1) на нулевой частоте), а средняя вредность излучения для последовательности (1.1) без высокочастотного заполнения и при его наличии отличается лишь коэффициентом 2:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \frac{1}{T} |F_a(\omega)|^2 d\omega = \\ & = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( g(\omega - \omega_0) \frac{1}{4T} |F_a(\omega - \omega_0)|^2 + g(\omega + \omega_0) \frac{1}{4T} |F_a(\omega + \omega_0)|^2 \right) d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, решение оптимизационной задачи (1.25) не изменится при подстановке истинного энергетического спектра последовательности (1.1); изменится лишь значение средней вредности излучения.

Функция вредности излучения  $g(\omega)$  приписывает той или иной части спектра сигнала определенный вес. Ясно, что в пределах необходимой полосы час-

тот сигнала функция вредности должна равняться нулю или быть очень малой и возрастать за пределами этой полосы. На участках спектра сигнала, особенно нежелательных для излучения, функция вредности должна быть максимальной. Наилучшим с точки зрения внеполосных излучений является прямоугольный спектр, т.е. спектр бесконечного по продолжительности сигнала. Учитывая, что рассматриваются финитные сигналы, прямоугольный спектр получить невозможно, однако можно выбрать функцию вредности такой, чтобы минимум средней вредности излучения обеспечивался для практически прямоугольного спектра. Выберем в качестве функции вредности параболу четной степени:

$$g(\omega) = \omega^{2n}, \quad (1.26)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – целое число, выбираемое из условия требуемого подавления внеполосных излучений. Понятно, что, чем больше  $n$ , тем ближе получаемые спектры к прямоугольному виду. Преобразуем (1.25):

$$\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} g(\omega) a(x) a(y) \exp(j(x-y)\omega) dx dy d\omega.$$

Поменяем порядок интегрирования и введем новое обозначение:

$$\bar{g} = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} a(x) a(y) G(x, y) dx dy, \quad (1.27)$$

где

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(j(x-y)\omega) d\omega. \quad (1.28)$$

Учитывая, что один из способов определения  $\delta$ -функции есть

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) d\omega,$$

легко получить, что

$$\delta^{(2n)}(t) = \frac{1}{2\pi} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{(2n)} \exp(j\omega t) d\omega. \quad (1.29)$$

Тогда, подставляя (1.29) и (1.26) в (1.28), получаем:

$$G(x, y) = (-1)^n \delta^{(2n)}(x - y). \quad (1.30)$$

Используя фильтрующее свойство  $\delta$ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x-a) dx = (-1)^n \left. \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \right|_{x=a},$$

подставим (1.30) в (1.27):

$$\bar{g} = (-1)^n \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} a(x) a(y) \delta^{(2n)}(x-y) dx dy = (-1)^n \int_{-T/2}^{+T/2} a(t) a^{(2n)}(t) dt. \quad (1.31)$$

Задача оптимизации огибающей в этом случае заключается в определении функции  $a(t)$ , обеспечивающей минимум интеграла (1.31) при дополнительном условии (1.21). Это – типичная вариационная изопериметрическая задача. Известно [18], что функция, обеспечивающая минимум выражения (1.31) при условии (1.21), находится интегрированием дифференциального уравнения Эйлера. Легко показать, что для данного случая это уравнение представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение  $2n$ -го порядка:

$$a^{(2n)} + \lambda a = 0,$$

где  $\lambda$  – собственное значение дифференциального уравнения, определяемое из граничных условий. Предлагается в качестве граничных условий использовать (1.23). Выбор таких граничных условий, с одной стороны, обеспечит заданную скорость спада искомой огибающей, а с другой стороны, с учетом того, что при выполнении (1.23) энергетический спектр  $|F_a(\omega)|^2$  убывает не медленнее, чем  $C/\omega^{2(n+1)}$ , гарантируется сходимость (1.25).

Конечно, такая задача может быть решена аналитически, однако, как будет показано ниже, при дальнейшем усложнении задачи, когда имеют место дополнительные ограничения на пик-фактор и величину коэффициента корреляции, аналитическое решение задачи становится практически невозможным. Исходя из этого, представляется целесообразным уже на этом этапе перейти к численному методу решения таких задач, основанному на представлении огибающей в виде ортогонального разложения Фурье.

В силу симметричности задачи решение (1.31) будем искать в классе четных на интервале  $[-T/2, T/2]$  функций:

$$a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right). \quad (1.32)$$

Подставим (1.32) в минимизируемый функционал (1.31) и переобозначим среднюю вредность излучения  $\bar{g}$  через  $J$  как это принято в теории вариационного исчисления:

$$J = (-1)^n \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right) \frac{d^{(2n)}}{dt^{(2n)}} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right) dt. \quad (1.33)$$

Упростим (1.33):

$$J = (-1)^n \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right) \left( (-1)^n \left(\frac{2\pi}{T}k\right)^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right) dt.$$

Учитывая, что

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt = 0, \text{ для любых целых } k, \quad (1.34)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}lt\right) dt = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ T/2, & k = l, \end{cases} \quad (1.35)$$

окончательно получим:

$$J = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\frac{2\pi}{T}k\right)^{2n}. \quad (1.36)$$

Произведем подстановку (1.32) в (1.21), т.е. вычислим энергию огибающей:

$$\begin{aligned} E_a &= \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \right)^2 dt = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{a_0^2}{4} + 2\frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_k a_l \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}lt\right) \right) dt. \end{aligned}$$

Снова воспользовавшись (1.34) и (1.35), получим:

$$E_a = \frac{T}{2} \frac{a_0^2}{2} + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \quad (1.37)$$

Таким образом, условие нормировки энергии будет таким:

$$\frac{T}{2} \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) = 1. \quad (1.38)$$

Перейдем к рассмотрению граничных условий (1.23). Обратим внимание на то, что при подстановке (1.32) для всех производных нечетного порядка

$$a^{(b)}(t)\Big|_{t=\pm T/2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^{\frac{b+1}{2}} \left(\frac{2\pi}{T}k\right)^b \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\Big|_{t=\pm T/2} = 0, \quad b - \text{нечетное},$$

т.е. половина граничных условий оказываются выполненными всегда. Таким образом, для четных функций, разложенных в ряд Фурье (как и сделано с огибающей  $a(t)$ ), верно следующее правило: если выполнены условия для скорости спада спектра не хуже, чем  $C/\omega^{(b+1)}$  и  $(b+1)$  – четное, то выполнены условия для скорости спада не хуже, чем  $C/\omega^{(b+2)}$ . Граничные условия оказываются одинаковыми для случаев  $n = b + 1$  и  $n = b + 2$ , и на разницу решений оказывает влияние только функционал  $J$ .

Рассмотрим теперь производные четного порядка. Видно, что для них значения производной на границах тактового интервала совпадают, поэтому достаточно рассматривать лишь одну границу тактового интервала, например,  $+T/2$ :

$$a^{(b)}(t)\Big|_{t=-T/2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^{\frac{b}{2}} \left(\frac{2\pi}{T}k\right)^b \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\Big|_{t=\pm T/2} = a^{(b)}(t)\Big|_{t=+T/2}, \quad b - \text{четное}.$$

Таким образом, граничные условия (1.23) при подстановке (1.32) можно записать так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\pi k) = 0,$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^{\frac{b}{2}} \left(\frac{2\pi}{T}k\right)^b \cos(\pi k) = 0, \quad 2 \leq b \leq n - 1, \quad b - \text{четное}.$$

Или, приводя к единой записи:

$$\frac{a_0}{2} (1 - \text{sign}(b)) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^{k+\frac{b}{2}} \left(\frac{2\pi}{T}k\right)^b = 0, \quad 0 \leq b \leq n - 1, \quad b - \text{четное}, \quad (1.39)$$

где

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

В результате проделанных преобразований вариационная изопериметрическая задача с дополнительными граничными условиями преобразована в задачу поиска минимума функции многих переменных при наличии дополнительных уравнений связи. Результаты численного решения такой задачи при количестве членов разложения  $m = 10$  в (1.32) и требуемой скорости спада спектра от  $C/\omega^2$  до  $C/\omega^6$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ) представлены коэффициентами разложения в табл. 1.7 и видом полученных огибающих на рис. 1.9.

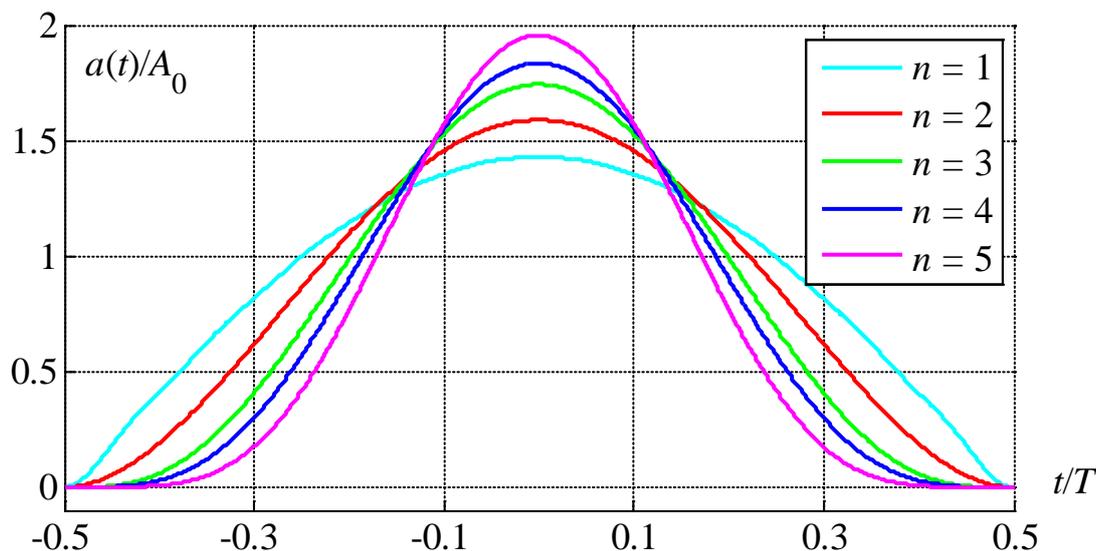


Рис. 1.9. Огибающие вида (1.31) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$  при  $m = 10$

Табл. 1.7

|       | $n = 1$                 | $n = 2$                 | $n = 3$                 | $n = 4$                 | $n = 5$                 |
|-------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $a_0$ | $1,7823 \cdot 10^0$     | $1,6616 \cdot 10^0$     | $1,5415 \cdot 10^0$     | $1,4803 \cdot 10^0$     | $1,3991 \cdot 10^0$     |
| $a_1$ | $6,2601 \cdot 10^{-1}$  | $7,8631 \cdot 10^{-1}$  | $8,9614 \cdot 10^{-1}$  | $9,3482 \cdot 10^{-1}$  | $9,7064 \cdot 10^{-1}$  |
| $a_2$ | $-1,2387 \cdot 10^{-1}$ | $-3,4042 \cdot 10^{-2}$ | $9,1673 \cdot 10^{-2}$  | $1,7380 \cdot 10^{-1}$  | $2,8119 \cdot 10^{-1}$  |
| $a_3$ | $5,3008 \cdot 10^{-2}$  | $6,6156 \cdot 10^{-3}$  | $-2,0828 \cdot 10^{-2}$ | $-1,6557 \cdot 10^{-2}$ | $5,4297 \cdot 10^{-3}$  |
| $a_4$ | $-2,9434 \cdot 10^{-2}$ | $-2,0875 \cdot 10^{-3}$ | $6,9151 \cdot 10^{-3}$  | $3,0459 \cdot 10^{-3}$  | $-2,9510 \cdot 10^{-3}$ |

|          |                         |                         |                         |                         |                         |
|----------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $a_5$    | $1,8726 \cdot 10^{-2}$  | $8,5442 \cdot 10^{-4}$  | $-2,8950 \cdot 10^{-3}$ | $-8,1071 \cdot 10^{-4}$ | $1,0242 \cdot 10^{-3}$  |
| $a_6$    | $-1,2963 \cdot 10^{-2}$ | $-4,1194 \cdot 10^{-4}$ | $1,4126 \cdot 10^{-3}$  | $2,7374 \cdot 10^{-4}$  | $-3,8948 \cdot 10^{-4}$ |
| $a_7$    | $9,5053 \cdot 10^{-3}$  | $2,2233 \cdot 10^{-4}$  | $-7,6788 \cdot 10^{-4}$ | $-1,0909 \cdot 10^{-4}$ | $1,6569 \cdot 10^{-4}$  |
| $a_8$    | $-7,2684 \cdot 10^{-3}$ | $-1,3032 \cdot 10^{-4}$ | $4,5216 \cdot 10^{-4}$  | $4,9116 \cdot 10^{-5}$  | $-7,7652 \cdot 10^{-5}$ |
| $a_9$    | $5,7380 \cdot 10^{-3}$  | $8,1354 \cdot 10^{-5}$  | $-2,8316 \cdot 10^{-4}$ | $-2,4280 \cdot 10^{-5}$ | $3,9421 \cdot 10^{-5}$  |
| $a_{10}$ | $-4,6450 \cdot 10^{-3}$ | $-5,3376 \cdot 10^{-5}$ | $1,8619 \cdot 10^{-4}$  | $1,2924 \cdot 10^{-5}$  | $-2,1376 \cdot 10^{-5}$ |

В табл. 1.8 приведены основные параметры сигналов с огибающей вида (1.31) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$ . На рис. 1.10 представлены энергетические спектры последовательностей сигналов (1.1) с огибающей прямоугольного вида (*rect*) и огибающей вида (1.31) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$ .

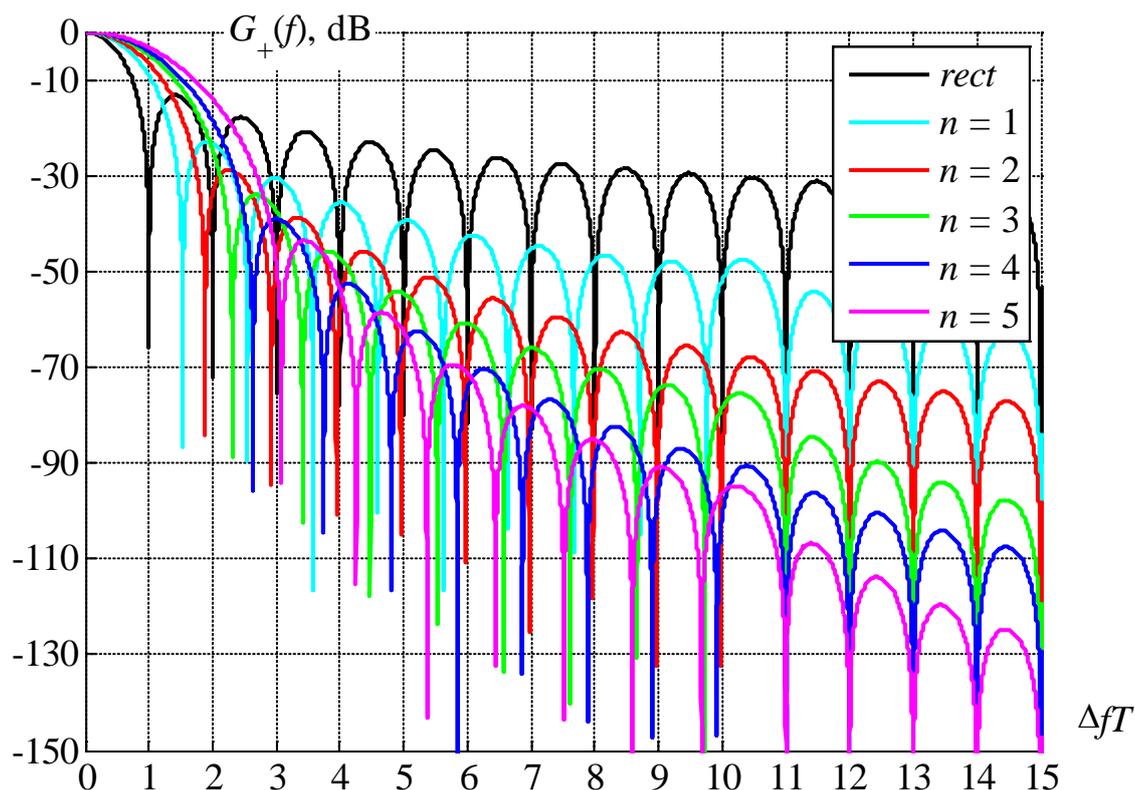


Рис. 1.10. Энергетические спектры последовательностей сигналов (1.1) с огибающими прямоугольного вида и вида (1.31) для  $n = 1, 2, 3, 4$  и  $5$

Табл. 1.8

| $n$ | $P_{\text{ФМ-4}}$ | $\Delta F_{99\%} T$ | $\Delta F_{-60\text{дБ}} T$ | $\gamma$ |
|-----|-------------------|---------------------|-----------------------------|----------|
| 1   | 4,07              | 2,42                | 26,60                       | 4        |
| 2   | 5,04              | 2,71                | 15,21                       | 6        |
| 3   | 6,07              | 3,18                | 11,71                       | 8        |
| 4   | 6,73              | 3,49                | 9,90                        | 10       |
| 5   | 7,64              | 3,94                | 9,72                        | 12       |

Обратим внимание на то, что полоса по уровню  $-60$  дБ внеполосных излучений для  $n = 4$  оказалась почти такой же, как для  $n = 5$ . Это вызвано тем, что при соответствующих отстройках спектры еще не вошли в область, где их поведение аппроксимируется функцией  $C/\omega^{n+1}$ .

Из приведенных данных следует, что переход к сигналам с огибающими вида (1.31) по сравнению с (1.24) позволяет несколько улучшить энергетические параметры и уменьшить полосу частот  $\Delta F_{99\%}$  по критерию 99% концентрации энергии при незначительном увеличении полосы  $\Delta F_{-60\text{ дБ}}$  по уровню  $-60$  дБ внеполосных излучений. При этом нетрудно видеть, что огибающие (1.31) и (1.24) совпадают для  $n = 1$ , а для  $n > 1$  отличаются незначительно.

В целом, на примере решенной оптимизационной задачи показано, что поиск оптимальных форм огибающих следует производить, решая именно такие задачи, так как не для всех условий можно всегда легко предложить решение, как это было в случае огибающих (1.24).

## 1.6. Многокомпонентные сигналы

Как показано выше использование сглаженных огибающих в последовательностях сигналов (1.1) позволяет существенно повысить спектральную эффективность при незначительном энергетическом проигрыше. Более того, возможно получение оптимальных форм огибающей как решение соответствующих вариационных задач. Однако в 80-х годах XX века для еще более существенного повышения степени компактности спектра были предложены сигналы

[10, 13], у которых форма колебания на текущем тактовом интервале зависит как от данного передаваемого символа, так и от ряда предыдущих и последующих символов. Для таких сигналов характерен выбор протяженных амплитудно-фазовых траекторий, в которых имеют место сложные формы огибающих и управляемая линейная и нелинейная межсимвольная интерференция.

Идея построения таких сигналов на примере зависимости от двух символов канального алфавита, текущего и одного предыдущего, может быть пояснена следующим образом. На одной частоте одновременно передаются две последовательности сигналов (1.1) (в дальнейшем будем называть их *компонентами*), каждая из которых имеет длительность тактового интервала  $2T$  (в два раза большую исходной), при этом моменты начала тактовых интервалов последовательностей сдвинуты во времени на величину  $T$ .

Пусть каждая компонента использует  $M$ -ичное созвездие и, таким образом, за интервал времени  $2T$  передает  $\log_2 M$  бит информации. Тогда общая скорость передачи составит  $\log_2 M$  бит за время  $T$ , т.е. будет такой же, как у одиночной последовательности сигналов (1.1) при использовании того же  $M$ -ичного созвездия, но с исходной длительностью тактового интервала  $T$ . Заметим, что традиционные сигналы со сглаженными огибающими являются частным случаем зависимых сигналов. Как будет показано ниже, для такой совокупности двух компонент суммарный энергетический спектр оказывается сжатым по оси частот в 2 раза по отношению к энергетическому спектру одиночной последовательности, и, следовательно, эффективная полоса частот уменьшается в 2 раза.

Для иллюстрации запишем две последовательности-компоненты (1.1) с тактовыми интервалами  $2T$  и началами тактовых интервалов сдвинутыми на  $T$ :

$$\begin{aligned} y_{2N}^{(1)}(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} y_{C,2N}^{(1)}(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_r^{(k)}) = \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} a\left(\frac{t-2kT}{2}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_r^{(k)}), \\ y_{2N}^{(2)}(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} y_{C,2N}^{(2)}(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_r^{(k)}) = \sum_{k=0}^{N-1} A_r^{(k)} a\left(\frac{t-T-2kT}{2}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_r^{(k)}), \end{aligned} \quad (1.40)$$

где нижний индекс у названия компоненты состоит из двух чисел – количества компонент в общей совокупности (в дальнейшем – *многокомпонентный сигнал*)

и количества передаваемых символов канального алфавита в одной компоненте, а верхний индекс соответствует номеру компоненты.

На рис. 1.11 представлены огибающие компонент (1.40) для  $a(t)$  вида  $\cos(x)$ .

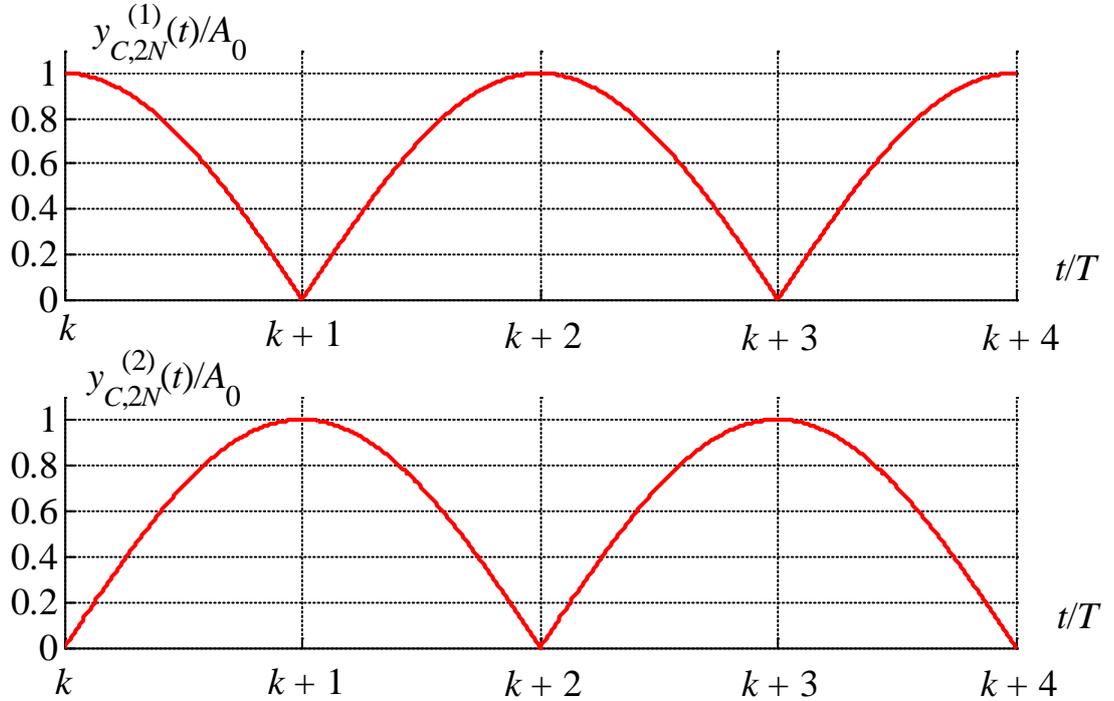


Рис. 1.11. Огибающие компонент (1.40) для  $a(t)$  вида  $\cos(x)$

Конечно, увеличение степени компактности спектра, т.е. улучшение спектральной эффективности невозможно без дополнительных энергетических затрат. Компоненты интерферируют друг с другом, при этом значительно ухудшается качество приема, т.е. снижается энергетическая эффективность. Более того, для приема многокомпонентных сигналов необходимы иные алгоритмы приема, учитывающие наличие мешающего воздействия, отличного от АБГШ.

Запишем общую формулу для многокомпонентного сигнала, состоящего из  $L$  компонент (1.1), начала тактовых интервалов которых сдвинуты друг относительно друга, и длительности тактовых интервалов которых равны  $LT$ :

$$y_{LN}(t) = \sum_{p=1}^L y_{LN}^{(p)}(t) = \sum_{p=1}^L \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{L}} A_{r_p}^{(k)} a\left(\frac{t - \Delta t_p - kLT}{L}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{r_p}^{(k)}), \quad (1.41)$$

$$-LT/2 \leq t \leq -LT/2 + NLT + \max\{\Delta t_p\},$$

где  $y_{LN}^{(p)}(t)$  –  $p$ -я компонента  $L$ -компонентного сигнала  $y_{LN}(t)$ ,  $\Delta t_p$  – величина задержки начала первого тактового интервала  $p$ -й компоненты относительно момента времени  $t = -LT/2$ ,  $T$ , по-прежнему, – интервал следования символов канального алфавита,  $A_{r_p}^{(k)}$  и  $\varphi_{r_p}^{(k)}$  – амплитуда и фаза, соответствующие  $k$ -му символу канального алфавита  $p$ -й компоненты и определяемые  $M$ -элементным сигнальным созвездием, причем нижний индекс  $r_p = 1, 2, \dots, M$  соответствует номеру символа канального алфавита  $p$ -й компоненты, а верхний индекс  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  отражает принадлежность к соответствующему тактовому интервалу  $p$ -й компоненты. Константа  $1/\sqrt{L}$  обеспечивает независимость энергии огибающей от количества компонент – это будет необходимо при решении оптимизационных задач. Далее, если не оговорено иное, будем выбирать величины сдвига начал тактовых интервалов с равномерным шагом:  $t_p = (p - 1)T$ . Для упрощения записи введем обозначение

$$a_p^{(k)}(t, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} a\left(\frac{t - \Delta t_p - kLT}{L}\right). \quad (1.42)$$

Еще раз обратим внимание на то, что каждая компонента – случайная последовательность, состоящая из  $N$  независимых сигналов, а многокомпонентный сигнал – совокупность таких случайных последовательностей. Таким образом, для многокомпонентного сигнала нет понятия тактового интервала, есть тактовый интервал той или иной компоненты. В однокомпонентном сигнале (1.1)  $k$ -й символ канального алфавита передается в  $k$ -м тактовом интервале

$$-T/2 + kT \leq t \leq T/2 + kT, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Заметим, что первым по порядку является нулевой ( $k = 0$ ) тактовый интервал. В (1.41) не указано правило распределения  $LN$  символов канального алфавита между  $L$  компонентами – его следует определить дополнительно. Будем считать, что каждый  $(p + kL - 1)$ -й символ канального алфавита передается в  $k$ -м тактовом интервале  $p$ -й компоненты

$$-LT/2 + \Delta t_p + kLT \leq t \leq LT/2 + \Delta t_p + kLT, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Многокомпонентный сигнал (1.41) переносит  $LN$  символов канального алфавита за время  $NLT + (L - 1)T$ , а однокомпонентный сигнал (1.1) переносит  $N$  символов канального алфавита за время  $NT$ . Таким образом, скорость передачи информации многокомпонентного сигнала оказывается незначительно меньше скорости однокомпонентного, и при увеличении  $N$  различие быстро уменьшается. Такое явление вызвано тем, что в (1.41) в первом тактовом интервале первой компоненты и в последнем тактовом интервале  $L$ -й компоненты (назовем эти тактовые интервалы хвостовыми) присутствуют не все компоненты. Это важно учитывать, рассматривая использование таких сигналов в системах с прерывистой передачей, особенно в вопросах синхронизации. При расчете пик-фактора и спектра многокомпонентных сигналов, а также рассматривая алгоритмы их приема можно не учитывать влияние хвостовых тактовых интервалов.

Как уже было сказано, в многокомпонентных сигналах присутствует управляемая межсимвольная интерференция, вызванная тем, что сигналы разных компонент передаются в одно и то же время на одной частоте. Чтобы охарактеризовать величину такой интерференции, введем в рассмотрение коэффициенты парциальной и групповой корреляций. Коэффициент парциальной корреляции  $KP_{p,d}^{(k,l)}$  – это значение коэффициента корреляции сигнала  $k$ -го тактового интервала  $p$ -й компоненты и сигнала  $l$ -го тактового интервала  $d$ -й компоненты:

$$KP_{p,d}^{(k,l)} = \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} \left\{ A_{r_p}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{r_p}^{(k)}) \right\} \times \left\{ A_{q_d}^{(l)} a_d^{(l)}(t, L) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{q_d}^{(l)}) \right\} dt. \quad (1.43)$$

Конечно, коэффициенты парциальной корреляции для непересекающихся во времени тактовых интервалов  $k$  и  $l$  равны нулю, и их нет смысла рассматривать. Интерес представляют коэффициенты парциальной корреляции для пересекающихся во времени тактовых интервалов. Так, например, для сигнала  $k$ -го

тактового интервала первой компоненты ненулевыми могут оказаться только коэффициенты парциальной корреляции  $KP_{1,d}^{(k,k-1)}$  и  $KP_{1,d}^{(k,k)}$ , где  $d = 2, 3, \dots, L$ .

Коэффициент парциальной корреляции – мера интерференции между разными компонентами, однако не меньший интерес представляет интерференция между одной компонентой и всеми остальными. Коэффициент групповой корреляции  $KG_p^{(k)}$  – это значение коэффициента корреляции сигнала  $k$ -го тактового интервала  $p$ -й компоненты со всеми остальными компонентами:

$$KG_p^{(k)} = \sum_{\substack{d=1 \\ d \neq p}}^L \sum_{l=0}^{N-1} KP_{p,d}^{(k,l)}. \quad (1.44)$$

Так, для первой компоненты получим:

$$KG_1^{(k)} = \sum_{d=2}^L \left( KP_{1,d}^{(k,k-1)} + KP_{1,d}^{(k,k)} \right).$$

Как известно, “прием в целом” однокомпонентных сигналов можно осуществить простым в реализации поэлементным приемом, когда решение о передаваемом  $k$ -м символе канального алфавита выносится на основе анализа только  $k$ -го тактового интервала. Для многокомпонентных сигналов такой подход без дополнительных ограничений неприемлем, поскольку компоненты, наряду с аддитивной помехой, являются мешающим воздействием друг для друга. С целью учета взаимовлияния компонент можно использовать алгоритм Витерби как реализацию приема в целом многокомпонентных сигналов. Сложность алгоритма Витерби определяется числом возможных состояний решетки. Для многокомпонентных сигналов это соответствует числу возможных сигналов на любом из интервалов  $-LT/2 + kT \leq t \leq -LT/2 + (k+1)T$ , что, например, для  $L = 8$  и  $M = 4$  составляет  $M^L = 65\,536$ . В таком случае использование алгоритма Витерби практически невозможно. С другой стороны, если построить такие многокомпонентные сигналы, что  $\max_{p,k} \left\{ \left| KG_p^{(k)} \right| \right\} = 0$ , то возможно использование поэлементного приема многокомпонентных сигналов.

В работах [22] и [25] поставлены и решены оптимизационные задачи поиска огибающих многокомпонентных сигналов, обеспечивающих минимальную

среднюю вредность излучения при наличии дополнительных ограничений на пик-фактор и коэффициент парциальной корреляции. При этом в обеих работах рассматривались лишь предельные случаи указанных ограничений, т.е. пик-фактор, равный 1 (исследовались сигналы с ФМ-2 без высокочастотного заполнения), и коэффициент корреляции, равный 0. Однако не меньший интерес представляет исследование влияния изменения ограничений на получаемый результат. Более того, в указанных работах рассмотрены сигналы с максимальным количеством компонент  $L = 2$ , и не ясно, каковы тенденции изменения решений при увеличении количества компонент.

## 1.7. Цель работы и постановка задач исследований

**Объектом** исследования в работе являются спектрально-эффективные многокомпонентные сигналы.

**Предметом исследования** являются удельная спектральная и энергетическая эффективности многокомпонентных спектрально-эффективных сигналов.

**Целью работы** является синтез спектрально-эффективных многокомпонентных сигналов, обеспечивающих заданную спектральную и энергетическую эффективности при наличии ограничений на величину пик-фактора колебаний и корреляционные характеристики.

Для достижения указанной цели требуется решить следующие **задачи**.

1. Постановка и решение оптимизационной задачи поиска огибающей случайной последовательности многокомпонентных сигналов, имеющих заданную скорость спада энергетического спектра вне занимаемой полосы частот при ограничениях на величину пик-фактора и коэффициент групповой либо парциальной корреляции.

2. Оценка точности численного метода синтеза огибающей многокомпонентных сигналов для различных значений заданных ограничений на скорость спада энергетического спектра, величину пик-фактора и коэффициент групповой либо парциальной корреляции.

3. Разработка алгоритма когерентного приема “в целом” с поэлементным принятием решений на основе алгоритма Витерби.
4. Построение имитационной модели формирования, передачи и приема многокомпонентных сигналов с оценкой помехоустойчивости приема.
5. Определение шенноновской эффективности использования полученных многокомпонентных сигналов.

## Глава 2. Характеристики многокомпонентных сигналов

Для описанных в первой главе многокомпонентных сигналов определяются их временные и спектральные характеристики. Рассматриваются вопросы приема многокомпонентных сигналов. Далее описывается постановка оптимизационной задачи синтеза огибающей многокомпонентных сигналов при наличии ограничений на пик-фактор и коэффициент парциальной либо групповой корреляции. Как и в случае однокомпонентных сигналов, предлагается решение такой задачи путем сведения ее к задаче поиска минимума функции многих переменных. Освещаются вопросы достижения заданной точности и выбора начального приближения при численном решении вариационной задачи.

### 2.1. Пик-фактор многокомпонентных сигналов

Пик-фактор многокомпонентных сигналов (1.41), определяется отношением пиковой мощности к средней:

$$\Pi = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{cp}}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\max \{y_{LN}^2(t)\}}{\mathbf{E} \left\{ \frac{1}{NLT} \int_{-LT/2}^{-LT/2 + NLT + (L-1)T} y_{LN}^2(t) dt \right\}}. \quad (2.1)$$

Обратим внимание, что в силу периодичности выражения (1.41) (рис. 2.1) определять наибольшее значение числителя (2.1) достаточно на произвольном интервале времени длительностью  $T$ . В качестве такого интервала выберем окончание  $k$ -го интервала первой компоненты (1.41):

$$LT/2 - T + kLT \leq t \leq LT/2 + kLT.$$

Такой выбор обусловлен тем, что на этом промежутке времени на всех остальных компонентах также передаются сигналы их  $k$ -х тактовых интервалов, и это позволяет упростить запись (например, на  $L$ -й компоненте в этот момент времени передается начало её  $k$ -го тактового интервала):

$$\max \{y_{LN}^2(t)\} = \max_{t \in \left[ \frac{LT}{2} - T + kLT; \frac{LT}{2} + kLT \right]} \left\{ \left( \sum_{p=1}^L \frac{1}{\sqrt{L}} A_{r_p}^{(k)} a \left( \frac{t - \Delta t_p - kLT}{L} \right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{r_p}^{(k)}) \right)^2 \right\}.$$

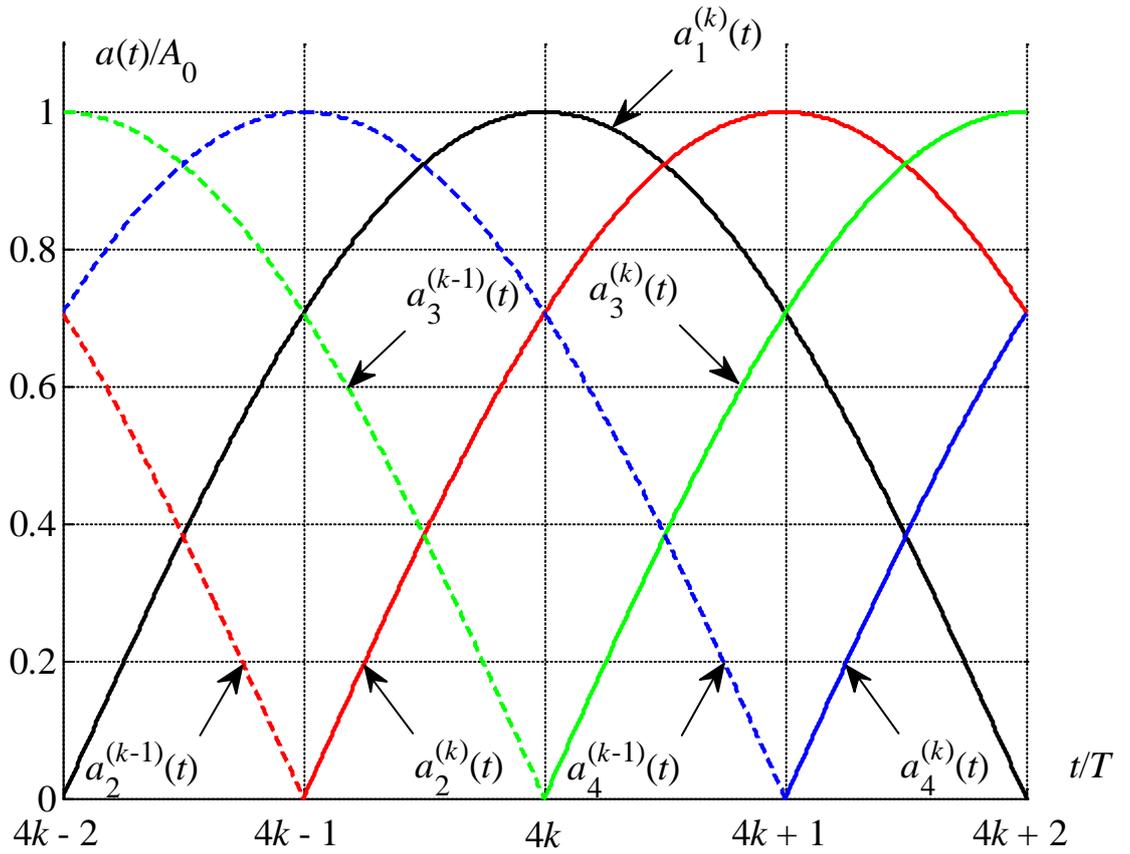


Рис. 2.1. Огибающие (1.42) для  $L = 4$  и  $a(t)$  вида  $\cos(x)$

Преобразуем  $y_{LN}^2(t)$  на выбранном интервале времени:

$$y_{LN}^2(t) \Big|_{t \in \left[ \frac{LT}{2} - T + kLT, \frac{LT}{2} + kLT \right]} = \left( \sum_{p=1}^L A_{r_p}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{r_p}^{(k)}) \right)^2 =$$

$$= \left( \left( \sum_{p=1}^L A_{r_p}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) \cos(\varphi_{r_p}^{(k)}) \right) \cos(2\pi f_0 t) - \left( \sum_{p=1}^L A_{r_p}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) \sin(\varphi_{r_p}^{(k)}) \right) \sin(2\pi f_0 t) \right)^2.$$

Учитывая, что

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = z \cos(\alpha + \beta),$$

где

$$z \cos \beta = x, \quad z \sin \beta = y, \quad z^2 = x^2 + y^2,$$

представим

$$x = \sum_{p=1}^L A_{r_p}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) \cos(\varphi_{r_p}^{(k)}),$$

$$y = \sum_{p=1}^L A_{r_p}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) \sin(\varphi_{r_p}^{(k)})$$

и получим

$$\begin{aligned} y_{LN}^2(t) \Big|_{t \in \left[ \frac{LT}{2} - T + kLT; \frac{LT}{2} + kLT \right]} &= \left( \left( \sum_{p=1}^L A_{r_p}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) \cos(\varphi_{r_p}^{(k)}) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{p=1}^L A_{r_p}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) \sin(\varphi_{r_p}^{(k)}) \right)^2 \right) \cos^2(2\pi f_0 t) = \\ &= \left( \sum_{p=1}^L \sum_{d=1}^L A_{r_p}^{(k)} A_{q_d}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) a_d^{(k)}(t, L) \left( \cos \varphi_{r_p}^{(k)} \cos \varphi_{q_d}^{(k)} + \sin \varphi_{r_p}^{(k)} \sin \varphi_{q_d}^{(k)} \right) \right) \cos^2(2\pi f_0 t) = \\ &= \left( \sum_{p=1}^L \sum_{d=1}^L A_{r_p}^{(k)} A_{q_d}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) a_d^{(k)}(t, L) \cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)}) \right) \cos^2(2\pi f_0 t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, выражение для пиковой мощности многокомпонентных сигналов можно записать так:

$$\begin{aligned} P_{\Pi} &= \max \{ y_{LN}^2(t) \} = \\ &= \max_{t \in \left[ \frac{LT}{2} - T + kLT; \frac{LT}{2} + kLT \right]} \left\{ \sum_{p=1}^L \sum_{d=1}^L A_{r_p}^{(k)} A_{q_d}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) a_d^{(k)}(t, L) \cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Предположим для начала, что все  $a_p^{(k)}(t, L)$  на рассматриваемом промежутке времени положительно определенные, тогда, очевидно, максимальное значение (2.3) достигается при выборе максимальных значений коэффициентов  $A_{r_p}^{(k)}$ ,  $A_{q_d}^{(k)}$  и  $\cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)})$ . Будем считать, что во всех компонентах используется одинаковая КАМ либо АФМ, тогда

$$\max \{ A_{r_p}^{(k)} \} = \max \{ A_{q_d}^{(k)} \} = \max \{ \cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)}) \} = 1,$$

причем такие максимальные значения достигаются, если точки сигнальных созвездий на  $k$ -х тактовых интервалах всех  $L$  компонент совпадают и находятся на окружности единичного радиуса. Обратим внимание, что это утверждение верно для созвездий произвольной размерности  $M$ . С учетом приведенных рассуждений, максимизируемое в (2.3) выражение преобразуется в квадрат суммы

огибающих. Учитывая, что, на самом деле, огибающие  $a_p^{(k)}(t, L)$  не обязательно положительно определенные, получим

$$P_{\Pi} = \max_{t \in \left[ \frac{LT}{2} - T + kLT; \frac{LT}{2} + kLT \right]} \left\{ \left( \sum_{p=1}^L |a_p^{(k)}(t, L)| \right)^2 \right\}.$$

Переходя к рассмотрению первого ( $k = 0$ ) тактового интервала для сокращения записи и делая обратную замену (1.42), преобразуем (2.3) для многокомпонентных сигналов с КАМ либо АФМ:

$$P_{\Pi} = \frac{1}{L} \max_{t \in \left[ \frac{LT}{2} - T; \frac{LT}{2} \right]} \left\{ \left( \sum_{p=1}^L \left| a \left( \frac{t - \Delta t_p}{L} \right) \right| \right)^2 \right\}. \quad (2.4)$$

Также рассмотрим вариант использования АФМ, когда в компонентах с четными номерами созвездия повернуты на угол  $\alpha = \pi/2$  относительно созвездий компонент с нечетными номерами. Как известно [25, 32], это позволяет получить минимальный пик-фактор  $\Pi = 2$  для  $L = 2$  при соответствующем выборе огибающей  $a(t)$ . В этом случае двойная сумма слагаемых в (2.3) может быть разложена на две двойные суммы: по четным и нечетным компонентам; и (2.4) запишется так:

$$P_{\Pi} = \frac{1}{L} \max_{t \in \left[ \frac{LT}{2} - T; \frac{LT}{2} \right]} \left\{ \left( \sum_{p=1}^L \left| a \left( \frac{t - \Delta t_p}{L} \right) \right| \right)^2 + \left( \sum_{p=1}^L \left| a \left( \frac{t - \Delta t_p}{L} \right) \right| \right)^2 \right\}, \quad (2.5)$$

где штрих над  $\Sigma$  означает, что суммирование ведется по четным  $p$ , а два штриха – по нечетным  $p$ .

Перейдем теперь к рассмотрению знаменателя (2.1). Как и в случае с числителем, достаточно рассмотреть математическое ожидание на произвольном интервале времени длительностью  $T$ . В качестве такого интервала снова выберем окончание  $k$ -го тактового интервала первой компоненты (1.41):

$$P_{\text{cp}} = \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{NLT} \int_{-LT/2}^{-LT/2 + NLT + (L-1)T} y_{LN}^2(t) dt \right\} = \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_{LT/2 - T + kLT}^{LT/2 + kLT} y_{LN}^2(t) dt \right\}.$$

Подставим (2.2) вместо  $y_{LN}^2(t)$  и пренебрежем быстроосциллирующей составляющей:

$$\begin{aligned}
P_{\text{cp}} &= \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_{LT/2-T+kLT}^{LT/2+kLT} y_{LN}^2(t) dt \right\} = \\
&= \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_{LT/2-T+kLT}^{LT/2+kLT} \left( \sum_{p=1}^L \sum_{d=1}^L A_{r_p}^{(k)} A_{q_d}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) a_d^{(k)}(t, L) \cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)}) \right) \cos^2(2\pi f_0 t) dt \right\} \approx \\
&\approx \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{LT/2-T+kLT}^{LT/2+kLT} \left( \sum_{p=1}^L \sum_{d=1}^L A_{r_p}^{(k)} A_{q_d}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) a_d^{(k)}(t, L) \cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)}) \right) dt \right\} = \\
&= \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{LT/2-T+kLT}^{LT/2+kLT} \left( \sum_{p=1}^L A_{r_p}^{(k)2} a_p^{(k)2}(t, L) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \sum_{p=1}^{L-1} \sum_{d=p+1}^L A_{r_p}^{(k)} A_{q_d}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) a_d^{(k)}(t, L) \cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)}) \right) dt \right\} = \\
&= \frac{1}{2T} \int_{LT/2-T+kLT}^{LT/2+kLT} \left( \sum_{p=1}^L \mathbf{E} \{ A_{r_p}^{(k)2} \} a_p^{(k)2}(t, L) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{p=1}^{L-1} \sum_{d=p+1}^L \mathbf{E} \{ A_{r_p}^{(k)} A_{q_d}^{(k)} \cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)}) \} a_p^{(k)}(t, L) a_d^{(k)}(t, L) \right) dt.
\end{aligned}$$

Учитывая, что для созвездий КАМ

$$\mathbf{E} \{ A_{r_p}^{(k)2} \} = \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left\{ A_{r_p}^{(k)} A_{q_d}^{(k)} \cos(\varphi_{r_p}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(k)}) \right\} &= \mathbf{E} \left\{ A_{r_p}^{(k)} \cos(\varphi_{r_p}^{(k)}) A_{q_d}^{(k)} \cos(\varphi_{q_d}^{(k)}) - \right. \\
&\quad \left. - A_{r_p}^{(k)} \sin(\varphi_{r_p}^{(k)}) A_{q_d}^{(k)} \sin(\varphi_{q_d}^{(k)}) \right\} = \mathbf{E} \left\{ Z_{r_p^c}^{(k)} Z_{q_d^c}^{(k)} - Z_{r_p^s}^{(k)} Z_{q_d^s}^{(k)} \right\} = \\
&= \mathbf{E} \left\{ Z_{r_p^c}^{(k)} Z_{q_d^c}^{(k)} \right\} - \mathbf{E} \left\{ Z_{r_p^s}^{(k)} Z_{q_d^s}^{(k)} \right\} = 0,
\end{aligned}$$

получим

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{2T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \int_{LT/2-T+kLT}^{LT/2+kLT} \left( \sum_{p=1}^L a_p^{(k)2}(t, L) \right) dt.$$

Для упрощения записи перейдем к рассмотрению первого ( $k = 0$ ) тактового интервала и сделаем обратную замену (1.42):

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{2T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \int_{LT/2-T}^{LT/2} \left( \sum_{p=1}^L \frac{1}{L} a^2 \left( \frac{t - \Delta t_p}{L} \right) \right) dt.$$

Далее поменяем местами знаки суммирования и интегрирования и в каждом интеграле сделаем замену переменной  $x = (t - \Delta t_p)/L$ :

$$\begin{aligned} P_{\text{cp}} &= \frac{1}{2T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \sum_{p=1}^L \int_{T/2-T/L-\Delta t_p/L}^{T/2-\Delta t_p/L} a^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{2T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \sum_{p=1}^L \int_{T/2-pT/L}^{T/2-pT/L+T/L} a^2(x) dx. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что при изменении  $p$  от 1 до  $L$  пределы интегрирования слагаемых точно покрывают интервал  $[-T/2, T/2]$ :

$$P_{\text{cp}} = \mathbf{E} \left\{ \frac{1}{T} \int_{LT/2-T+kLT}^{LT/2+kLT} y_{LN}^2(t) dt \right\} = \frac{1}{2T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \int_{-T/2}^{T/2} a^2(t) dt. \quad (2.6)$$

Переходя в (2.3) к первому ( $k = 0$ ) тактовому интервалу и опуская индекс  $k$  для сокращения записи, а также используя (2.6), запишем выражение для вычисления пик-фактора  $L$ -компонентных сигналов с КАМ:

$$\Pi = 2 \frac{3(\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M} + 1} \frac{\frac{1}{L} \max_{t \in \left[ \frac{LT}{2}-T; \frac{LT}{2} \right]} \left\{ \sum_{p=1}^L \sum_{d=1}^L A_{r_p} A_{q_d} a \left( \frac{t - \Delta t_p}{L} \right) a \left( \frac{t - \Delta t_d}{L} \right) \cos(\varphi_{r_p} - \varphi_{q_d}) \right\}}{E_a / T}. \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) позволяет вычислять пик-фактор многокомпонентных сигналов, у которых в каждой компоненте используется созвездие КАМ, причем созвездия разных компонент могут быть повернуты друг относительно друга. Легко видеть, что для случая АФМ в (2.7) достаточно заменить  $\sqrt{M}$  на  $M$ . Если в каждой компоненте используется одинаковая КАМ, т.е. созвездия разных компонент не повернуты друг относительно друга, то (2.7) значительно упрощается:

$$\Pi = 2 \frac{3(\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M} + 1} \frac{\frac{1}{L} \max_{t \in \left[ \frac{LT}{2}-T; \frac{LT}{2} \right]} \left\{ \left( \sum_{p=1}^L \left| a \left( \frac{t - \Delta t_p}{L} \right) \right| \right)^2 \right\}}{E_a / T}. \quad (2.8)$$

Для АФМ в (2.8) достаточно заменить  $\sqrt{M}$  на  $M$ . Обратим внимание, что для  $L = 1$  (2.8) совпадает с (1.10), что и следовало ожидать.

Для сигналов с АФМ, когда созвездия компонент с четными номерами повернуты на угол  $\alpha = \pi/2$  относительно компонент с нечетными номерами, получим:

$$\Pi = 2 \frac{3(M-1)}{M+1} \frac{\frac{1}{L} \max_{t \in \left[ \frac{LT}{2}-T; \frac{LT}{2} \right]} \left\{ \left( \sum_{p=1}^L \left| a \left( \frac{t - \Delta t_p}{L} \right) \right| \right)^2 + \left( \sum_{p=1}^L \left| a \left( \frac{t - \Delta t_p}{L} \right) \right| \right)^2 \right\}}{E_a / T}, \quad (2.9)$$

где штрих над  $\Sigma$  означает, что суммирование ведется по четным  $p$ , а два штриха – по нечетным  $p$ .

В табл. 2.1 представлены значения пик-фактора многокомпонентных сигналов (1.41) с КАМ для  $L = 2, 4, 8$  и разных видов огибающей  $a(t)$ , рассчитанные по (2.8).

Табл. 2.1

| Огибающая        | $L$ | $M = 4$ | $M = 16$ | $M = \infty$ |
|------------------|-----|---------|----------|--------------|
| Вида $\cos(x)$   | 1   | 4,00    | 7,20     | 12,00        |
|                  | 2   | 4,00    | 7,20     | 12,00        |
|                  | 4   | 6,83    | 12,29    | 20,49        |
|                  | 8   | 13,14   | 23,65    | 39,41        |
| Вида $\cos^2(x)$ | 1   | 5,33    | 9,60     | 16,00        |
|                  | 2   | 2,67    | 4,80     | 8,00         |
|                  | 4   | 5,33    | 9,60     | 16,00        |
|                  | 8   | 10,67   | 19,20    | 32,00        |

Из анализа представленных данных следует, что, во-первых, переход к многокомпонентным сигналам с  $L = 2$  может приводить к уменьшению пик-фактора, как, например, для сигналов с огибающей вида  $\cos^2(x)$ . Во-вторых, последующее увеличение глубины межсимвольной интерференции, например переход от  $L = 2$  к  $L = 4$ , неизбежно приводит к увеличению пик-фактора. Тем не

менее, полученные результаты, по-видимому, нельзя обобщать на сигналы с произвольной формой огибающей, и следует их понимать в том смысле, что задача снижения пик-фактора также должна учитываться при оптимизации формы огибающей.

## 2.2. Спектральные характеристики многокомпонентных сигналов

Рассмотрим энергетический спектр многокомпонентного сигнала (1.41):

$$G(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NLT} \mathbf{E} \left\{ \left| \sum_{p=1}^N S_{LN}^{(p)}(\omega) \right|^2 \right\}, \quad (2.10)$$

где  $S_{LN}^{(p)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_{LN}^{(p)}(t) \exp(-j\omega t) dt$  – спектр усеченной  $N$ -элементной реализации  $p$ -й компоненты  $L$ -компонентного сигнала. Аналогично тому, как это было сделано в разд. 1.3, представим  $S_{LN}^{(p)}(\omega)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{LN}^{(p)}(\omega) &= \int_{-LT/2+\Delta t_p}^{-LT/2+\Delta t_p+NLT} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{L}} A_{r_p}^{(k)} a\left(\frac{t-\Delta t_p-kLT}{L}\right) \cos(\omega_0 t + \varphi_{r_p}^{(k)}) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-LT/2+\Delta t_p}^{-LT/2+\Delta t_p+NLT} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{L}} A_{r_p}^{(k)} \exp(j\varphi_{r_p}^{(k)}) a\left(\frac{t-\Delta t_p-kLT}{L}\right) \exp(-j(\omega-\omega_0)t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-LT/2+\Delta t_p}^{-LT/2+\Delta t_p+NLT} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{L}} A_{r_p}^{(k)} \exp(-j\varphi_{r_p}^{(k)}) a\left(\frac{t-\Delta t_p-kLT}{L}\right) \exp(j(-\omega-\omega_0)t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ S_{LN}^{(p)}(\omega-\omega_0) + S_{LN}^{(p)*}(\omega+\omega_0) \right]. \end{aligned}$$

Продолжим преобразования спектра  $p$ -й компоненты в области положительных частот. Поменяем местами знак суммы и интеграл, и заменим переменную  $x = (t - \Delta t_p - kLT)/L$ :

$$S_{LN}^{(p)}(\omega-\omega_0) = \int_{-LT/2+\Delta t_p}^{-LT/2+\Delta t_p+NLT} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_{r_p}^{(k)}}{\sqrt{L}} \exp(j\varphi_{r_p}^{(k)}) a\left(\frac{t-\Delta t_p-kLT}{L}\right) \exp(-j(\omega-\omega_0)t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_{r_p}^{(k)}}{\sqrt{L}} \exp(j\varphi_{r_p}^{(k)}) \exp(-j(\omega - \omega_0)(\Delta t_p + kLT)) L \int_{-T/2}^{T/2} a(x) \exp(-j(\omega - \omega_0)Lx) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{L}} F_a^{(L)}(\omega - \omega_0) \sum_{k=0}^{N-1} A_{r_p}^{(k)} \exp(j\varphi_{r_p}^{(k)}) \exp(-j(\omega - \omega_0)(\Delta t_p + kLT)) = \\
&= \sqrt{L} F_a(L(\omega - \omega_0)) \exp(-j(\omega - \omega_0)\Delta t_p) \sum_{k=0}^{N-1} A_{r_p}^{(k)} \exp(j\varphi_{r_p}^{(k)}) \exp(-j(\omega - \omega_0)kLT),
\end{aligned}$$

где

$$F_a^{(L)}(\omega - \omega_0) = L \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \exp(-j(\omega - \omega_0)Lt) dt = L F_a(L(\omega - \omega_0)) \quad (2.11)$$

есть спектр огибающей  $a(t/L)$ .

С учетом относительной узкополосности рассматриваемых сигналов снова представим энергетический спектр (2.10) в виде

$$G(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NLT} \mathbf{E} \left\{ \left| \sum_{p=1}^N S_{LN}^{(p)}(\omega) \right|^2 \right\} = G_+(\omega) + G_-(\omega),$$

где

$$\begin{aligned}
G_+(\omega) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4NLT} \mathbf{E} \left\{ \sum_{p=1}^L \left| S_{LN}^{(p)}(\omega - \omega_0) \right|^2 + 2 \sum_{p=1}^{L-1} \sum_{d=p+1}^L \operatorname{Re} \left( S_{LN}^{(p)}(\omega - \omega_0) S_{LN}^{(d)*}(\omega - \omega_0) \right) \right\}, \\
G_-(\omega) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4NLT} \mathbf{E} \left\{ \sum_{p=1}^L \left| S_{LN}^{(p)}(\omega + \omega_0) \right|^2 + 2 \sum_{p=1}^{L-1} \sum_{d=p+1}^L \operatorname{Re} \left( S_{LN}^{(p)}(\omega + \omega_0) S_{LN}^{(d)*}(\omega + \omega_0) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее слагаемые под знаком предела для  $G_+(\omega)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left\{ \left| S_{LN}^{(p)}(\omega - \omega_0) \right|^2 \right\} &= L \left| F_a(L(\omega - \omega_0)) \right|^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \exp(-j(\omega - \omega_0)(k-l)LT) \times \\
&\quad \times \mathbf{E} \left\{ A_{r_p}^{(k)} A_{q_p}^{(l)} \exp(j\varphi_{r_p}^{(k)} - j\varphi_{q_p}^{(l)}) \right\}.
\end{aligned} \quad (2.12)$$

Как было показано для однокомпонентных сигналов

$$\mathbf{E} \left\{ A_{r_p}^{(k)} A_{q_p}^{(l)} \exp(j\varphi_{r_p}^{(k)} - j\varphi_{q_p}^{(l)}) \right\} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)}, & k = l. \end{cases} \quad (2.13)$$

Учитывая (2.13), преобразуем (2.12):

$$\mathbf{E} \left\{ \left| S_{LN}^{(p)}(\omega - \omega_0) \right|^2 \right\} = NL \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \left| F_a(L(\omega - \omega_0)) \right|^2. \quad (2.14)$$

Аналогично (2.14), легко показать, что

$$\mathbf{E} \left\{ \operatorname{Re} \left( S_{LN}^{(p)}(\omega - \omega_0) S_{LN}^{(d)*}(\omega - \omega_0) \right) \right\} = 0. \quad (2.15)$$

Используя (2.14) и (2.15), получим  $G_+(\omega)$ :

$$G_+(\omega) = \frac{1}{4LT} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \left| F_a^{(L)}(\omega - \omega_0) \right|^2 = \frac{L}{4T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \left| F_a(L(\omega - \omega_0)) \right|^2, \quad (2.16)$$

и аналогичный вид энергетический спектр имеет в области  $\omega < 0$ :

$$G_-(\omega) = \frac{1}{4LT} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \left| F_a^{(L)}(\omega + \omega_0) \right|^2 = \frac{L}{4T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \left| F_a(L(\omega + \omega_0)) \right|^2.$$

Легко показать, что для сигналов с АФМ в (2.16) необходимо лишь заменить  $\sqrt{M}$  на  $M$ . Из (2.16) видно, что, во-первых, как и для однокомпонентных сигналов, энергетический спектр многокомпонентных сигналов с КАМ и АФМ определяется лишь огибающей  $a(t)$ . Во-вторых, энергетический спектр многокомпонентных сигналов с точностью до коэффициента  $L$  по оси ординат и коэффициента  $L$  по оси абсцисс совпадает со спектром однокомпонентных сигналов. Это говорит о том, что при сохранении вида огибающей  $a(t)$  и увеличении числа компонент можно сколь угодно уменьшать полосу частот, определяемую по любому критерию. Конечно, при этом уровень МСИ будет быстро возрастать.

### 2.3. Прием многокомпонентных сигналов

При переходе к многокомпонентным сигналам функционал отношения правдоподобия (1.18) изменяется. В данном случае необходимо рассматривать условные распределения, разбивая их на группы, приводящие к одному исходу. Рассмотрим (1.41), считая, что в каждой компоненте используется  $M$ -ичное созвездие. Тогда при передаче в  $p$ -й компоненте ( $p = 1, 2, \dots, L$ ) на  $k$ -м тактовом интервале  $t \in [-LT/2 + \Delta t_p + kLT, LT/2 + \Delta t_p + kLT]$   $r$ -го сигнала ( $r = 1, 2, \dots, M$ )

существует  $M^{2(L-1)}$  комбинаций для остальных компонент. Пронумеруем комбинации  $(L-1)$  компонент и обозначим суммарный сигнал  $s_{pr}(t, c)$ , подразумевая таким образом, что в  $p$ -й компоненте передается  $r$ -й сигнал, и при этом номер комбинации остальных составляющих есть  $c$  ( $c = 1, 2, \dots, M^{2(L-1)}$ ). Считая априорные вероятности появления всех комбинаций одинаковыми, запишем функционал отношения правдоподобия для  $p$ -й компоненты [10, 38, 40]:

$$\Lambda_{p,rq}(\mathbf{x}) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \Lambda_{p,rq}^{(Z)}(\mathbf{x}) = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{\sum_{c=1}^{M^{2(L-1)}} w^{(Z)}(\mathbf{x} / s_{pr}(t, c))}{\sum_{d=1}^{M^{2(L-1)}} w^{(Z)}(\mathbf{x} / s_{pq}(t, d))}. \quad (2.17)$$

Алгоритм приема, оптимальный по критерию максимума отношения правдоподобия, будет выглядеть так: в  $p$ -й компоненте регистрируется  $r$ -й сигнал  $s_{pr}(t)$ , если для всех  $r \neq q$  ( $r, q = 1, 2, \dots, M$ )

$$\Lambda_{p,rq} > 1. \quad (2.18)$$

Из (2.17) и (1.18) видно, что в числителе и знаменателе  $\Lambda_{p,rq}$  находятся суммы  $M^{2(L-1)}$  экспоненциальных слагаемых. В этом случае аналитическое исследование помехоустойчивости алгоритма становится затруднительным, и обычно производят разложение экспоненциальных функций в ряд с последующим удержанием лишь нескольких первых членов разложения, получая удовлетворительную адекватность для не очень больших значений отношения сигнал/шум. Заметим, что указанная трудность отсутствует в случае приема независимых сигналов, так как для исследования их помехоустойчивости можно рассматривать монотонную функцию  $\ln(\Lambda_{rq})$ . В связи с описанными трудностями исследования помехоустойчивости алгоритма (2.18) перейдем к алгоритму, оптимальному по *обобщенному* критерию максимума отношения правдоподобия: в  $p$ -й компоненте регистрируется  $s_{pr}(t)$ , если для всех  $r \neq q$  ( $r, q = 1, 2, \dots, M$ )

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{\max_c \{w^{(Z)}(\mathbf{x} / s_{pr}(t, c))\}}{\max_d \{w^{(Z)}(\mathbf{x} / s_{pq}(t, d))\}} > 1. \quad (2.19)$$

Поясним вкратце примерную эквивалентность алгоритмов (2.19) и (2.18). Алгоритмы тем ближе, чем больше отношение сигнал/шум, и чем дальше друг от друга разнесены все возможные полезные сигналы. В самом деле, в таком случае лишь одна условная функция плотности вероятности – та, которая соответствует действительно передаваемому сигналу – имеет превалирующее значение (например, на порядок больше других), и в числителе нет смысла учитывать остальные слагаемые. Рассматривая знаменатель, можно убедиться в том, что нет разницы, какое из слагаемых в сумме выбрать, поскольку все они значительно (например, на порядок) меньше числителя. Таким образом, при достаточно больших отношениях сигнал/шум можно осуществлять прием сигналов на основе более простого в реализации алгоритма (2.19).

Исследование помехоустойчивости алгоритма (2.19), по существу, совпадает со случаем независимых  $M$ -ичных сигналов. Тогда можно сформулировать следующее утверждение, касающееся энергетической эффективности многокомпонентных сигналов: чем больше минимальное евклидово расстояние между всеми парами  $s_{pr}(t, c)$  и  $s_{pq}(t, c)$  для всех  $p = 1, 2, \dots, L, r \neq q$  ( $r, q = 1, 2, \dots, M$ ) и всех  $c, d = 1, 2, \dots, M^{2(L-1)}$ , тем выше энергетическая эффективность.

## 2.4. Задача синтеза многокомпонентных сигналов

При построении многокомпонентных сигналов на основе однокомпонентных сигналов со сглаженными огибающими, с одной стороны, в  $L$  раз повышается спектральная эффективность, а с другой – появляется межсимвольная интерференция и повышается пик-фактор сигналов, что приводит к снижению энергетической эффективности как при фиксированной пиковой, так и при фиксированной средней мощностях. В этой связи возникает задача поиска огибающей  $a(t)$  многокомпонентных сигналов (1.41), при использовании которой не только достигается минимальная средняя вредность излучения (1.25) при ограничениях на энергию (1.21) и скорость спада спектра (1.23), но и обеспечивается заданное значение пик-фактора и уровня МСИ. Решение такой задачи будет зависеть не только от заданных параметров скорости спада энергетического

спектра  $\gamma$ , величины пик-фактора  $\Pi$  и коэффициента групповой  $KG$  либо парциальной  $KP$  корреляции, но и от числа компонент  $L$ .

Как и в разд. 1.5, будем рассматривать численные решения вариационных оптимизационных задач, раскладывая искомую огибающую в усеченный ряд Фурье (1.32). Тогда минимизация функционала сводится к поиску минимума функции многих переменных при наличии дополнительных ограничений в виде линейных и нелинейных равенств и неравенств.

Решения, полученные численными методами, всегда являются неточными. В данном случае погрешность возникает уже при рассмотрении конечного числа членов ряда Фурье. Более того, нет никакого способа проверки полученного решения на принадлежность к глобальному экстремуму. Тем не менее, практически все реальные оптимизационные задачи либо не могут быть решены аналитически, либо очень трудоемки, и поэтому для их решения используются численные методы.

Также обратим внимание, что, например, условие на заданную величину пик-фактора не может быть описано в виде конечного числа уравнений, так как (2.7) включает в себя перебор всех значений  $t \in [LT/2 - T, LT/2]$ . Взамен этого можно рассмотреть (2.7) для нескольких значений  $t$  из указанного интервала. Понятно, что чем больше количество рассматриваемых значений, тем точнее будет ограничен пик-фактор. С другой стороны, при учете конечного числа членов разложения  $m$  искомого решения в ряд Фурье и наличии условия (1.21) скорость изменения искомой огибающей оказывается ограниченной и, следовательно, учет даже небольшого числа значений  $t$  оказывается достаточным, чтобы получить приемлемый результат. Отметим, что исключением из описанной сложности является случай, когда пик-фактор ограничивается своим предельным значением 2 (для сигналов с высокочастотным заполнением). Тогда можно заменить перебор в (2.7) всех значений  $t$  интегральным условием вида:

$$\frac{1}{T} \int_{LT/2-T}^{LT/2} \frac{P(t)}{P_{\text{cp}}} dt = 2.$$

Из сказанного следует, что решение оптимизационной задачи численными методами – это всегда компромисс между приемлемой трудоемкостью вычислений и точностью получаемых результатов. Более того, это еще и сложный выбор начального приближения к решению, от успешности которого зависит не только количество необходимых для получения решения вычислений, но и вообще возможность получения решения близкого к глобальному, а не локальному экстремуму.

Учитывая влияние значения  $m$  на точность получаемого результата, необходимо определить правило выбора  $m$ , обеспечивающего приемлемую точность решения оптимизационной задачи. Обозначим коэффициенты разложения решения оптимизационной задачи в усеченный ряд Фурье как последовательность  $\{a_k^{(m)}\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ , и рассмотрим квадрат среднеквадратического отклонения решений  $\{a_k^{(m)}\}$  и  $\{a_k^{(m+1)}\}$  для многокомпонентных сигналов (т.е. для огибающей  $a(t/L) / \sqrt{L}$ ):

$$\sigma_{m,m+1}^2 = \frac{1}{LT} \int_{-LT/2}^{LT/2} \left[ \left( \frac{a_0^{(m)}}{2} + \sum_{k=1}^m a_k^{(m)} \cos\left(\frac{2\pi}{LT} kt\right) \right) - \left( \frac{a_0^{(m+1)}}{2} + \sum_{k=1}^{m+1} a_k^{(m+1)} \cos\left(\frac{2\pi}{LT} kt\right) \right) \right]^2 dt. \quad (2.20)$$

Формально добавив в решение  $\{a_k^{(m)}\}$  коэффициент  $a_{m+1}^{(m)} = 0$ , который не изменяет решение, преобразуем (2.20):

$$\begin{aligned} \sigma_{m,m+1}^2 &= \frac{1}{LT} \int_{-LT/2}^{LT/2} \left[ \frac{a_0^{(m)} - a_0^{(m+1)}}{2} + \sum_{k=1}^{m+1} (a_k^{(m)} - a_k^{(m+1)}) \cos\left(\frac{2\pi}{LT} kt\right) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \frac{a_0^{(m)} - a_0^{(m+1)}}{2} + \sum_{k=1}^{m+1} (a_k^{(m)} - a_k^{(m+1)}) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right]^2 dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись результатом (1.37), окончательно получим

$$\sigma_{m,m+1}^2 = \frac{1}{4} (a_0^{(m)} - a_0^{(m+1)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+1} (a_k^{(m)} - a_k^{(m+1)})^2.$$

Будем считать, что решение  $\{a_k^{(m)}\}$  обеспечивает необходимую точность, если  $\sigma_{m,m+1} \leq 0,001$ . Значение 0,001 выбрано эвристически, но, как показывают

расчеты, в этом случае отклонения характеристик сигналов, построенных на основе численного решения  $\{a_k^{(m)}\}$  или аналитического решения (если оно существует) или численного решения  $\{a_k^{(m+z)}\}$  при любом целом  $z \gg 1$ , оказываются настолько малы, что различием характеристик можно пренебречь при сравнении решений различных оптимизационных задач.

Для определения необходимого  $m$ , предлагается следующий подход. На первом шаге выбирается значение  $m$ , совпадающее с числом членов разложения в ряд Фурье начального приближения поставленной оптимизационной задачи. Далее с каждым шагом  $m$  увеличивается на 1 и ищется решение той же оптимизационной задачи до тех пор пока не выполнится условие  $\sigma_{m, m+1} \leq 0,001$ . Возможна ситуация, когда уже на первом шаге увеличения  $m$  среднеквадратическое отклонение окажется меньше 0,001. В этом случае необходимо с каждым шагом уменьшать  $m$  на 1.

В качестве начального приближения решения каждой оптимизационной задачи с дополнительными ограничениями в данной работе используется решение задачи с максимально похожим набором ограничений [15]. Желательно, чтобы набор ограничений, при котором получено предлагаемое начальное приближение, входил в набор ограничений решаемой задачи. Например, при решении задачи отыскания огибающей, минимизирующей среднюю вредность излучения при ограничении на энергию огибающей и скорость спада спектра, в качестве начального приближения можно использовать огибающую вида  $\cos^n(\pi t/T)$  (конечно, нормированную по энергии), где  $n$  выбирается исходя из условия на скорость спада спектра. В этом случае все дополнительные условия вариационной задачи уже выполнены, и остается только отыскать минимум функционала. Учитывая, что начальное приближение уже находится в допустимой области решений поставленной вариационной задачи, вероятность найти решение близкое к глобальному экстремуму высока. При добавлении к предыдущей задаче условия на величину корреляции можно использовать решение предыдущей задачи и т.д.

Рассмотрим, как изменятся выражения (1.36) для функционала, (1.37) для энергии огибающей и (1.39) для граничных условий при переходе к многокомпонентным сигналам. Прежде всего, учитывая, что огибающая многокомпонентных сигналов определяется на интервале  $[-LT/2, LT/2]$ , запишем её разложение в ряд Фурье:

$$\frac{a(t/L)}{\sqrt{L}} = \frac{1}{\sqrt{L}} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left( \frac{2\pi}{LT} kt \right) \right). \quad (2.21)$$

Получим выражение для средней вредности излучения многокомпонентных сигналов аналогично (1.25) учитывая (2.16):

$$\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \frac{1}{L} |F_a^{(L)}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) L |F_a(L\omega)|^2 d\omega. \quad (2.22)$$

Как и в случае (1.25) в выражении (2.22) опущен коэффициент

$$\frac{1}{T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)}.$$

В (2.22) встает вопрос о выборе функции вредности  $g(\omega)$ . С одной стороны, её можно оставить такой же, как для однокомпонентных сигналов

$$g(\omega) = \omega^{2n}, \quad (2.23)$$

с другой стороны, с учетом того, что энергетический спектр многокомпонентных сигналов оказывается сжатым по оси частот (абсцисс) в  $L$  раз по отношению к однокомпонентным сигналам, необходимо рассматривать

$$g(\omega) = (L\omega)^{2n}. \quad (2.24)$$

Докажем тот факт, что независимо от выбора  $g(\omega)$  в соответствии с (2.23) или (2.24) результат минимизации средней вредности излучения окажется одинаковым; более того, он совпадет с решением (1.25):

$$\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2n} L |F_a(L\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{L^{2n}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2n} |F_a(\omega)|^2 d\omega \quad (2.25)$$

и

$$\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (L\omega)^{2n} L |F_a(L\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{2n} |F_a(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.26)$$

Видно, что (2.25) и (2.26), соответствующие функциям вредности (2.23) и (2.24), совпадают с точностью до константы, которая влияет не на результат решения, а лишь на получаемое значение средней вредности излучения. Таким образом, как и в случае однокомпонентных сигналов, минимизация средней вредности излучения соответствует минимизации функции многих переменных (1.36)

$$J = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left( \frac{2\pi}{T} k \right)^{2n}.$$

Вычислим энергию огибающей многокомпонентных сигналов:

$$\begin{aligned} E_a^{(L)} &= \int_{-LT/2}^{LT/2} \frac{1}{L} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left( \frac{2\pi}{LT} kt \right) \right)^2 dt = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left( \frac{2\pi}{T} kt \right) \right)^2 dt = E_a. \end{aligned}$$

Следовательно, условие нормировки энергии не зависит от количества компонент и совпадает с (1.38):

$$\frac{T}{2} \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) = 1.$$

Перейдем к граничным условиям (1.23). Рассмотрим значения нечетной производной огибающей многокомпонентных сигналов в моменты времени  $t = \pm LT/2$ :

$$\frac{1}{\sqrt{L}} a^{(b)}(t/L) \Big|_{t=\pm LT/2} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^{\frac{b+1}{2}} \left( \frac{2\pi}{LT} k \right)^b \sin \left( \frac{2\pi}{LT} kt \right) \Big|_{t=\pm LT/2} = 0, \quad b - \text{нечетное.}$$

Как и в случае однокомпонентных сигналов, эти условия оказываются выполненными всегда. Рассмотрим четные производные:

$$\frac{1}{\sqrt{L}} a^{(b)}(t/L) \Big|_{t=\pm LT/2} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^{\frac{b}{2}} \left( \frac{2\pi}{LT} k \right)^b \cos \left( \frac{2\pi}{LT} kt \right) \Big|_{t=\pm LT/2} = \frac{1}{L^{b+1/2}} a^{(b)}(t) \Big|_{t=\pm T/2},$$

$b - \text{четное.}$

Хотя значения производной огибающей одно- и многокомпонентных сигналов отличаются в  $L^{b+1/2}$  раз, тем не менее, при ограничении значения производной

на концах тактового интервала нулем, константа не влияет на решение. Таким образом, граничные условия, определяемые необходимой скоростью спада спектра многокомпонентных сигналов, совпадают с (1.39):

$$\frac{a_0}{2}(1 - \text{sign}(b)) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^{k+\frac{b}{2}} \left( \frac{2\pi}{T} k \right)^b = 0, \quad 0 \leq b \leq n-1, \quad b - \text{четное}.$$

Итак, показано, что выражения для функционала, энергии огибающей и граничных условий при переходе от однокомпонентных к многокомпонентным сигналам остаются неизменными [23]. Перейдем теперь к рассмотрению ограничений на пик-фактор и корреляционные свойства многокомпонентных сигналов.

Для ограничения пик-фактора будем рассматривать  $P = 16$  моментов времени  $t_i$  из интервала  $t \in [LT/2 - T, LT/2]$ :

$$t_i = LT/2 - T + iT/P, \quad i = 1, 2, 3, \dots, P. \quad (2.27)$$

Предлагаемая последовательность  $\{t_i\}$ , дополненная  $t_0 = LT/2 - T$ , образует равномерную решетку на интервале  $t \in [LT/2 - T, LT/2]$ , однако ограничивать значение пик-фактора в момент  $t_0$  нет необходимости, так как это ограничение совпадает с ограничением в момент  $t_p$ . Запишем ограничение пик-фактора сигналов с КАМ значением  $\rho$  в виде системы  $P$  нелинейных неравенств:

$$\frac{2T}{L} \frac{3(\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M} + 1} \left( \sum_{p=1}^L \left| a \left( \frac{t_i - \Delta t_p}{L} \right) \right| \right)^2 \leq \rho, \quad (2.28)$$

где  $i = 1, 2, \dots, P$ , здесь также учтено условие нормировки энергии (1.21). Подстановка (2.21) в условие (2.28) не приводит к существенным упрощениям, поэтому указанное условие будет использоваться в исходном виде.

В разд. 1.6 были определены коэффициенты парциальной (1.43) и групповой (1.44) корреляций. Значения указанных коэффициентов корреляции определяют уровень МСИ, наличие которой приводит к ухудшению помехоустойчивости приема, и, следовательно, снижению энергетической эффективности. По-видимому, для многокомпонентных сигналов с  $L > 2$  невозможно аналитически доказать наличие однозначной связи минимального эвклидова расстоя-

ния с тем или иным коэффициентом корреляции. Поэтому воспользуемся следующим эмпирическим правилом: меньшим значениям коэффициента корреляции соответствует лучшая помехоустойчивость и наоборот.

Определим максимальные значения коэффициентов парциальной и групповой корреляций. Учитывая симметричность многокомпонентного сигнала (1.41) относительно разных компонент и разных тактовых интервалов (рис. 2.1), достаточно рассматривать оба коэффициента корреляции лишь на одном тактовом интервале одной компоненты. Выберем  $k$ -й тактовый интервал 1-й компоненты.

Рассмотрим коэффициент парциальной корреляции сигнала  $k$ -го тактового интервала 1-й компоненты и сигнала  $l$ -го тактового интервала  $d$ -й компоненты:

$$\begin{aligned} KP_{1,d}^{(k,l)} &= \frac{1}{L} \int_{-LT/2}^{-LT/2+NL T+(L-1)T} A_{r_1}^{(k)} a_1^{(k)}(t, L) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{r_1}^{(k)}) A_{q_d}^{(l)} a_d^{(l)}(t, L) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_{q_d}^{(l)}) dt = \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-LT/2}^{-LT/2+NL T+(L-1)T} A_{r_1}^{(k)} A_{q_d}^{(l)} a_1^{(k)}(t, L) a_d^{(l)}(t, L) \{ \cos(\varphi_{r_1}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(l)}) + \cos(4\pi f_0 t + \varphi_{r_1}^{(k)} + \varphi_{q_d}^{(l)}) \} dt. \end{aligned}$$

Отбросим быстроосциллирующую составляющую:

$$KP_{1,d}^{(k,l)} \approx \frac{1}{2L} A_{r_1}^{(k)} A_{q_d}^{(l)} \cos(\varphi_{r_1}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(l)}) \int_{-LT/2}^{-LT/2+NL T+(L-1)T} a_1^{(k)}(t, L) a_d^{(l)}(t, L) dt. \quad (2.29)$$

Дальнейшие рассуждения зависят от выбора вида модуляционных созвездий компонент. Если сигнал состоит из двух компонент и в каждой используется АФМ, причем созвездия разных компонент повернуты друг относительно друга на угол  $\alpha = \pi/2$ , то все коэффициенты парциальной корреляции окажутся нулевыми. В таком случае компоненты будут ортогональны. Рассмотрим случай, когда во всех компонентах используется одинаковая КАМ. Учитывая, что

$$\max \{ A_{r_1}^{(k)} \} = \max \{ A_{q_d}^{(l)} \} = 1$$

и

$$\max \{ \cos(\varphi_{r_1}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(l)}) \} = 1,$$

получим максимальное значение коэффициента парциальной корреляции сигнала  $k$ -го тактового интервала 1-й компоненты и сигнала  $l$ -го тактового интервала  $d$ -й компоненты:

$$\max_{A,\varphi,l} \{ KP_{1,d}^{(k,l)} \} = \max_l \left\{ \frac{1}{2L} \left| \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_1^{(k)}(t,L) a_d^{(l)}(t,L) dt \right| \right\}. \quad (2.30)$$

Учитывая, что для первой компоненты ненулевыми могут быть только  $KP_{1,d}^{(k,k-1)}$  и  $KP_{1,d}^{(k,k)}$ , в правой части (2.30) необходимо рассмотреть 2 варианта:  $l = k - 1$  и  $l = k$ . Переходя к определению максимального коэффициента парциальной корреляции  $k$ -го тактового интервала 1-й компоненты и сигнала любого тактового интервала любой компоненты, получим:

$$\max_{A,\varphi,l,d} \{ KP_{1,d}^{(k,l)} \} = \max_{l,d} \left\{ \frac{1}{2L} \left| \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_1^{(k)}(t,L) a_d^{(l)}(t,L) dt \right| \right\}, \quad (2.31)$$

где максимум в правой части ищется по  $l = k - 1$ ,  $l = k$  и  $d = 2, 3, \dots, L$ . Перебор всех возможных пар  $(d, l)$  в правой части (2.31) предполагает рассмотрение  $2(L - 1)$  комбинаций, хотя различных значений интеграла будет только  $(L - 1)$ . Это вызвано тем, что значение интеграла в (2.31) будет одинаковым для следующих комбинаций:

$$(d = 2 + i, l = k - 1) \text{ и } (d = L - i, l = k),$$

где  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ . С учетом сказанного преобразуем (2.31):

$$\begin{aligned} \max_{A,\varphi,l,d} \{ KP_{1,d}^{(k,l)} \} &= \max_{d>1} \left\{ \frac{1}{2L} \left| \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_1^{(k)}(t,L) a_d^{(k)}(t,L) dt \right| \right\} = \\ &= \max_{d>1} \left\{ \frac{1}{2L} \left| \int_{-LT/2+kLT+\Delta t_d}^{-LT/2+kLT+LT} a\left(\frac{t-kLT}{L}\right) a\left(\frac{t-\Delta t_d-kLT}{L}\right) dt \right| \right\} = \\ &= \max_{d>1} \left\{ \frac{1}{2} \left| \int_{-T/2+kT+\Delta t_d/L}^{-T/2+kT+T} a(t-kT) a\left(t-\frac{\Delta t_d}{L}-kT\right) dt \right| \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что максимальный коэффициент парциальной корреляции сигнала  $k$ -го тактового интервала 1-й компоненты совпадает с максимальным коэффициентом парциальной корреляции многокомпонентных сигналов, получим:

$$\max_{A, \varphi, k, l, p, d} \{KP_{p,d}^{(k,l)}\} = \max_{d>1} \left\{ \frac{1}{2} \left| \int_{-T/2+\Delta t_d/L}^{T/2} a(t)a(t-\Delta t_d/L)dt \right| \right\}, \quad (2.32)$$

где максимум ищется по  $d = 2, 3, \dots, L$ . Учитывая ограничение энергии огибающей (1.21), легко видеть, что модуль значения коэффициента парциальной корреляции многокомпонентных сигналов не превышает 1/2:

$$|KP_{p,d}^{(k,l)}| \leq 1/2.$$

Следовательно, для получения нормированного коэффициента парциальной корреляции, необходимо рассматривать отношение  $KP_{p,d}^{(k,l)} / 2$ .

Используя (2.32), запишем ограничение максимального коэффициента парциальной корреляции значением  $\kappa_p \in [0, 1/2]$  в виде системы  $(L-1)$  неравенств:

$$\left| \int_{-T/2+\Delta t_d/L}^{T/2} a(t)a(t-\Delta t_d/L)dt \right| \leq 2\kappa_p, \quad d = 2, 3, \dots, L. \quad (2.33)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем сокращение МКПК – максимальный коэффициент парциальной корреляции.

Рассмотрим коэффициент групповой корреляции для сигнала  $k$ -го тактового интервала 1-й компоненты:

$$\begin{aligned} KG_1^{(k)} &= \sum_{d=2}^L \sum_{l=0}^{N-1} KP_{p,d}^{(k,l)} = \sum_{d=2}^L (KP_{1,d}^{(k,k-1)} + KP_{1,d}^{(k,k)}) = \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{d=2}^L \sum_{l=k-1}^{l=k} A_{r_1}^{(k)} A_{q_d}^{(l)} \cos(\varphi_{r_1}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(l)}) \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_1^{(k)}(t,L) a_d^{(l)}(t,L) dt. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В силу независимости выбора символов канального алфавита и, соответственно, точек сигнального созвездия в каждом тактовом интервале каждой компоненты, всегда можно подобрать такие каналные символы, что

$$A_{r_1}^{(k)} A_{q_d}^{(l)} \cos(\varphi_{r_1}^{(k)} - \varphi_{q_d}^{(l)}) = \text{sign} \left( \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_1^{(k)}(t,L) a_d^{(l)}(t,L) dt \right), \quad (2.35)$$

где  $l = k-1$ ,  $l = k$  и  $d = 2, 3, \dots, L$ . Выполнение условия (2.35) обеспечит максимальное значение коэффициента групповой корреляции для сигнала  $k$ -го тактового интервала 1-й компоненты:

$$\max\{KG_1^{(k)}\} = \frac{1}{2L} \sum_{d=2}^L \sum_{l=k-1}^{l=k} \left| \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} a_1^{(k)}(t, L) a_d^{(l)}(t, L) dt \right|. \quad (2.36)$$

Как и при рассмотрении (2.31), в (2.36) только  $(L - 1)$  различных слагаемых из имеющихся  $2(L - 1)$ . Учитывая сказанное, а также производя преобразования, аналогичные преобразованиям (2.31), получим:

$$\max\{KG_1^{(k)}\} = \sum_{d=2}^L \left| \int_{-T/2+kT+\Delta t_d/L}^{-T/2+kT+T} a(t - kT) a\left(t - \frac{\Delta t_d}{L} - kT\right) dt \right|. \quad (2.37)$$

Наконец, учитывая, что максимальный коэффициент групповой корреляции сигнала  $k$ -го тактового интервала 1-й компоненты совпадает с максимальным коэффициентом групповой корреляции многокомпонентных сигналов в целом, и переходя в (2.37) к первому тактовому интервалу, получим:

$$\max_{p,k} \{KG_p^{(k)}\} = \sum_{d=2}^L \left| \int_{-T/2+\Delta t_d/L}^{T/2} a(t) a(t - \Delta t_d / L) dt \right|. \quad (2.38)$$

Легко видеть, что модуль значения коэффициента групповой корреляции многокомпонентных сигналов не превышает  $(L - 1)$ :

$$\left| KG_p^{(k)} \right| \leq L - 1.$$

Это вызвано тем, что, по сути, он является суммой  $2(L - 1)$  коэффициентов парциальной корреляции, для которых выполнено условие нормировки. Для получения нормированного коэффициента групповой корреляции необходимо рассматривать отношение  $KG_p^{(k)} / (L - 1)$ .

Используя (2.38), запишем ограничение максимального коэффициента групповой корреляции значением  $\kappa_g \in [0, L - 1]$  в виде неравенства:

$$\sum_{d=2}^L \left| \int_{-T/2+\Delta t_d/L}^{T/2} a(t) a(t - \Delta t_d / L) dt \right| \leq \kappa_g. \quad (2.39)$$

Для упрощения дальнейшей записи введем сокращение МКГК – максимальный коэффициент групповой корреляции.

Подстановка (2.21) в условия (2.33) и (2.39) не приводит к существенным упрощениям, поэтому указанные условия будут использоваться в исходном виде.

Еще раз обратим внимание, что ограничения (2.33) и (2.39) на МКПК и МКГК верны для сигналов с КАМ любой размерности. При использовании в многокомпонентных сигналах одинаковой АФМ результат не изменится, а в случае использования в компонентах с четными номерами созвездий АФМ, повернутых на угол  $\alpha = \pi/2$  относительно созвездий компонент с нечетными номерами, результат для сигналов с числом компонент  $L$  будет совпадать с результатом для сигналов с КАМ и числом компонент  $L/2$ .

Договоримся при решении оптимизационных задач минимальным значением пик-фактора считать  $\rho = 2,01$ , а минимальным коэффициентом групповой корреляции, достаточным для минимизации МСИ, значением  $g = 0,01$ . С одной стороны, такое упрощение позволит разумно ограничить число  $m$ , а с другой – проигрыш в энергетической эффективности, например, по отношению к сигналам с пик-фактором 2,00 составит 0,02 дБ, т.е. будет незначительным.

В результате проделанных преобразований оптимизационная задача синтеза многокомпонентных сигналов свелась к задаче поиска минимума функции многих переменных (1.36) при наличии дополнительных ограничений на энергию огибающей (1.38), скорость спада спектра (1.39), величину пик-фактора колебаний (2.28) и корреляционные свойства (2.33) или (2.39).

Хотя оптимизационная задача сформулирована полно, остался нерассмотренным вопрос вычисления энергетического спектра при разложении решения в ряд Фурье. Учитывая, что энергетический спектр многокомпонентных сигналов

$$G_+(\omega) = \frac{L}{4T} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} |F_a(L(\omega - \omega_0))|^2,$$

т.е. определяется спектром огибающей, вычислим  $F_a(L(\omega - \omega_0))$ . Для этого подставим (1.32) в (2.11):

$$F_a(L2\pi\Delta f) = \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \exp(-j2\pi\Delta f L t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=0}^m b_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) \exp(-j2\pi\Delta f L t) dt,$$

где  $2\pi\Delta f = (\omega - \omega_0)$ ,  $b_0 = a_0/2$  и  $b_k = a_k$  для  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned}
F_a(L2\pi\Delta f) &= \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=0}^m b_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) (\cos(2\pi\Delta fLt) - j\sin(2\pi\Delta fLt)) dt = \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=0}^m b_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) \cos(2\pi\Delta fLt) dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=0}^m b_k \left\{ \cos(2\pi(\Delta fL + k/T)t) + \cos(2\pi(\Delta fL - k/T)t) \right\} dt.
\end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования зависят от значения  $\Delta fLT$ . Если  $\Delta fLT \neq n$ , где  $n$  – любое целое в диапазоне  $[-m, m]$ , то

$$\begin{aligned}
F_a(L2\pi\Delta f) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m b_k \left\{ \frac{2\sin(\pi(\Delta fL + k/T)T)}{2\pi(\Delta fL + k/T)} + \frac{2\sin(\pi(\Delta fL - k/T)T)}{2\pi(\Delta fL - k/T)} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m b_k \left\{ \frac{\sin(\pi(\Delta fLT + k))}{\pi(\Delta fL + k/T)} + \frac{\sin(\pi(\Delta fLT - k))}{\pi(\Delta fL - k/T)} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k \sin(\pi\Delta fLT) \frac{2\Delta fL}{(\Delta fL)^2 - (k/T)^2} = \\
&= \frac{T}{\pi} \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k \sin(\pi\Delta fLT) \frac{\Delta fLT}{(\Delta fLT)^2 - k^2}.
\end{aligned}$$

Если  $\Delta fLT = n$ , то

$$F_a(L2\pi\Delta f) = \frac{T}{2} a_{|n|}.$$

Тогда запишем выражение для определения энергетического спектра многокомпонентного сигнала при разложении огибающей в усеченный ряд Фурье:

$$\begin{aligned}
G_+(2\pi\Delta f) &= \frac{LT}{4\pi^2} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} \left| \sum_{k=0}^m (-1)^k b_k \sin(\pi\Delta fLT) \frac{\Delta fLT}{(\Delta fLT)^2 - k^2} \right|^2, \quad \Delta fLT \neq n, \\
G_+(2\pi\Delta f) &= \frac{LT}{16} \frac{\sqrt{M} + 1}{3(\sqrt{M} - 1)} a_{|n|}^2, \quad \Delta fLT = n.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Выражение (2.40) будет использовано для построения энергетического спектра и определения спектральных характеристик многокомпонентных сигналов.

## 2.5. Выводы по главе 2

1. Показано, что при сохранении вида огибающей  $a(t)$  увеличение числа компонент на первых шагах может приводить к уменьшению пик-фактора, однако в дальнейшем пик-фактор возрастает.

2. Показано, что энергетический спектр многокомпонентных сигналов с КАМ и АФМ определяется лишь огибающей  $a(t)$  и числом компонент  $L$ . При сохранении вида огибающей  $a(t)$  переход к  $L$ -компонентным сигналам приводит к повышению степени компактности энергетического спектра в  $L$  раз.

3. Поставлена оптимизационная задача поиска огибающей случайной последовательности многокомпонентных сигналов, имеющих заданную скорость спада энергетического спектра вне занимаемой полосы частот при ограничениях на величину пик-фактора и коэффициент групповой либо парциальной корреляции.

4. В качестве ограничения на пик-фактор колебаний предложено рассматривать ограничение отношения мгновенной к средней мощностям в выборочные моменты времени тактового интервала.

5. Предложено решение поставленной оптимизационной задачи путем разложения искомой огибающей в усеченный ряд Фурье, когда вариационная задача сводится к поиску минимума функции многих переменных при наличии уравнений связи.

6. Предложен метод оценки точности получаемого решения, при котором рассматривается среднеквадратическое отклонение решений, полученных для разных значений числа членов разложения в усеченный ряд Фурье.

## **Глава 3. Оптимизация формы огибающей многокомпонентных сигналов**

В предыдущей главе была поставлена оптимизационная задача поиска огибающей многокомпонентных сигналов, обеспечивающей минимальную среднюю вредность излучения при дополнительных ограничениях на скорость спада спектра, пик-фактор колебаний и коэффициент групповой либо парциальной корреляций. Было предложено разложение искомой огибающей в усеченный ряд Фурье и, таким образом, вариационная задача была сведена к задаче поиска минимума функции многих переменных.

В данной главе будут представлены решения поставленной задачи для различных комбинаций ограничений и исходных параметров. В первом разделе исследовано влияние на решение ограничения пик-фактора колебаний значением  $\rho$ , во втором – максимального коэффициента групповой, либо парциальной корреляций соответственно значениями  $\kappa_g$  и  $\kappa_p$ , наконец, в третьем разделе определено влияние одновременного ограничения и пик-фактора и коэффициента групповой корреляции. Во всех случаях рассмотрены решения для количества компонент  $L = 2, 4, 8, 16, 32$  и скорости спада энергетического спектра  $\gamma = 6, 10, 14$ .

Точность решения, полученного для числа членов разложения  $m$ , считается приемлемой, если среднеквадратическое отклонение от решения для числа членов разложения  $m + 1$  не превосходит 0,001. Поиск решений ведется для  $m \leq 40$ .

### **3.1. Оптимизация при наличии ограничений на пик-фактор колебаний**

Любое дополнительное ограничение при решении вариационной задачи либо не влияет на решение, либо приводит к худшему (с точки зрения значения минимизируемого функционала) решению. Для поставленной оптимизационной задачи решение без ограничения пик-фактора колебаний не зависит от числа компонент  $L$ , однако от  $L$  зависит значение пик-фактора получаемых много-

компонентных сигналов. Введем обозначение для пик-фактора  $L$ -компонентных сигналов при решении задачи без ограничения пик-фактора –  $\Pi_L$ .

Для исследования влияния ограничения пик-фактора значением  $\rho$  на решение задачи и, следовательно, характеристики сигналов будем рассматривать дискретный набор значений  $\rho$ . Понятно, что при выборе  $\rho > \Pi_L$  решение оптимизационной задачи не будет зависеть от  $\rho$ , поэтому для заданного  $L$  в качестве максимального значения из дискретного набора выберем  $\rho_{\max}(L) = \Pi_L$ . Как было оговорено ранее, минимальным значением будем считать  $\rho_{\min} = 2,01$ . В табл. 3.1 приведены значения  $\rho_{\max}(L)$  для многокомпонентных сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$  для различных значений  $L$ .

Табл. 3.1

| $L$              | 2    | 4    | 8     | 16    | 32    |
|------------------|------|------|-------|-------|-------|
| $\rho_{\max}(L)$ | 2,97 | 5,54 | 11,03 | 22,06 | 44,12 |

Значения  $\rho_{\min}$  и  $\rho_{\max}(L)$  образуют дискретный набор, который можно использовать для исследования влияния ограничения пик-фактора на решение оптимизационной задачи. Для повышения достоверности и наглядности получаемых результатов между каждыми соседними значениями добавим их среднее арифметическое:

$$\rho = \{2,01 \ 2,49 \ 2,97 \ 4,26 \ 5,54 \ 8,29 \ 11,03 \ 16,54 \ 22,06 \ 33,09 \ 44,12\}. \quad (3.1)$$

При решении задачи с различными значениями  $L$  необходимо использовать лишь часть набора (3.1), удовлетворяющую условию

$$\rho \leq \rho_{\max}(L).$$

Весь набор окажется задействованным только для  $L = 32$ .

При исследовании зависимости решения оптимизационной задачи от ограничения на пик-фактор будем рассматривать сигналы с ФМ-4 и ФМ-2, причем во втором случае созвездия компонент с четными номерами будут повернуты относительно созвездий компонент с нечетными номерами на угол  $\alpha = \pi/2$ . Для

созвездий больших размерностей в соответствии с (2.8) и (2.9) значения пик-фактора будут отличаться лишь коэффициентами

$$\frac{3(\sqrt{M} - 1)}{\sqrt{M} + 1}$$

и

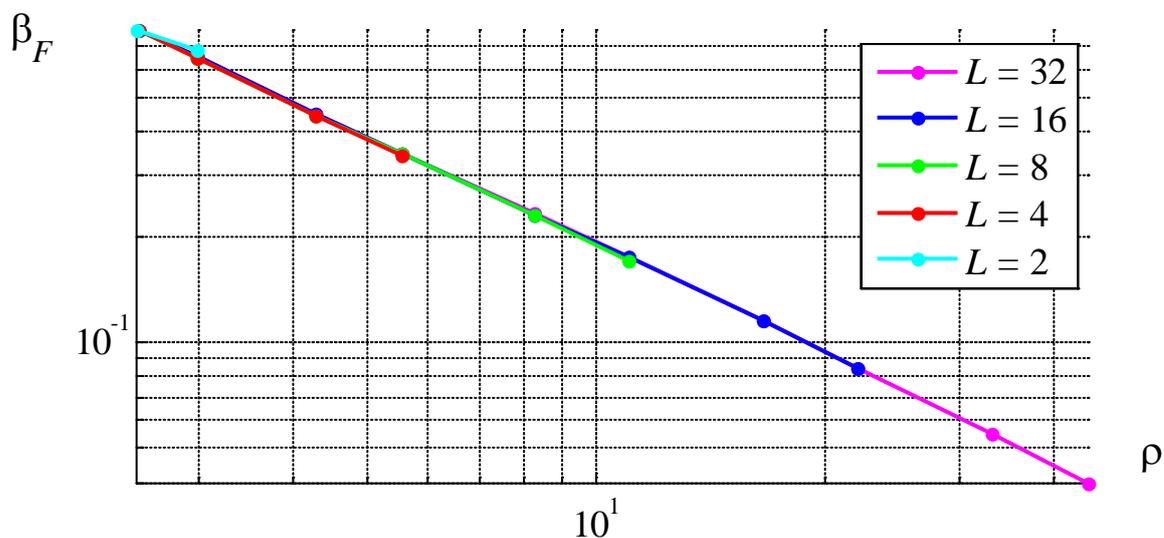
$$\frac{3(M - 1)}{M + 1}$$

соответственно, где  $M$  – по-прежнему, размерность созвездия.

### 3.1.1. Оптимизация для сигналов с ФМ-4

На рис. 3.1а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F = \Delta F_{99\%} / R$ , а на рис. 3.1б – зависимости полосы  $\Delta F_{-60 \text{ дБ}}$  от  $\rho$  для сигналов с ФМ-4,  $\gamma = 6$  и  $L = 2, 4, 8, 16, 32$ . На рис. 3.1в–г представлены зависимости получаемых максимальных коэффициентов групповой и парциальной корреляций соответственно от величины  $\rho$  для тех же условий.

С одной стороны, чем больше  $L$ , тем больше точек из набора (3.1) оказываются задействованными при построении кривой, и, следовательно, тем длиннее кривая; например, кривая для  $L = 32$  оказывается самой длинной. С другой стороны, кривые, построенные для разных  $L$ , практически совпадают. Чтобы различить кривые при цветном отображении, кривая для  $L = 32$  рисуется первой по порядку, затем для  $L = 16$  и т.д.



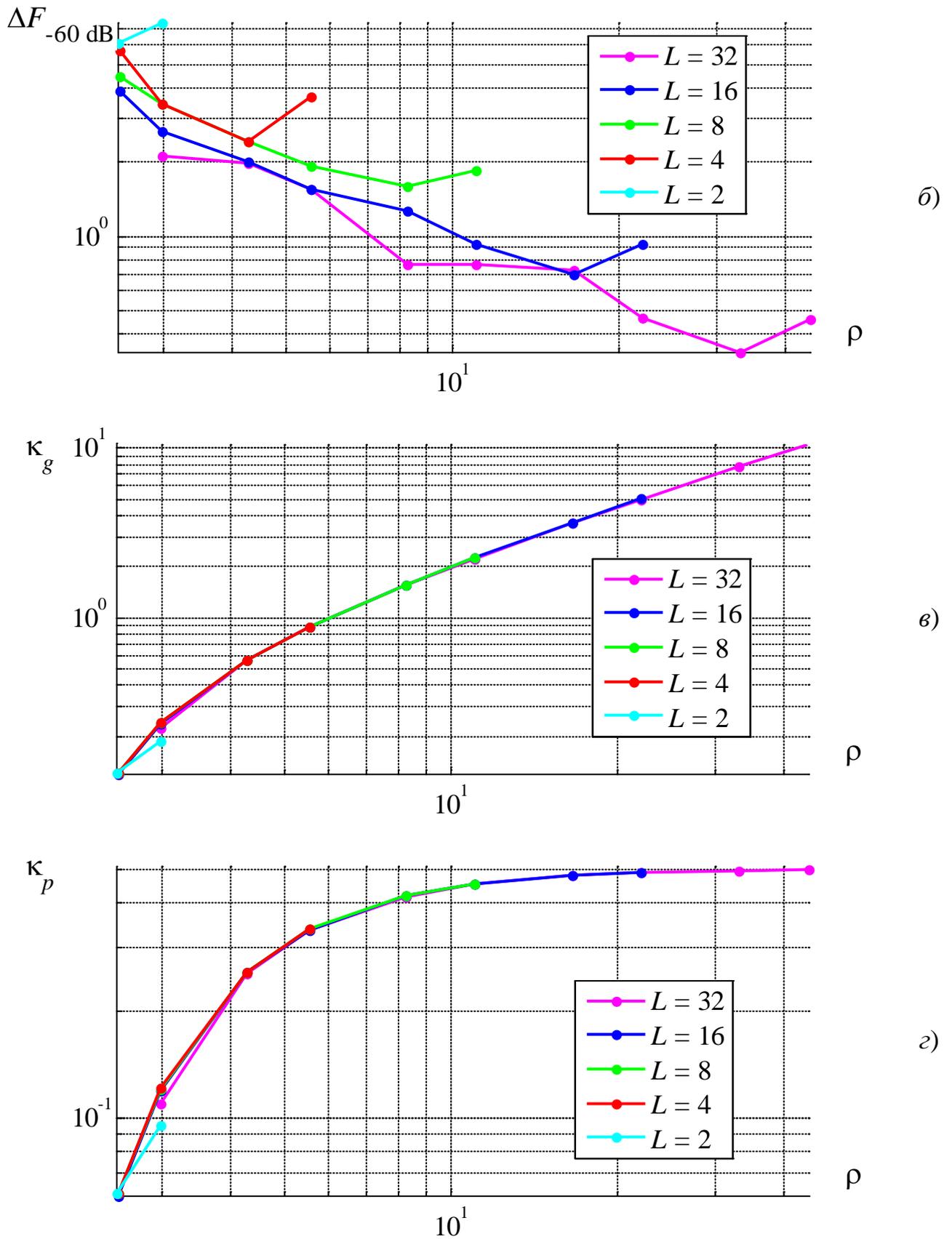
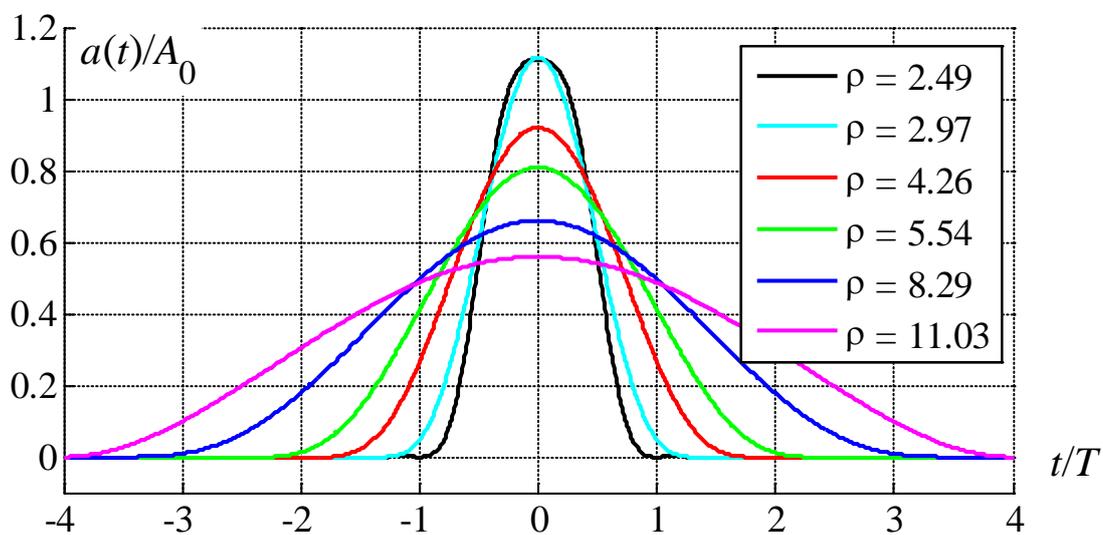
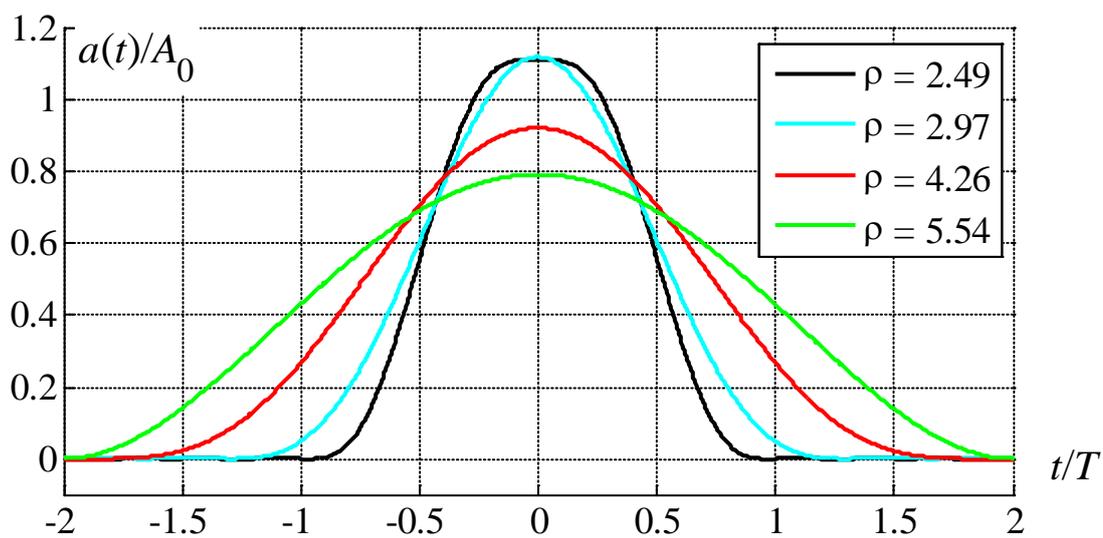
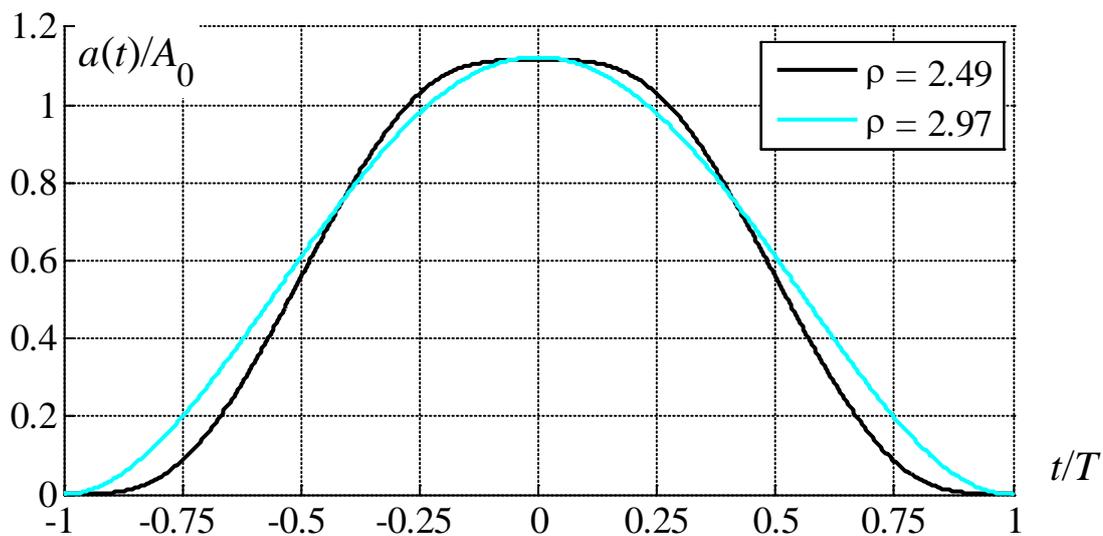
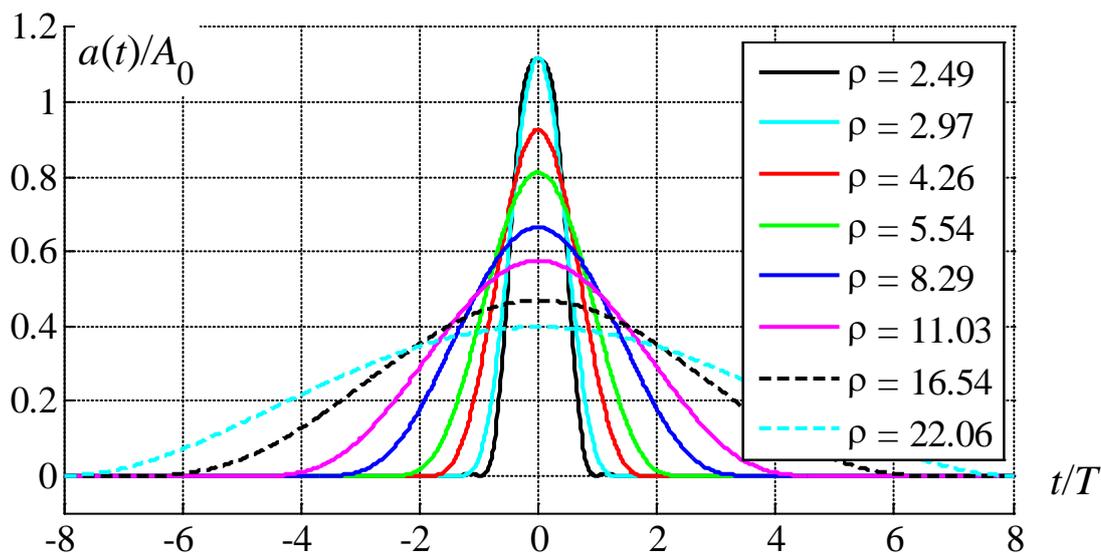


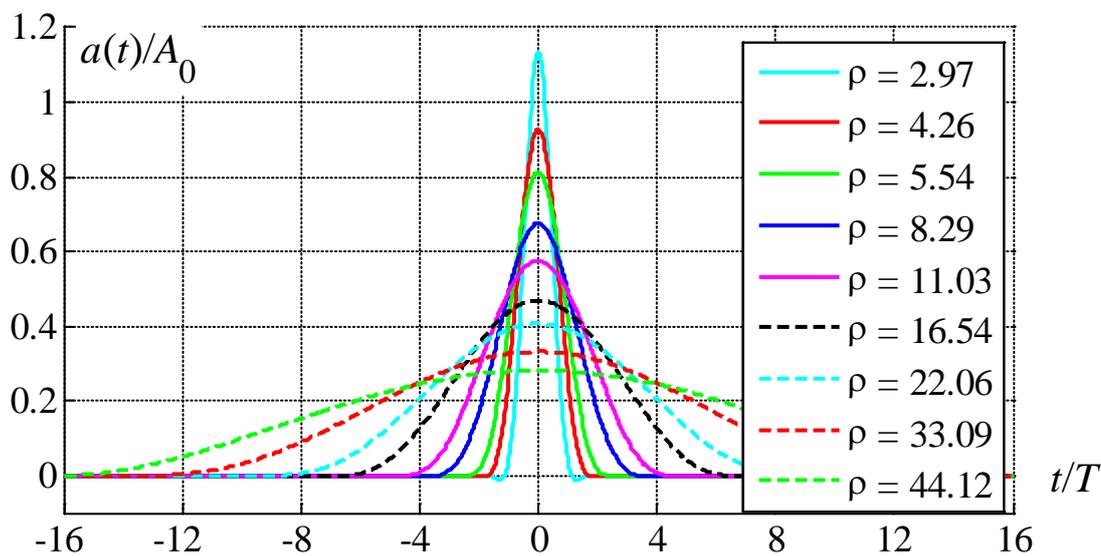
Рис. 3.1. Зависимости характеристик многокомпонентных сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$  от пик-фактора при ограничении на пик-фактор

На рис. 3.2а–д приведены формы огибающей для значений  $L = 2, 4, 8, 16$  и 32 соответственно для разных значений  $\rho$ , при этом  $\gamma = 6$ .





a)



b)

Рис. 3.2. Формы огибающей при ограничении на пик-фактор сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$

Из анализа кривых на рис. 3.2 следует, что с усилением ограничения на пик-фактор, т.е. уменьшением  $\rho$  огибающая  $a(t)$  многокомпонентных сигналов все больше сужается и на все большей части тактового интервала становится равной нулю. При этом число компонент в сигнале уменьшается. Например, 32-компонентный сигнал при  $\rho = 22,06$  (рис. 3.2б) является, фактически, 16-компонентным сигналом. Далее при усилении ограничения пик-фактора до  $\rho = 2,49$  все рассмотренные сигналы становятся 2-компонентными.

Также заметим, что с уменьшением  $\rho$  у сигналов не только уменьшается число компонент, но и огибающие сигналов с разными значениями  $L$  при фикс-

сированном  $\rho$  практически совпадают. Так, на рис. 3.3 представлены огибающие многокомпонентных сигналов для  $\rho = 5,54$  и  $L = 4, 8, 16, 32$ . Нумерация кривых не приведена, так как они практически совпадают.

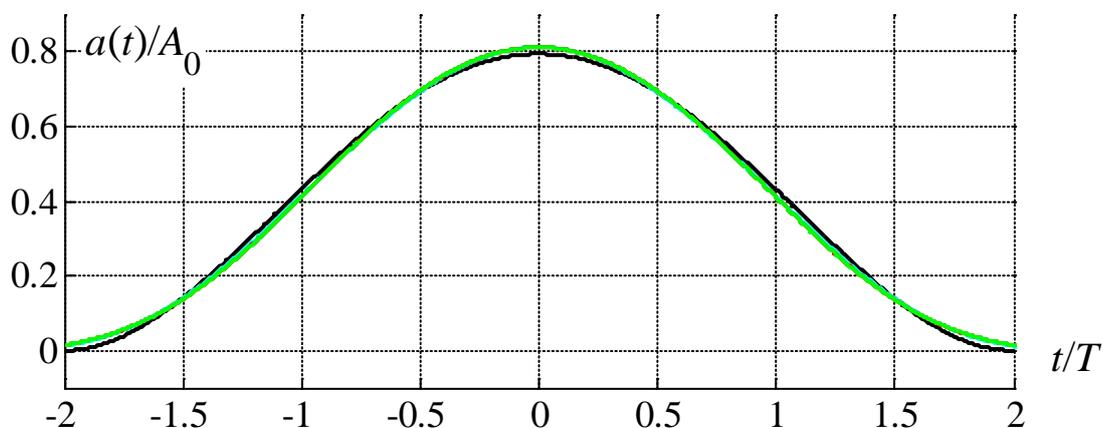


Рис. 3.3. Формы огибающей при ограничении на пик-фактор сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$  для  $\rho = 5,54$  и  $L = 4, 8, 16, 32$

Для всех рассмотренных значений  $L$  не удалось найти решение, при котором достигается минимальное значение пик-фактора  $\rho = 2,01$ . Попытки приблизиться к этому значению приводят к быстрому стремлению получаемой огибающей к прямоугольному виду, сигналы становятся однокомпонентными, и быстро возрастают удельные затраты полосы. Как известно [16], ряд Фурье прямоугольной огибающей медленно сходится, поэтому при наличии ограничения  $m \leq 40$  не удастся найти решение оптимизационной задачи.

Также для 32-компонентных сигналов при ограничении пик-фактора значением  $\rho = 2,49$  хотя решение и было найдено, тем не менее, даже для  $m = 40$  требуемая точность не была достигнута.

В табл. 3.2 представлены характеристики решений оптимизационной задачи при ограничении пик-фактора сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$ . Прочерк означает, что решение для указанных  $\rho$  и  $L$  не было найдено, либо точность найденного решения даже при  $m = 40$  оказывается хуже заданной.

Здесь и везде далее точность значений  $\kappa_p$  на один порядок больше, чем для остальных параметров. Это вызвано тем, что для  $L \geq 16$  двух знаков после запятой может оказаться недостаточно для различения значений  $\kappa_p$ .

Табл. 3.2

| $L$ | $m$ | $\rho$ | $\kappa_g$ | $\kappa_p$ | $\Delta F_{99\%} T$ | $\Delta F_{-60\text{дБ}} T$ |
|-----|-----|--------|------------|------------|---------------------|-----------------------------|
| 2   | -   | 2,01   | -          | -          | -                   | -                           |
|     | 5   | 2,49   | 0,12       | 0,061      | 1,54                | 6,08                        |
|     | 4   | 2,97   | 0,19       | 0,095      | 1,36                | 7,41                        |
| 4   | -   | 2,01   | -          | -          | -                   | -                           |
|     | 11  | 2,49   | 0,12       | 0,061      | 1,54                | 5,70                        |
|     | 9   | 2,97   | 0,24       | 0,121      | 1,29                | 3,44                        |
|     | 4   | 4,26   | 0,56       | 0,257      | 0,89                | 2,44                        |
|     | 4   | 5,54   | 0,88       | 0,339      | 0,68                | 3,70                        |
| 8   | -   | 2,01   | -          | -          | -                   | -                           |
|     | 18  | 2,49   | 0,12       | 0,061      | 1,55                | 4,44                        |
|     | 14  | 2,97   | 0,24       | 0,121      | 1,29                | 3,47                        |
|     | 10  | 4,26   | 0,56       | 0,256      | 0,89                | 2,43                        |
|     | 10  | 5,54   | 0,88       | 0,339      | 0,69                | 1,92                        |
|     | 7   | 8,29   | 1,57       | 0,421      | 0,46                | 1,60                        |
|     | 4   | 11,03  | 2,26       | 0,454      | 0,34                | 1,85                        |
| 16  | -   | 2,01   | -          | -          | -                   | -                           |
|     | 31  | 2,49   | 0,12       | 0,060      | 1,56                | 3,90                        |
|     | 21  | 2,97   | 0,24       | 0,119      | 1,30                | 2,68                        |
|     | 16  | 4,26   | 0,56       | 0,255      | 0,90                | 2,00                        |
|     | 12  | 5,54   | 0,88       | 0,338      | 0,69                | 1,55                        |
|     | 10  | 8,29   | 1,57       | 0,421      | 0,46                | 1,27                        |
|     | 7   | 11,03  | 2,25       | 0,454      | 0,35                | 0,93                        |
|     | 4   | 16,54  | 3,61       | 0,479      | 0,23                | 0,70                        |
|     | 4   | 22,06  | 5,01       | 0,488      | 0,17                | 0,93                        |
| 32  | -   | 2,01   | -          | -          | -                   | -                           |
|     | -   | 2,49   | -          | -          | -                   | -                           |
|     | 34  | 2,97   | 0,22       | 0,110      | 1,31                | 2,12                        |

|  |    |       |       |       |      |      |
|--|----|-------|-------|-------|------|------|
|  | 32 | 4,26  | 0,56  | 0,255 | 0,90 | 1,98 |
|  | 25 | 5,54  | 0,88  | 0,338 | 0,69 | 1,55 |
|  | 12 | 8,29  | 1,55  | 0,419 | 0,47 | 0,77 |
|  | 12 | 11,03 | 2,24  | 0,453 | 0,35 | 0,77 |
|  | 12 | 16,54 | 3,62  | 0,479 | 0,23 | 0,73 |
|  | 7  | 22,06 | 5,00  | 0,488 | 0,17 | 0,47 |
|  | 4  | 33,09 | 7,74  | 0,495 | 0,11 | 0,34 |
|  | 4  | 44,12 | 10,53 | 0,497 | 0,08 | 0,46 |

Из анализа кривых на рис. 3.1–3.3 и данных в табл. 3.2 следуют выводы.

1. Для всех  $L$  для сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$  не удастся найти огибающую, обеспечивающую минимальное значение пик-фактора  $\Pi = 2,01$ .

2. Повышение спектральной эффективности при фиксированном числе компонент  $L$  возможно только за счет ослабления ограничения на пик-фактор, т.е. увеличения значения  $\rho$ .

3. С увеличением числа компонент при фиксированном значении ограничения на пик-фактор полоса частот по уровню  $-60$ дБ незначительно уменьшается.

4. Для любого значения  $\beta_F$  существует единственная пара значений числа компонент и величины ограничения на пик-фактор ( $L_{\beta_F}$  и  $\rho_{\beta_F}$ ), при которых достигается заданная спектральная эффективность. Для  $L < L_{\beta_F}$  независимо от величины ограничения на пик-фактор не удастся достигнуть заданную спектральную эффективность, а для  $L > L_{\beta_F}$  заданная спектральная эффективность может быть достигнута при ограничении пик-фактора значением  $\rho = \rho_{\beta_F}$ , когда  $L$ -компонентный сигнал становится  $L_{\beta_F}$ -компонентным. Например, для  $\beta_F = 0,12$  получим  $L_{\beta_F} = 16$  и  $\rho_{\beta_F} = 16,54$ .

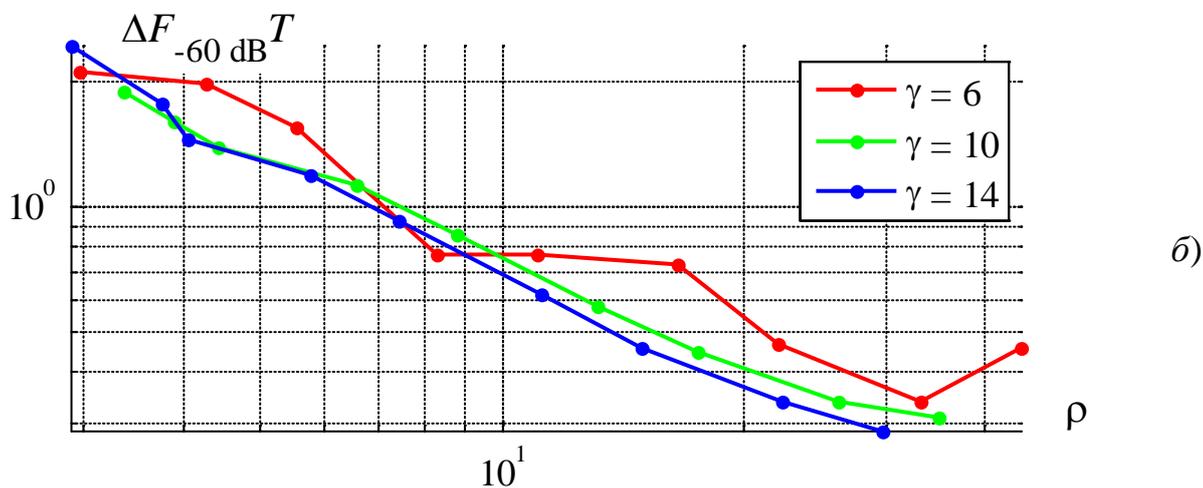
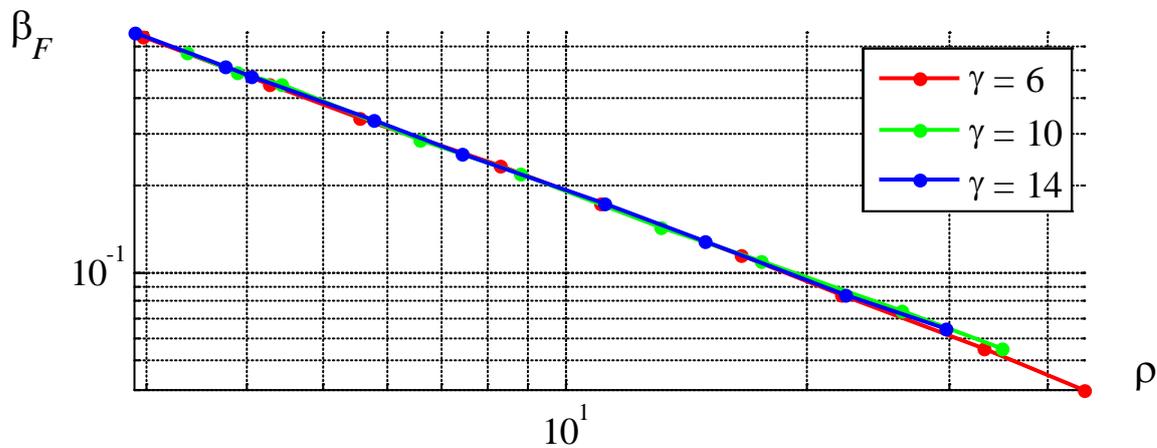
5. Максимальные коэффициенты групповой и парциальной корреляций, также как и  $\beta_F$ , однозначно определяются парой значений  $\rho$  и  $L$ , что объясняется одинаковостью сигналов для фиксированных  $\rho$ .

6. С ростом спектральной эффективности оба коэффициента корреляции, МКГК и МКПК, возрастают, т.е. возрастает уровень МСИ.

7. Для любых  $L$  усиление ограничения на пик-фактор, т.е. уменьшение значения  $\rho$ , приводит к увеличению числа членов разложения в усеченный ряд Фурье, необходимого для получения заданной точности решения.

Также в работе было проведено исследование влияния ограничения на пик-фактор многокомпонентных сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 10, 14$ . Общие тенденции, выявленные для сигналов  $\varphi = 6$ , оказались верными и для сигналов с  $\gamma = 10, 14$ .

Для сравнения результатов при различных значениях скорости спада спектра на рис. 3.4а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F$ , а на рис. 3.4б – зависимости полосы  $\Delta F_{-60 \text{ dB}}$  от  $\rho$  для сигналов с ФМ-4,  $L = 32$  и  $\gamma = 6, 10, 14$ . На рис. 3.4в–г представлены зависимости получаемых максимальных коэффициентов групповой и парциальной корреляций соответственно от величины  $\rho$  для тех же условий.



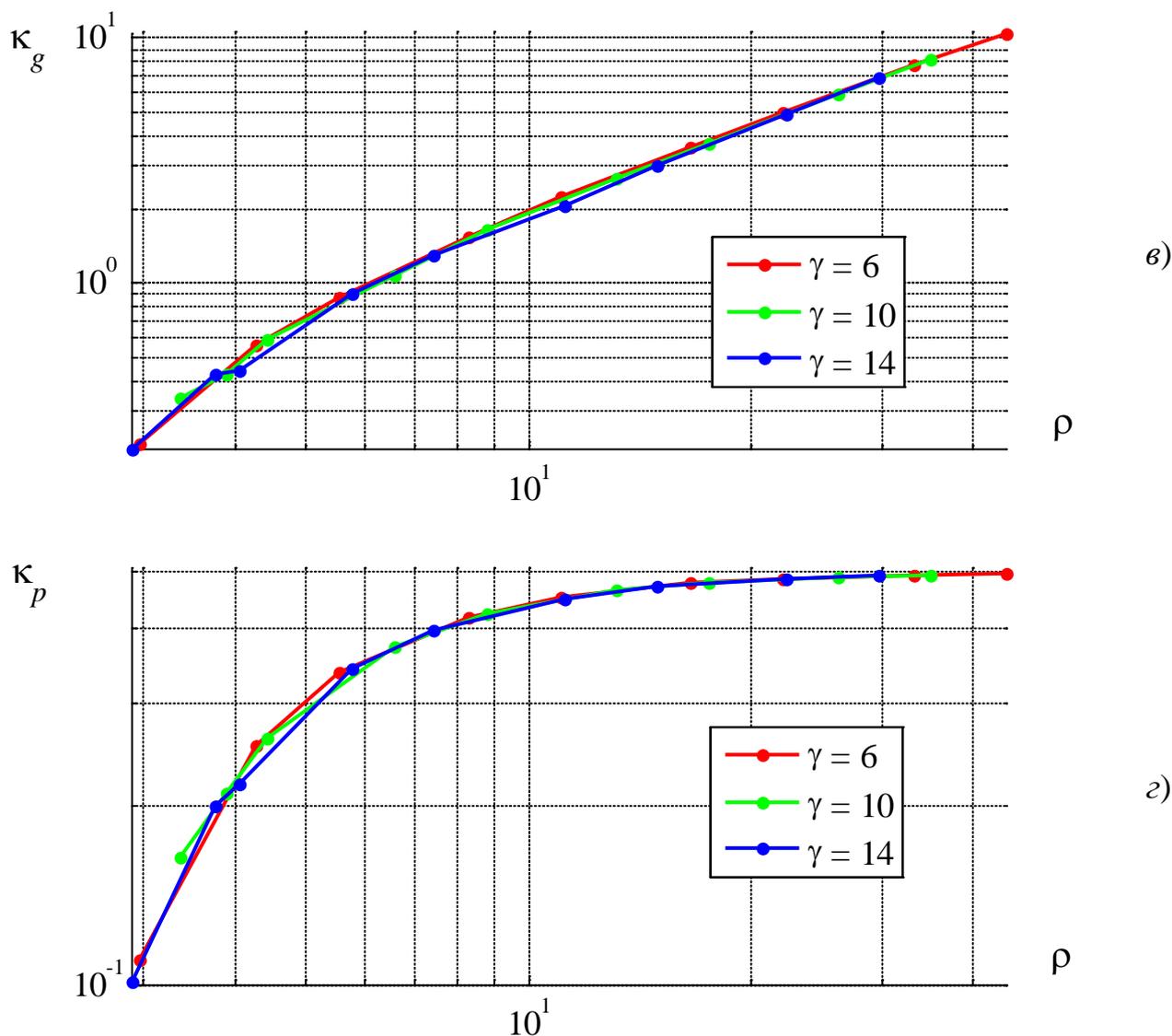


Рис. 3.4. Зависимости характеристик 32-компонентных сигналов с ФМ-4 от пик-фактора при ограничении на пик-фактор

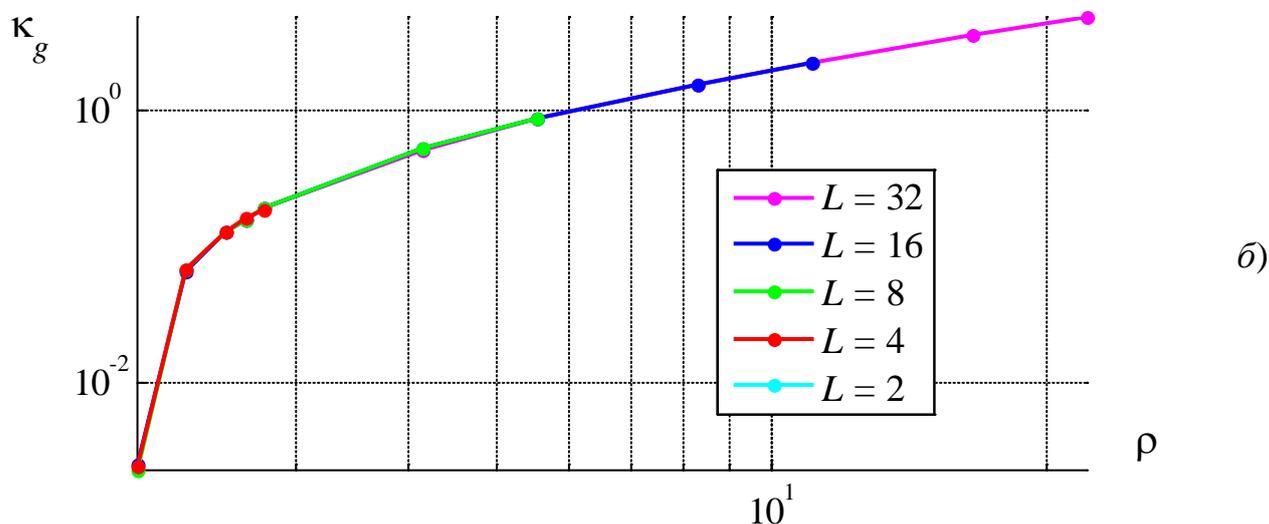
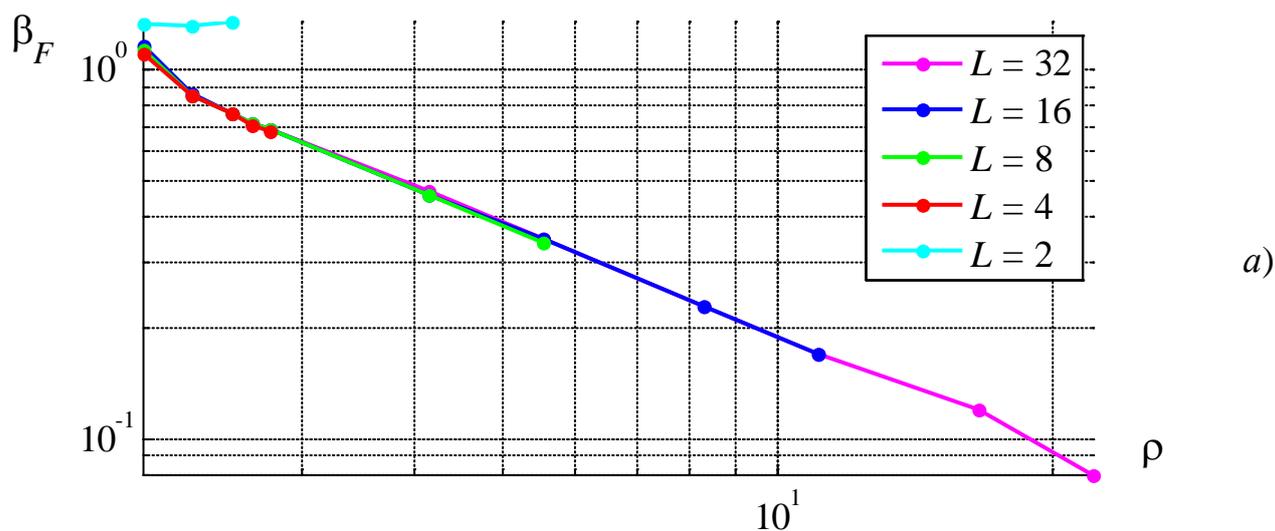
Из анализа представленных кривых следует, что зависимости и спектральной эффективности, и значений максимальных коэффициентов групповой и парциальной корреляций при фиксированном значении  $\rho$  практически совпадают для разных значений скоростей спада спектра. Тем не менее, количество компонент, при котором обеспечивается заданное значение  $\rho$ , возрастает с ростом  $\gamma$ .

Из анализа кривых на рис. 3.4б следует, что с увеличением заданного значения скорости спада энергетического спектра полоса частот  $\Delta F_{-60 \text{ дБ}}$  незначительно уменьшается. Это свидетельствует о том, что для рассматриваемых сиг-

налов при соответствующей отстройке от центральной частоты энергетические спектры еще не аппроксимируются функцией  $G(\omega) \sim 1/\omega^\gamma$ . Таким образом, в области практически значимых внеполосных излучений (например,  $-40$  дБ,  $-60$  дБ) спектры получаемых сигналов отличаются незначительно.

### 3.1.2. Оптимизация для сигналов с ФМ-2

На рис. 3.5а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F$  от  $\rho$  для сигналов с ФМ-2 (причем созвездия компонент с четными номерами повернуты на угол  $\alpha = \pi/2$  относительно компонент с нечетными номерами) и  $\gamma = 6$ . На рис. 3.5б-в представлены зависимости получаемых максимальных коэффициентов групповой и парциальной корреляций соответственно от величины  $\rho$ .



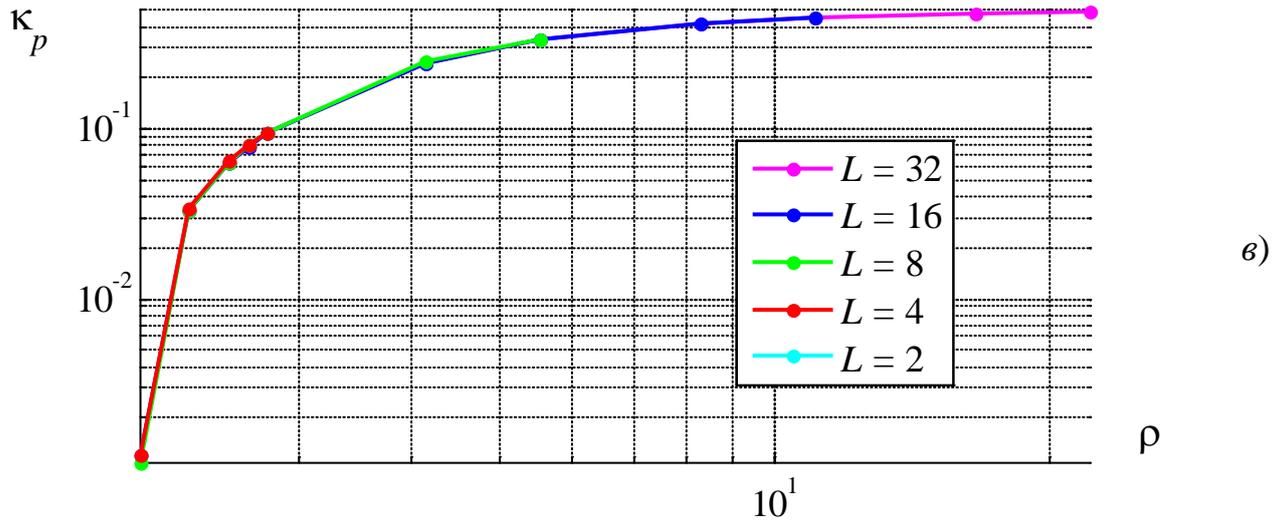
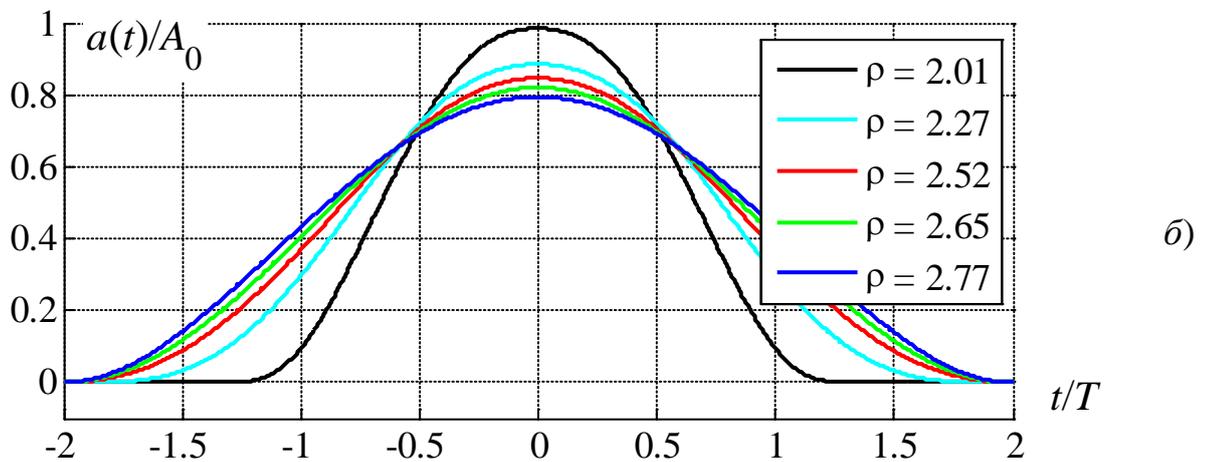
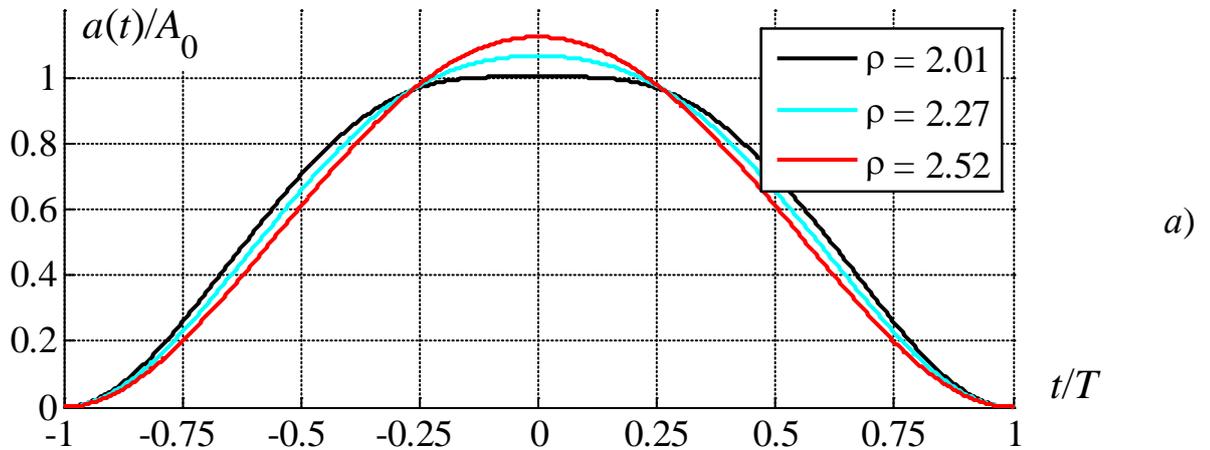


Рис. 3.5. Зависимости характеристик многокомпонентных сигналов с ФМ-2 и  $\gamma = 6$  от пик-фактора при ограничении на пик-фактор

На рис. 3.6а–д приведены формы огибающей для значений  $L = 2, 4, 8, 16$  и 32 соответственно для разных значений  $\rho$ , при этом  $\gamma = 6$ .



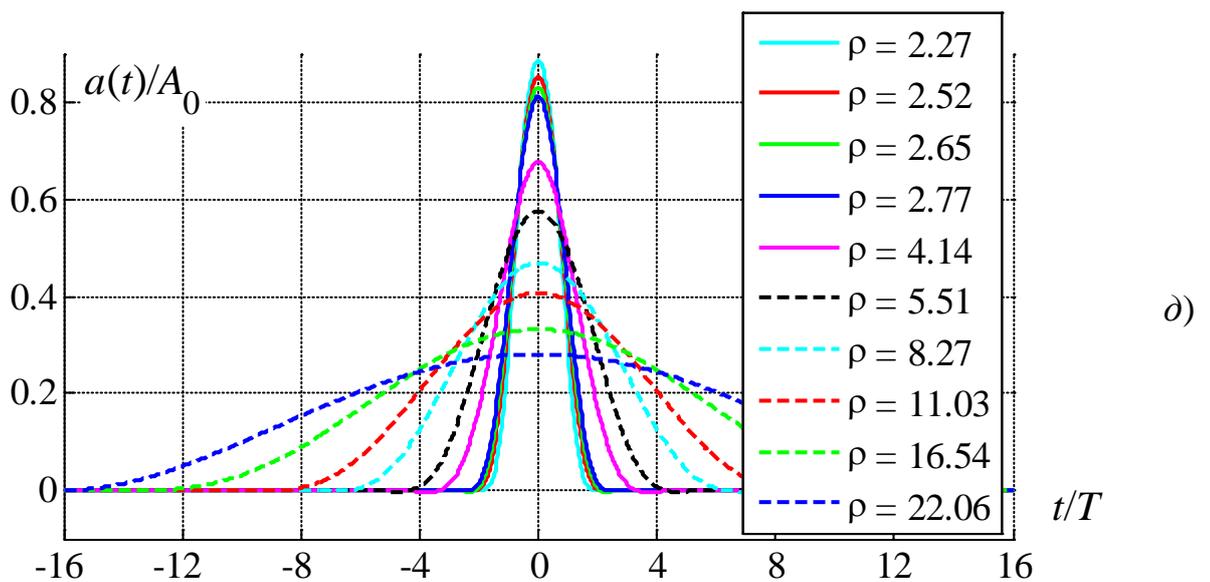
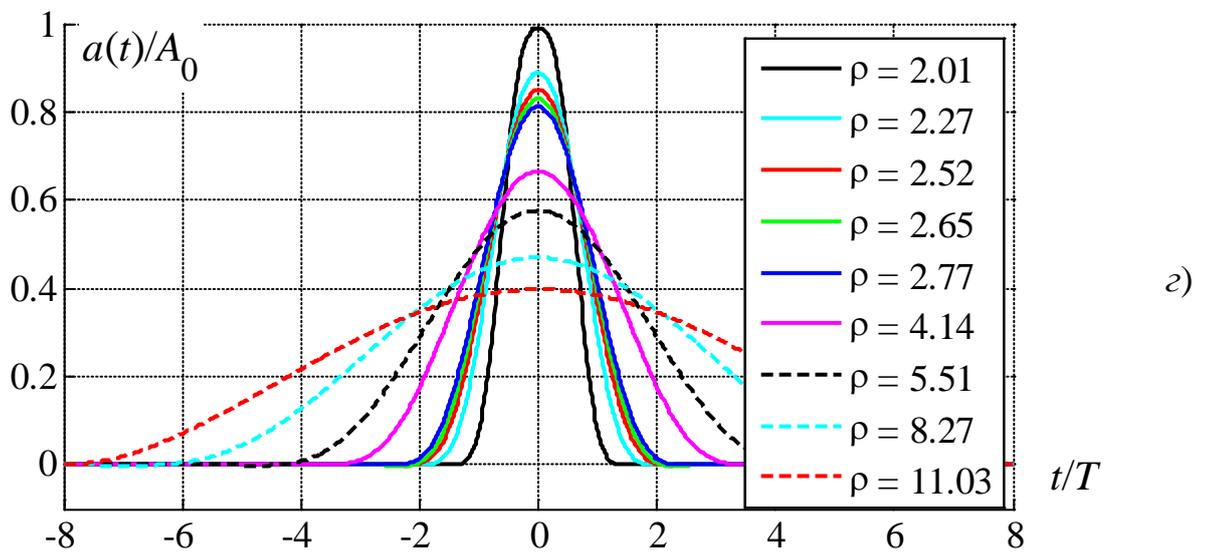
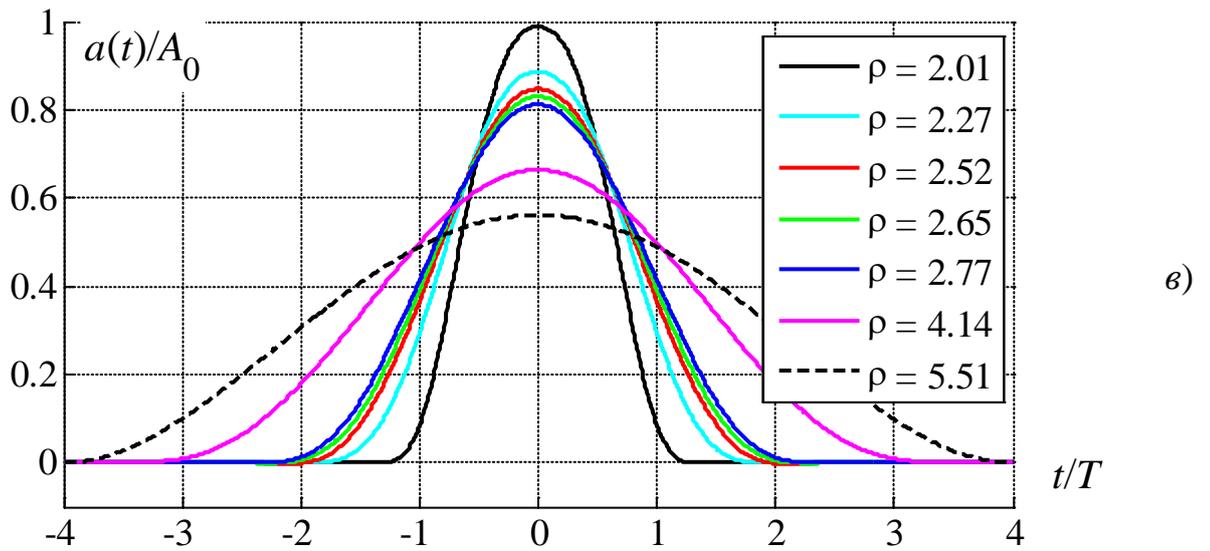


Рис. 3.6. Формы огибающей при ограничении на пик-фактор сигналов с ФМ-2 и  $\gamma = 6$

Из анализа кривых на рис. 3.6 следует, что, как и для сигналов с ФМ-4, уменьшение  $\rho$  приводит к сужению огибающей  $a(t)$  многокомпонентных сигналов. При этом число компонент в сигнале уменьшается. Например, 32-компонентный сигнал при  $\rho = 8,27$  (рис. 3.6д) является, фактически, 16-компонентным сигналом. Далее при усилении ограничения на пик-фактор до  $\rho = 2,01$  все рассмотренные сигналы становятся 2-компонентными.

Также, как и для ФМ-4, с уменьшением  $\rho$  у сигналов не только уменьшается число компонент, но и огибающие сигналов с разными значениями  $L$  при фиксированном  $\rho$  практически совпадают. Так, на рис. 3.7 представлены огибающие многокомпонентных сигналов для  $\rho = 2,65$  и  $L = 4, 8, 16, 32$ . Нумерация кривых не приведена, так как они практически совпадают.

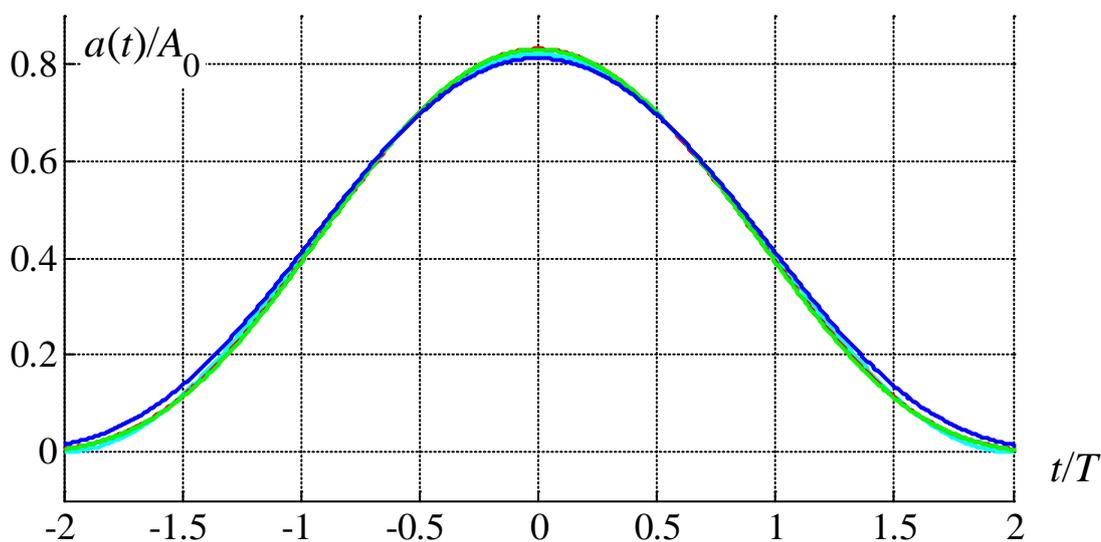


Рис. 3.7. Формы огибающей при ограничении на пик-фактор сигналов с ФМ-2 и  $\gamma = 6$  для  $\rho = 2,65$  и  $L = 4, 8, 16, 32$

В табл. 3.3 представлены характеристики решений оптимизационной задачи при ограничении на пик-фактор сигналов с ФМ-2 и  $\gamma = 6$ .

Табл. 3.3

| $L$ | $m$ | $\rho$ | $\kappa_g$ | $\kappa_p$ | $\Delta F_{99\%} T$ | $\Delta F_{-60\text{дБ}} T$ |
|-----|-----|--------|------------|------------|---------------------|-----------------------------|
| 2   | 4   | 2,01   | 0,00       | 0,000      | 1,34                | 8,17                        |
|     | 4   | 2,27   | 0,00       | 0,000      | 1,32                | 7,81                        |

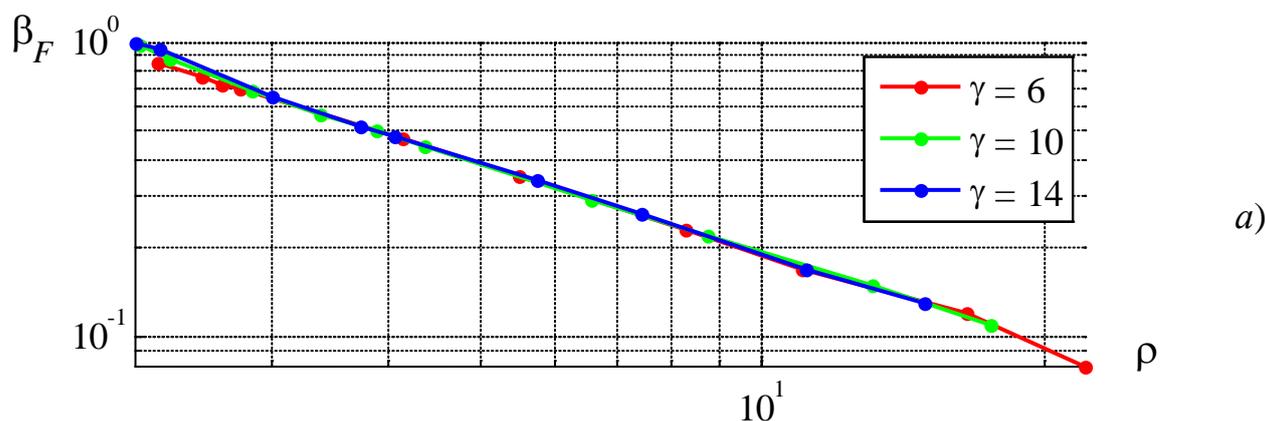
|    |    |       |      |       |      |      |
|----|----|-------|------|-------|------|------|
|    | 4  | 2,52  | 0,00 | 0,000 | 1,36 | 7,41 |
| 4  | 12 | 2,01  | 0,00 | 0,001 | 1,11 | 4,77 |
|    | 5  | 2,27  | 0,07 | 0,034 | 0,85 | 2,83 |
|    | 5  | 2,52  | 0,13 | 0,065 | 0,76 | 2,65 |
|    | 4  | 2,65  | 0,16 | 0,081 | 0,71 | 3,39 |
|    | 4  | 2,77  | 0,19 | 0,095 | 0,68 | 3,70 |
| 8  | 18 | 2,01  | 0,00 | 0,001 | 1,13 | 4,31 |
|    | 11 | 2,27  | 0,07 | 0,034 | 0,85 | 2,78 |
|    | 10 | 2,52  | 0,13 | 0,064 | 0,76 | 2,52 |
|    | 7  | 2,65  | 0,16 | 0,080 | 0,72 | 1,90 |
|    | 7  | 2,77  | 0,19 | 0,096 | 0,69 | 1,90 |
|    | 7  | 4,14  | 0,53 | 0,247 | 0,46 | 1,60 |
|    | 4  | 5,51  | 0,88 | 0,339 | 0,34 | 1,85 |
| 16 | 27 | 2,01  | 0,00 | 0,001 | 1,16 | 3,26 |
|    | 21 | 2,27  | 0,07 | 0,033 | 0,86 | 2,55 |
|    | 14 | 2,52  | 0,13 | 0,064 | 0,76 | 1,77 |
|    | 13 | 2,65  | 0,16 | 0,079 | 0,72 | 1,63 |
|    | 12 | 2,77  | 0,19 | 0,096 | 0,69 | 1,55 |
|    | 10 | 4,14  | 0,53 | 0,246 | 0,46 | 1,27 |
|    | 7  | 5,51  | 0,87 | 0,337 | 0,35 | 0,93 |
|    | 4  | 8,27  | 1,56 | 0,420 | 0,23 | 0,70 |
|    | 4  | 11,03 | 2,26 | 0,454 | 0,17 | 0,93 |
| 32 | -  | 2,01  | -    | -     | -    | -    |
|    | 35 | 2,27  | 0,07 | 0,034 | 0,85 | 2,16 |
|    | 28 | 2,52  | 0,13 | 0,064 | 0,76 | 1,75 |
|    | 27 | 2,65  | 0,16 | 0,079 | 0,72 | 1,63 |
|    | 25 | 2,77  | 0,19 | 0,096 | 0,69 | 1,55 |
|    | 12 | 4,14  | 0,52 | 0,242 | 0,47 | 0,77 |
|    | 12 | 5,51  | 0,87 | 0,336 | 0,35 | 0,77 |

|  |    |       |      |       |      |      |
|--|----|-------|------|-------|------|------|
|  | 12 | 8,27  | 1,56 | 0,420 | 0,23 | 0,73 |
|  | 7  | 11,03 | 2,25 | 0,454 | 0,17 | 0,47 |
|  | 4  | 16,54 | 3,62 | 0,479 | 0,12 | 0,34 |
|  | 4  | 22,06 | 5,01 | 0,488 | 0,08 | 0,46 |

Из анализа кривых рис. 3.5–3.7 и данных табл. 3.3 следует, что все зависимости, выявленные для сигналов с ФМ-4, остаются верными и для сигналов с ФМ-2. Однако в отличие от сигналов с ФМ-4, в данном случае для всех рассмотренных значений  $L$  удается найти решение, обеспечивающее минимальное значение пик-фактора  $\rho = 2,01$ , что и является основным преимуществом сигналов с ФМ-2 по отношению к ФМ-4. Также, для  $\gamma = 6$  выделяется случай  $L = 2$ , когда рост значения  $\rho$  приводит к увеличению удельных затрат  $\beta_F$ , и использование 2-компонентных сигналов не позволяет получить лучшую спектральную эффективность.

Исследование решений оптимизационной задачи для сигналов с ФМ-2 и  $\gamma = 10, 14$  показало, что тенденции, выявленные для  $\gamma = 6$ , оказываются верными и для  $\gamma = 10, 14$ .

Для сравнения результатов при различных значениях скорости спада спектра на рис. 3.8а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F$ , а на рис. 3.8б – зависимости полосы  $\Delta F_{-60\text{ дБ}}$  от  $\rho$  для сигналов с ФМ-2,  $L = 32$  и  $\gamma = 6, 10, 14$ . На рис. 3.8в–г представлены зависимости получаемых максимальных коэффициентов групповой и парциальной корреляций соответственно от величины  $\rho$  для тех же условий.



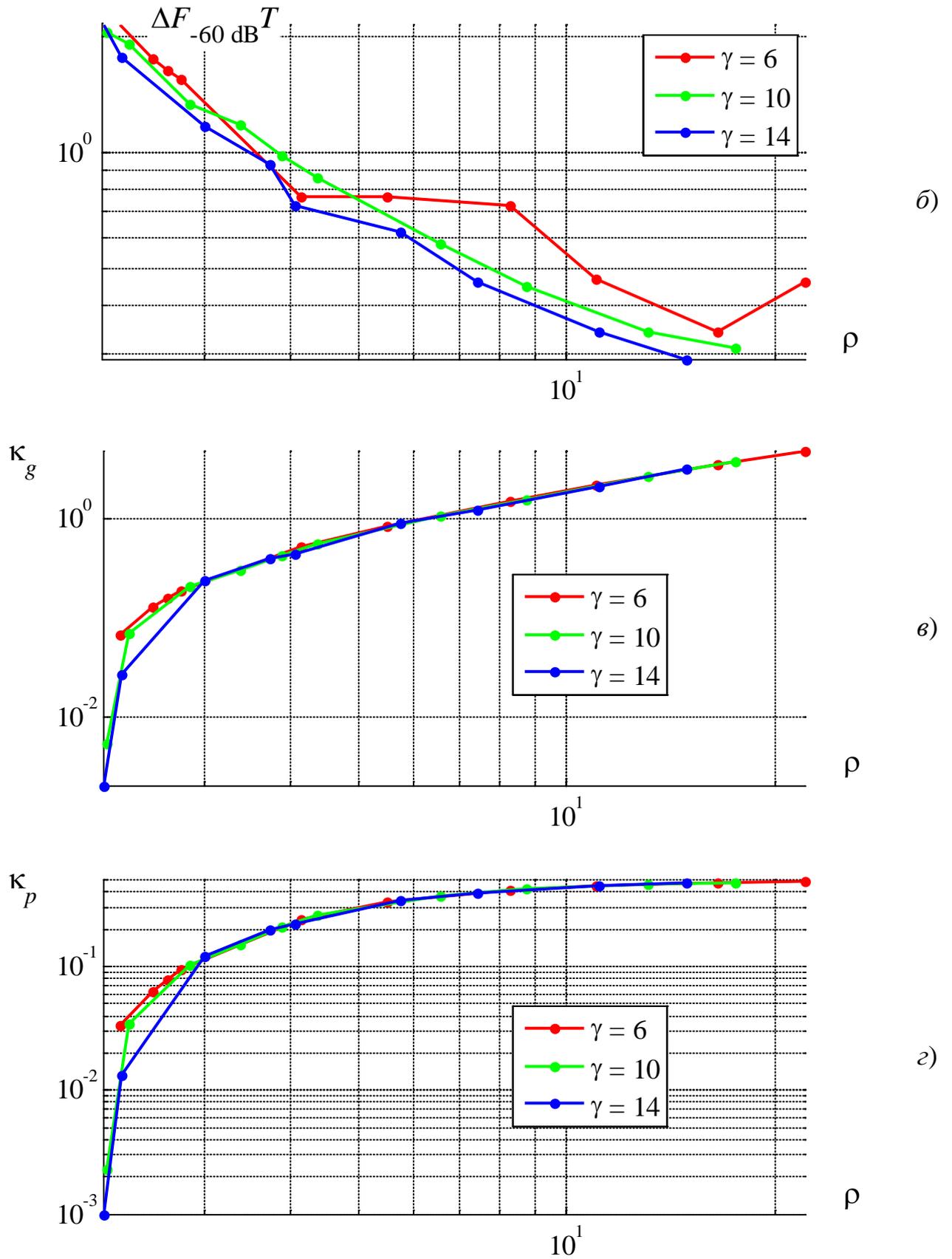


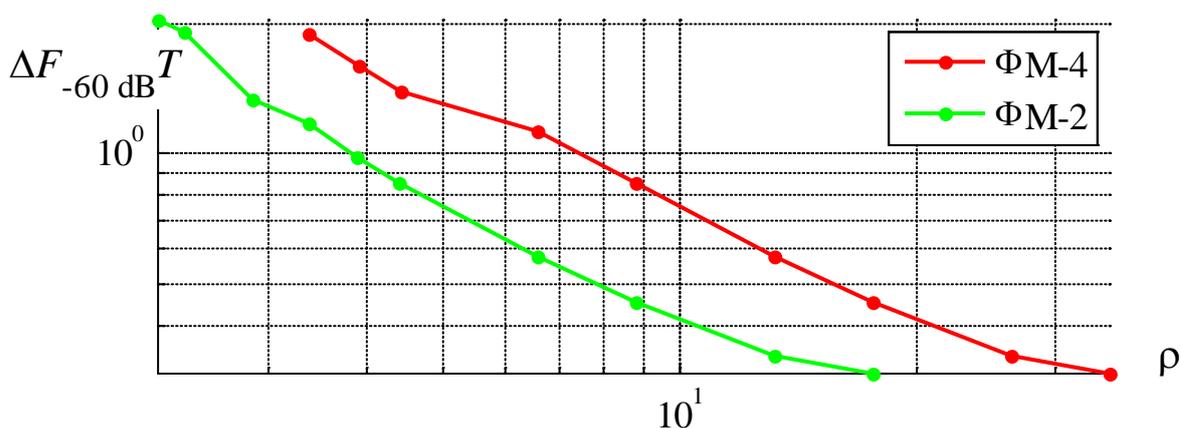
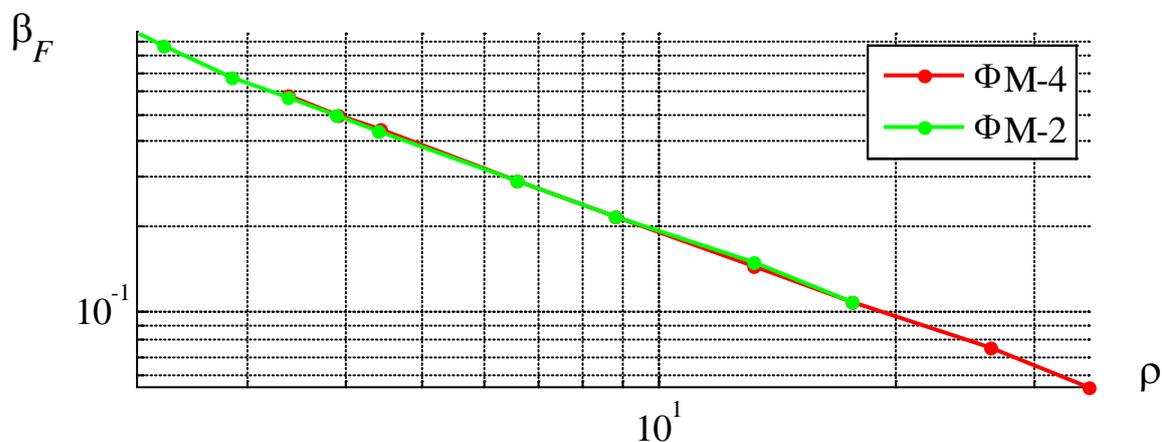
Рис. 3.8. Зависимости характеристик 32-компонентных сигналов с ФМ-2 от пик-фактора при ограничении на пик-фактор

Из анализа представленных кривых следует, что, как и в случае сигналов с ФМ-4, и спектральная эффективность и значения коэффициентов групповой и парциальной корреляций при фиксированном значении  $\rho$  практически совпадают для разных значений скоростей спада спектра. Только количество компонент, при котором обеспечивается заданное значение  $\rho$ , возрастает с ростом  $\gamma$ .

Также в области практически значимых внеполосных излучений энергетические спектры полученных сигналов еще не аппроксимируются функцией  $G(\omega) \sim 1/\omega^\gamma$ .

### 3.1.3. Сравнение результатов оптимизации для сигналов с ФМ-2 и ФМ-4

С целью сравнения решений оптимизационной задачи при ограничении на пик-фактор для сигналов с ФМ-2 и ФМ-4 на рис. 3.9а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F$ , а на рис. 3.8б – зависимости полосы  $\Delta F_{-60\text{ dB}}$  от  $\rho$  для сигналов с  $L = 32$  и  $\gamma = 10$ . На рис. 3.8в-г представлены зависимости получаемых максимальных коэффициентов групповой и парциальной корреляций соответственно от величины  $\rho$  для тех же условий.



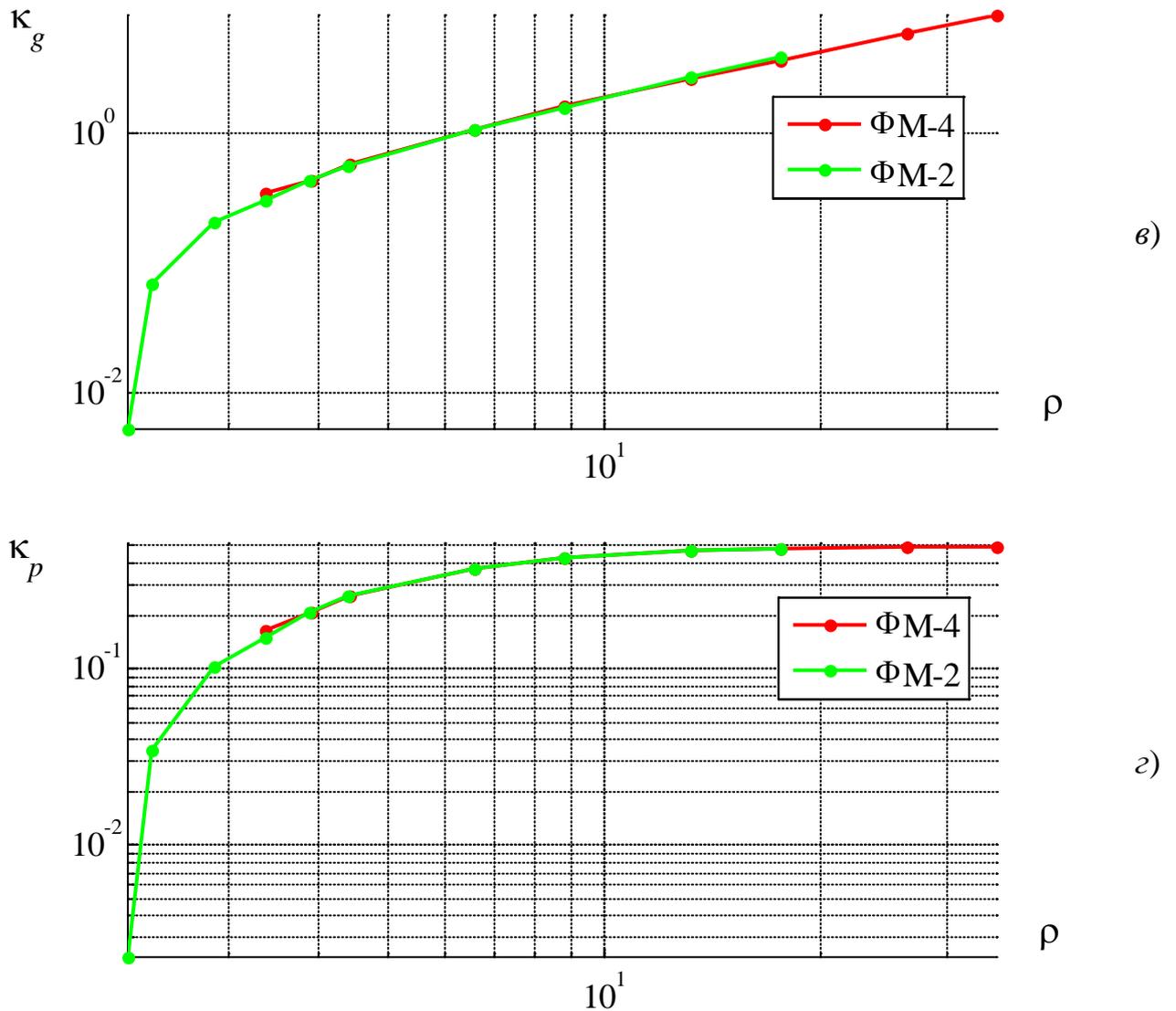


Рис. 3.9. Зависимости характеристик 32-компонентных сигналов с ФМ-2 и ФМ-4 от пик-фактора при ограничении на пик-фактор

Из анализа представленных кривых следует, что зависимости характеристик решений оптимизационной задачи практически совпадают для сигналов с ФМ-2 и ФМ-4. Однако, сигналы с ФМ-2 позволяют получить сигналы с минимальным пик-фактором  $\rho = 2,01$ , а сигналы с ФМ-4 при фиксированном значении  $L$  позволяют добиться лучшей спектральной эффективности. Более того, можно показать что для  $\rho \geq 2,5$  характеристики  $L$ -компонентных сигналов с ФМ-4 совпадают с характеристиками  $(2L)$ -компонентных сигналов с ФМ-2.

### 3.2. Оптимизация при наличии ограничений на корреляционные свойства

Как и в случае решения оптимизационной задачи при ограничении пик-фактора колебаний для исследования влияния ограничения коэффициента групповой либо парциальной корреляций будем рассматривать дискретный набор  $\kappa_g$  либо  $\kappa_p$ . Также можно определить максимальные значения указанных параметров  $\kappa_{g, \max}(L)$  либо  $\kappa_{p, \max}(L)$  при решении оптимизационной задачи без ограничения корреляционных свойств. В табл. 3.4 приведены значения  $\kappa_{g, \max}(L)$  и  $\kappa_{p, \max}(L)$  для многокомпонентных сигналов с  $\gamma = 6$  для различных значений  $L$ .

Табл. 3.4

| $L$                   | 2     | 4     | 8     | 16    | 32    |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\kappa_{g, \max}(L)$ | 0,19  | 0,88  | 2,26  | 5,01  | 10,53 |
| $\kappa_{p, \max}(L)$ | 0,095 | 0,339 | 0,454 | 0,488 | 0,497 |

Как было оговорено ранее, минимальными значениями будем считать  $\kappa_{g, \min} = 0,01$  и  $\kappa_{p, \min} = 0,01$ . Значения  $\kappa_{g, \min}$ ,  $\kappa_{g, \max}(L)$  и  $\kappa_{p, \min}$ ,  $\kappa_{p, \max}(L)$  образуют дискретные наборы, которые можно использовать для исследования влияния ограничения корреляционных свойств на решение оптимизационной задачи. Для повышения достоверности и наглядности получаемых результатов между каждыми соседними значениями добавим их среднее арифметическое:

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \{0,01 \ 0,10 \ 0,19 \ 0,53 \ 0,88 \ 1,57 \ 2,26 \ 3,64 \ 5,01 \ 7,77 \ 10,53\}, \\ \kappa_p &= \{0,010 \ 0,053 \ 0,095 \ 0,217 \ 0,339 \ 0,397 \ 0,454 \ 0,471 \ 0,488 \ 0,493 \ 0,497\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

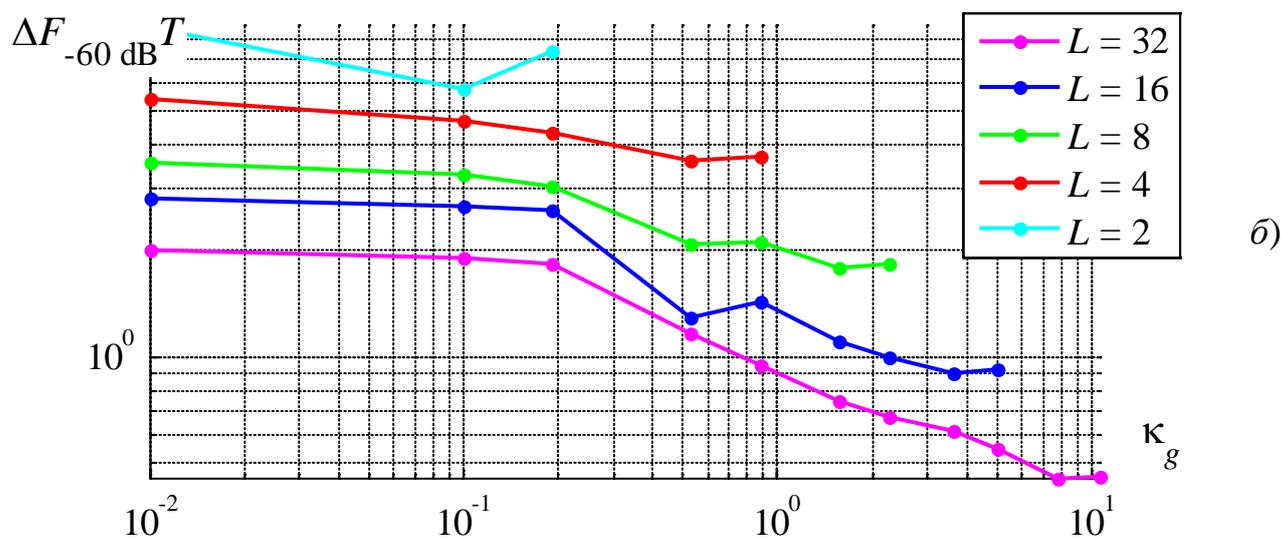
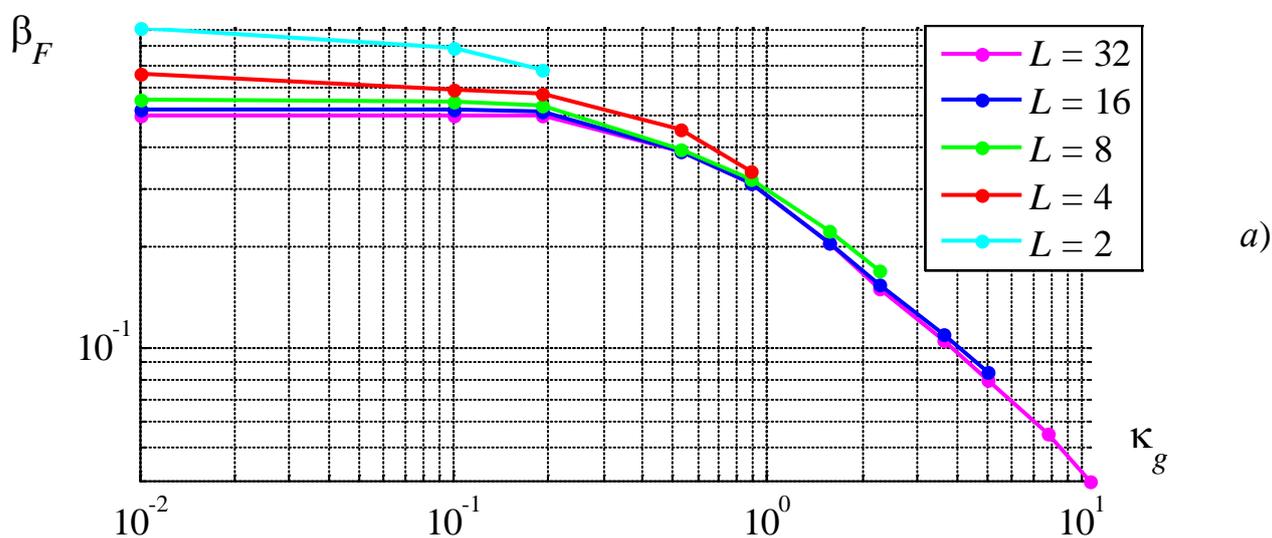
При исследовании зависимости решения оптимизационной задачи от ограничения корреляционных свойств будем рассматривать сигналы с ФМ-4. Однако в соответствии с (2.33) и (2.39) полученные результаты будут справедливы для КАМ произвольной размерности.

При использовании в многокомпонентных сигналах одинаковой АФМ результат не изменится, а в случае использования в компонентах с четными номерами созвездий АФМ, повернутых на угол  $\alpha = \pi/2$  относительно созвездий

компонент с нечетными номерами, результат для сигналов с числом компонент  $L$  будет совпадать с результатом для сигналов с КАМ и числом компонент  $L/2$ .

### 3.2.1. Оптимизация при ограничении на МКГК

На рис. 3.10а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F$ , а на рис. 3.10б – зависимости полосы  $\Delta F_{-60\text{ dB}}$  от  $\kappa_g$  для сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$ . На рис. 3.10в–г представлены зависимости получаемых максимального коэффициента парциальной корреляции и пик-фактора соответственно от величины  $\kappa_g$  для тех же условий.



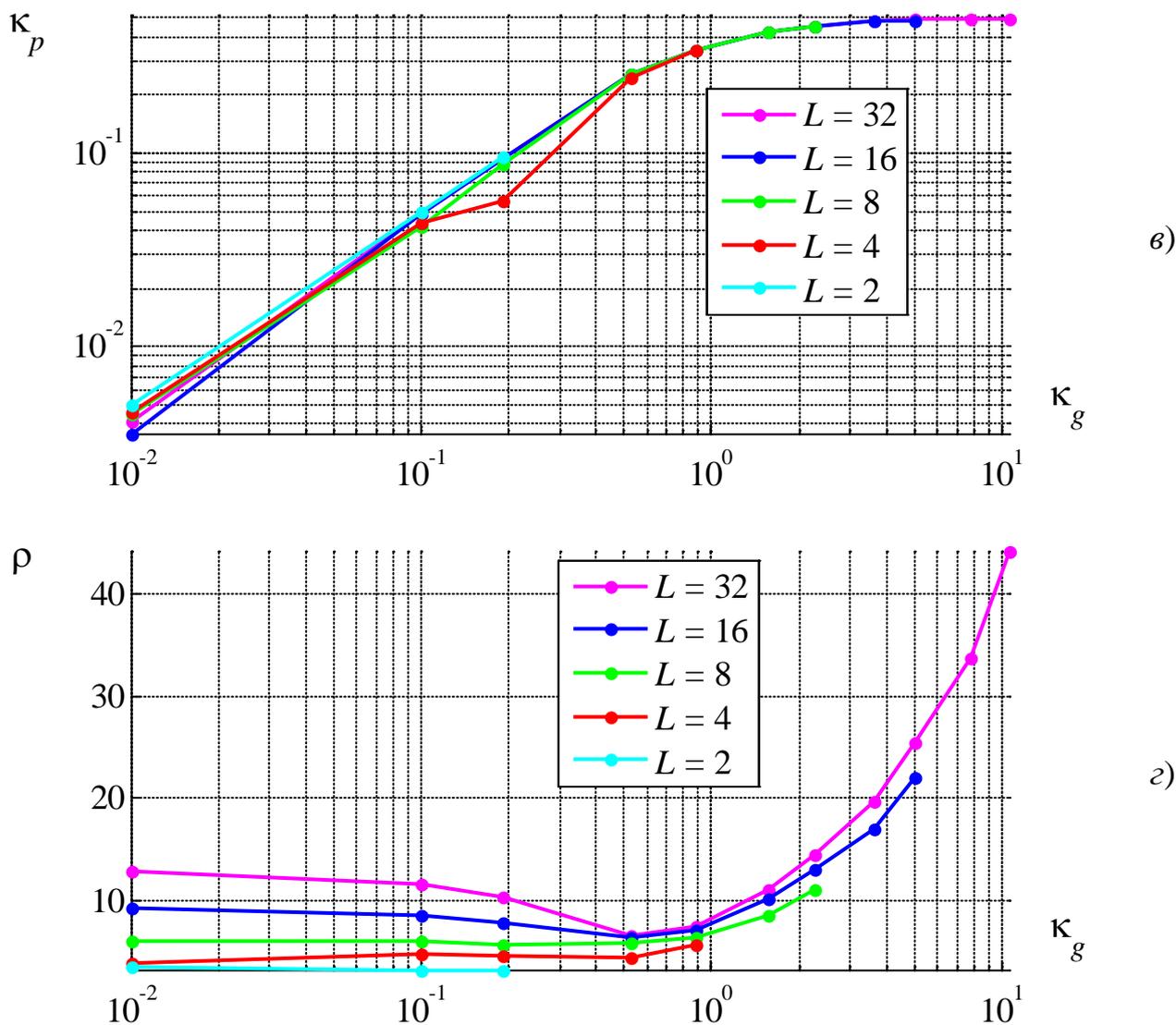
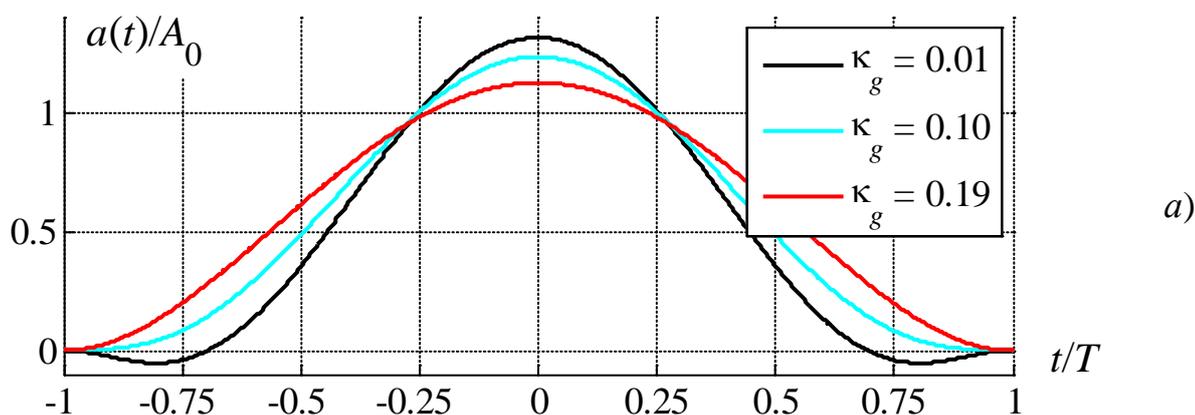
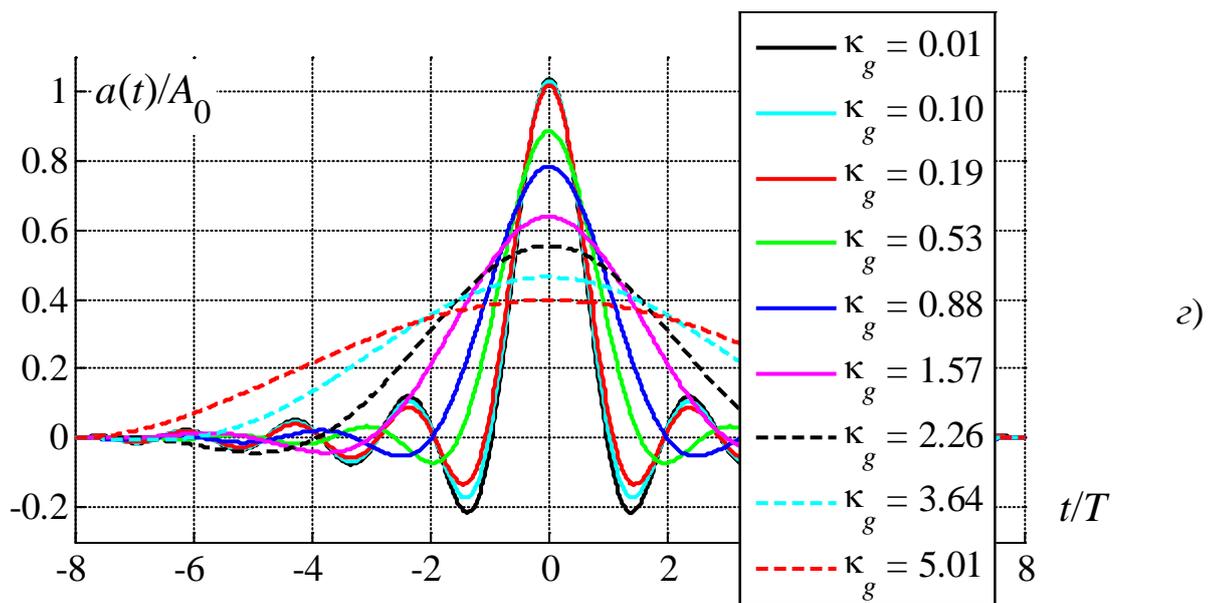
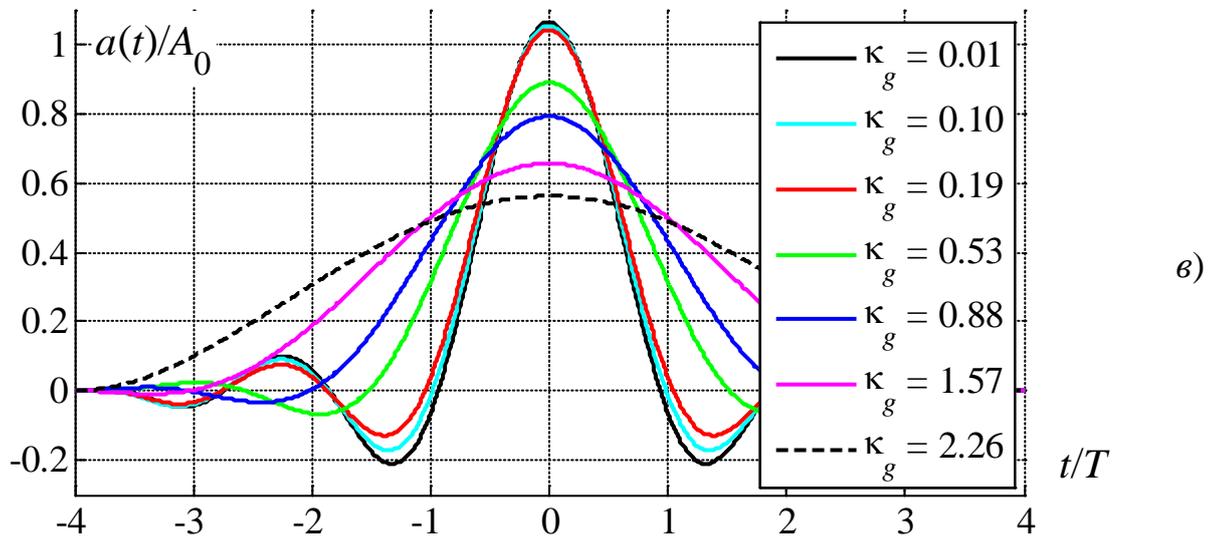
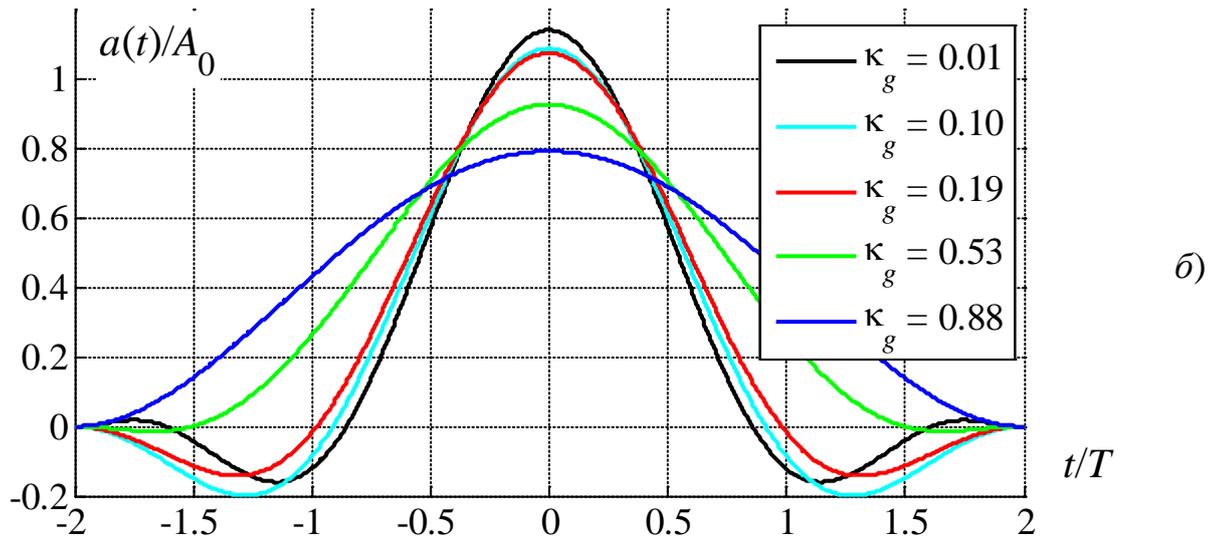


Рис. 3.10. Зависимости характеристик многокомпонентных сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$  от МКГК при ограничении на МКГК

На рис. 3.11а–д приведены формы огибающей для значений  $L = 2, 4, 8, 16$  и 32 соответственно для разных значений  $\kappa_g$ , при этом  $\gamma = 6$ .





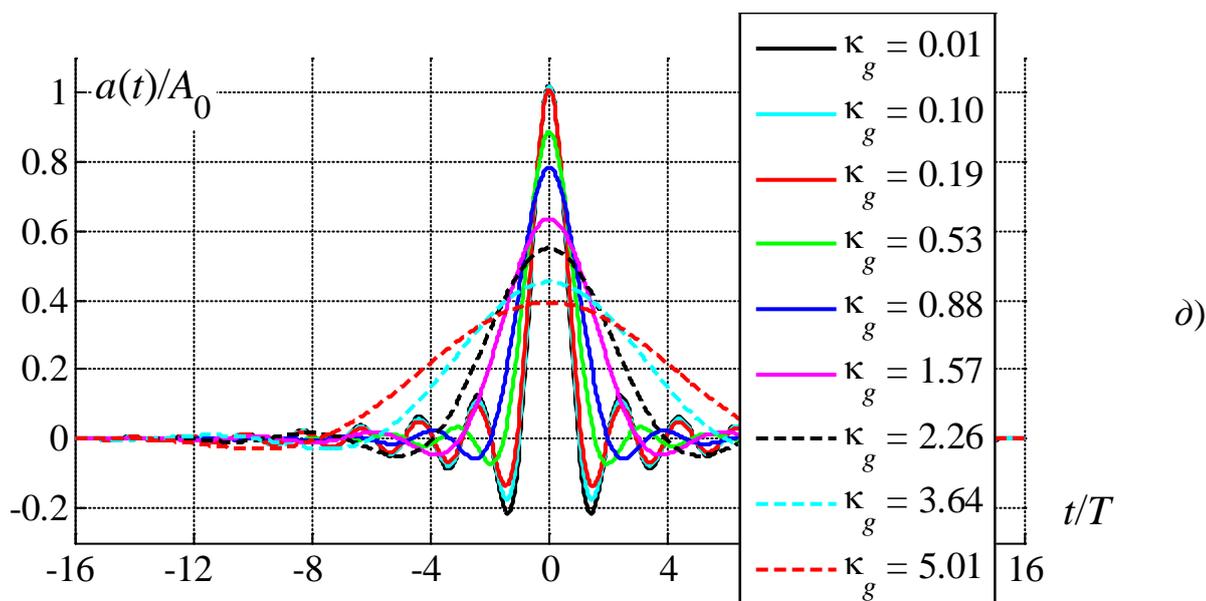


Рис. 3.11. Формы огибающей при ограничении на МКГК сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$

Из анализа кривых на рис. 3.11 следует, что с усилением ограничения на МКГК, т.е. с уменьшением значения  $\kappa_g$ , огибающая  $a(t)$  многокомпонентных сигналов, как и в случае ограничения на пик-фактор, все больше сужается, однако при этом за пределами центральной части (главного лепестка) огибающая не равна нулю, а похожа на функцию вида  $\sin(x)/x^u$ . Причем, чем больше  $L$ , тем больше знакопостоянных частей функции  $\sin(x)/x^u$  уместится на тактовом интервале компоненты. Главное отличие от функции  $\sin(x)/x^u$  заключается в том, что из-за наличия ограничения на скорость спада спектра значения огибающей и её нескольких производных на концах тактового интервала должны быть нулевыми. Поэтому с приближением к границам тактового интервала огибающая становится все меньше похожа на функцию  $\sin(x)/x^u$ .

Также заметим, что для фиксированного значения  $\kappa_g$  огибающие сигналов с разным числом компонент тем ближе друг к другу, чем больше значения  $L$ . Это объясняется тем, что чем больше знакопостоянных частей функции  $\sin(x)/x^u$  уместится на тактовом интервале, тем меньше её абсолютное значение на границах тактового интервала. На рис. 3.12 представлены огибающие многокомпонентных сигналов с ФМ-4,  $\gamma = 6$ ,  $\kappa_g = 0,10$ , и  $L = 8, 16, 32$ .

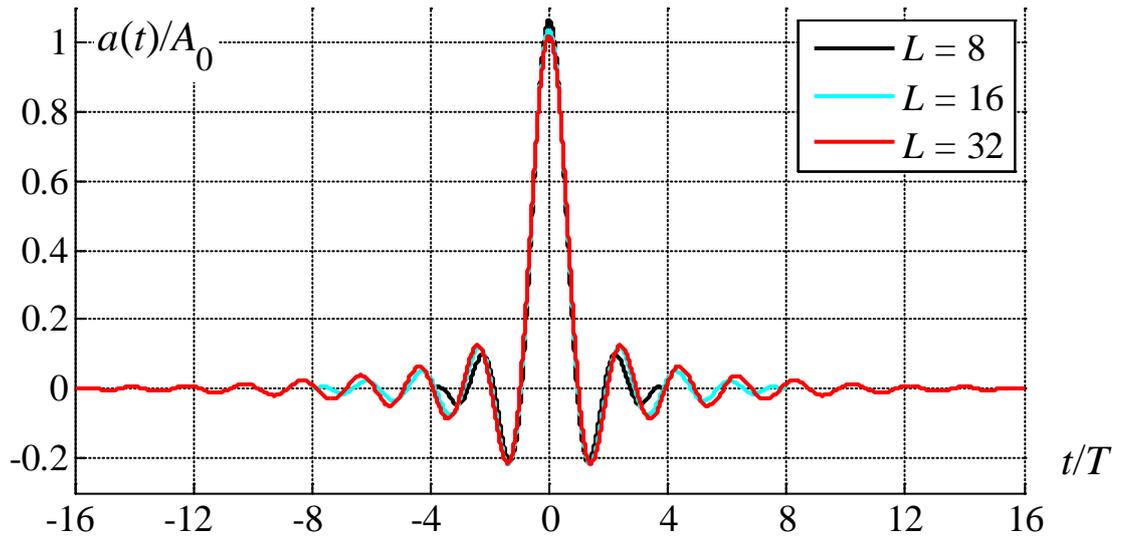


Рис. 3.12. Формы огибающей при ограничении на МКГК сигналов с ФМ-4,  $\kappa_g = 0,10$ ,  $\gamma = 6$  и  $L = 8, 16, 32$

В табл. 3.5 представлены характеристики решений оптимизационной задачи при ограничении на МКГК сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$ .

Табл. 3.5

| $L$ | $m$ | $\rho$ | $\kappa_g$ | $\kappa_p$ | $\Delta F_{99\%} T$ | $\Delta F_{-60\text{дБ}} T$ |
|-----|-----|--------|------------|------------|---------------------|-----------------------------|
| 2   | 7   | 3,44   | 0,01       | 0,005      | 1,83                | 8,66                        |
|     | 6   | 3,04   | 0,10       | 0,050      | 1,59                | 5,75                        |
|     | 4   | 2,97   | 0,19       | 0,095      | 1,36                | 7,41                        |
| 4   | 9   | 3,85   | 0,01       | 0,005      | 1,32                | 5,41                        |
|     | 6   | 4,64   | 0,10       | 0,044      | 1,18                | 4,68                        |
|     | 6   | 4,51   | 0,19       | 0,056      | 1,15                | 4,31                        |
|     | 6   | 4,25   | 0,53       | 0,247      | 0,90                | 3,61                        |
|     | 4   | 5,54   | 0,88       | 0,339      | 0,68                | 3,70                        |
| 8   | 12  | 5,98   | 0,01       | 0,004      | 1,11                | 3,54                        |
|     | 12  | 6,01   | 0,10       | 0,042      | 1,09                | 3,30                        |
|     | 11  | 5,64   | 0,19       | 0,088      | 1,07                | 3,04                        |
|     | 8   | 5,76   | 0,53       | 0,257      | 0,79                | 2,08                        |
|     | 7   | 6,37   | 0,88       | 0,344      | 0,64                | 2,11                        |

|    |    |       |       |       |      |      |
|----|----|-------|-------|-------|------|------|
|    | 6  | 8,52  | 1,57  | 0,422 | 0,45 | 1,79 |
|    | 4  | 11,03 | 2,26  | 0,454 | 0,34 | 1,85 |
| 16 | 19 | 9,24  | 0,01  | 0,004 | 1,03 | 2,82 |
|    | 18 | 8,51  | 0,10  | 0,049 | 1,03 | 2,67 |
|    | 18 | 7,72  | 0,19  | 0,094 | 1,02 | 2,62 |
|    | 10 | 6,33  | 0,53  | 0,258 | 0,78 | 1,30 |
|    | 10 | 7,07  | 0,88  | 0,341 | 0,62 | 1,43 |
|    | 8  | 10,09 | 1,57  | 0,425 | 0,41 | 1,11 |
|    | 7  | 12,93 | 2,26  | 0,455 | 0,31 | 1,00 |
|    | 6  | 16,89 | 3,64  | 0,479 | 0,22 | 0,90 |
|    | 4  | 22,06 | 5,01  | 0,488 | 0,17 | 0,93 |
| 32 | 28 | 12,82 | 0,01  | 0,004 | 1,00 | 2,00 |
|    | 27 | 11,60 | 0,10  | 0,049 | 1,00 | 1,92 |
|    | 26 | 10,28 | 0,19  | 0,094 | 0,99 | 1,83 |
|    | 18 | 6,46  | 0,53  | 0,258 | 0,78 | 1,16 |
|    | 17 | 7,35  | 0,88  | 0,340 | 0,62 | 0,95 |
|    | 11 | 10,94 | 1,57  | 0,425 | 0,41 | 0,75 |
|    | 10 | 14,38 | 2,26  | 0,456 | 0,30 | 0,68 |
|    | 9  | 19,72 | 3,64  | 0,480 | 0,21 | 0,62 |
|    | 9  | 25,47 | 5,01  | 0,488 | 0,16 | 0,55 |
|    | 6  | 33,66 | 7,77  | 0,495 | 0,11 | 0,45 |
|    | 4  | 44,12 | 10,53 | 0,497 | 0,08 | 0,46 |

Из анализа кривых на рис. 3.10–3.12 и данных в табл. 3.5 следуют выводы.

1. Повышение спектральной эффективности при фиксированном числе компонент  $L$  возможно только за счет ослабления ограничения на максимальный коэффициент групповой корреляции, т.е. увеличения значения  $\kappa_g$ , причем заметные изменения  $\beta_F$  начинаются только с некоторого порогового значения  $\kappa_g$ .

2. С ростом числа компонент независимо от значения ограничения на МКГК происходит снижение полосы  $\Delta F_{-60\text{дБ}}$ .

3. При ограничении коэффициента групповой корреляции значением  $\kappa_g = 0,01$ , т.е. при построении квазиортогональных многокомпонентных сигналов, удельные затраты полосы снижаются с ростом  $L$ , однако уже при  $L = 16$  практически достигают своего предельного значения [5, 19]. При этом пик-фактор сигналов увеличивается с ростом  $L$ .

4. Начиная со значения  $\kappa_g \sim 0,2$  кривые, построенные для разных  $L$ , практически совпадают. Таким образом, в области  $\kappa_g > 0,2$  для любого значения  $\beta_F$  существует единственная пара значений числа компонент и величины ограничения коэффициента групповой корреляции ( $L_{\beta_F}$  и  $\kappa_{\beta_F}$ ), при которых достигается заданная спектральная эффективность. Для  $L < L_{\beta_F}$  независимо от значения  $\kappa_g$  не удастся достигнуть заданную спектральную эффективность, а для  $L > L_{\beta}$  и  $\kappa_g = \kappa_{\beta_F}$  улучшить заданную спектральную эффективность не удастся.

5. В области заметных изменений  $\beta_F$ , т.е. для  $\kappa_g > 0,2$ , увеличение спектральной эффективности для любого числа компонент  $L$  приводит к увеличению пик-фактора многокомпонентных сигналов.

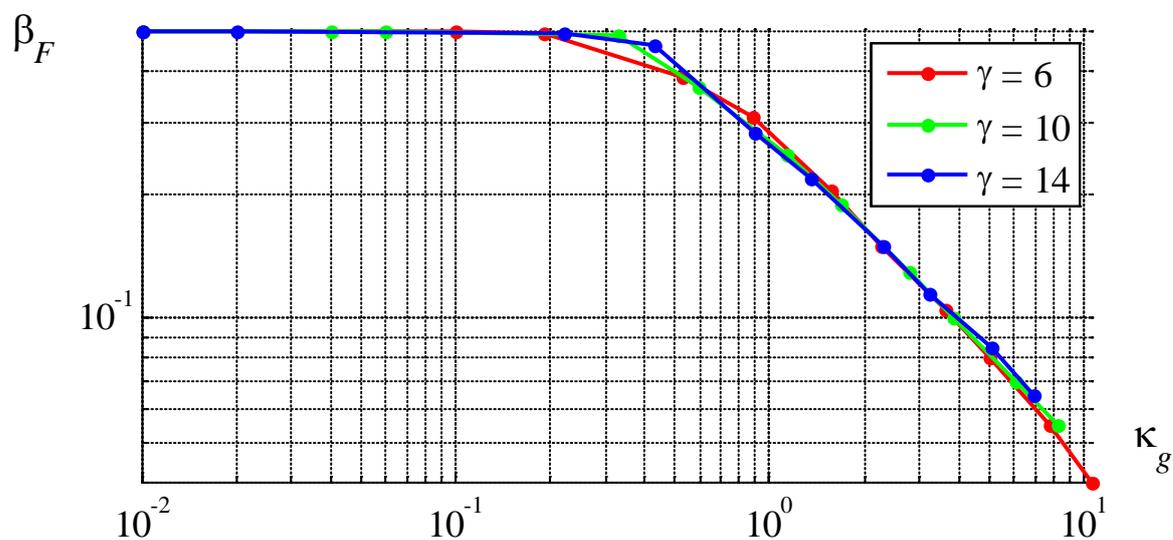
6. Значение  $\kappa_g$  однозначно связано со значением  $\kappa_p$  независимо от числа компонент  $L$ ; увеличение  $\kappa_g$  приводит к росту  $\kappa_p$ .

7. Для любых  $L$  усиление ограничения на коэффициент групповой корреляции, т.е. уменьшение значений  $\kappa_g$ , приводит к увеличению числа членов разложения в усеченный ряд Фурье, необходимого для получения заданной точности решения.

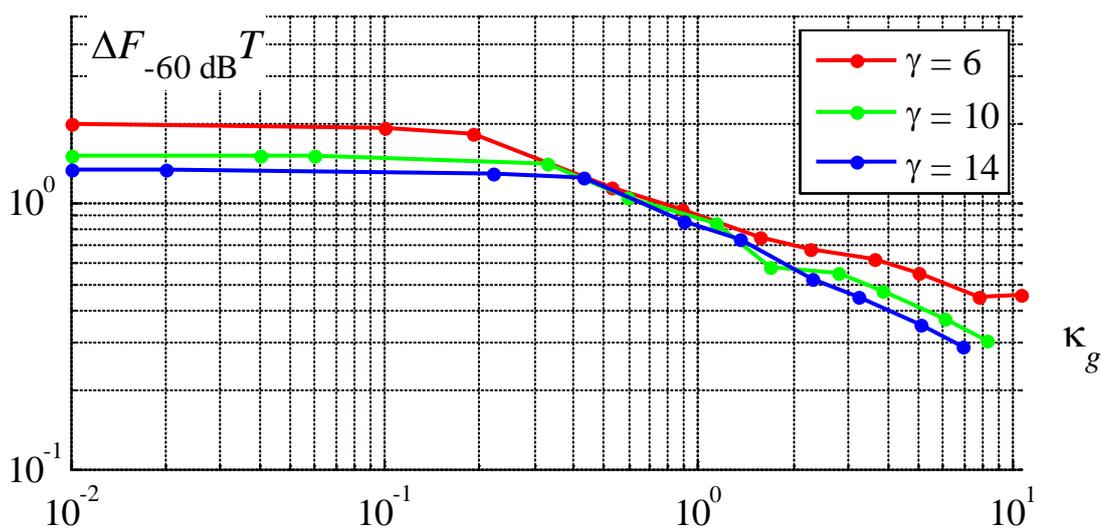
Исследование решений оптимизационной задачи при ограничении на МКГК для сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 10, 14$  показало, что тенденции, выявленные для  $\gamma = 6$  оказываются верными и для  $\gamma = 10, 14$ .

Для сравнения результатов при различных значениях скорости спада спектра на рис. 3.13а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F$ , а на рис. 3.13б – зависимости полосы  $\Delta F_{-60\text{дБ}}$  от  $\kappa_g$  для сигналов с ФМ-4,  $L = 32$

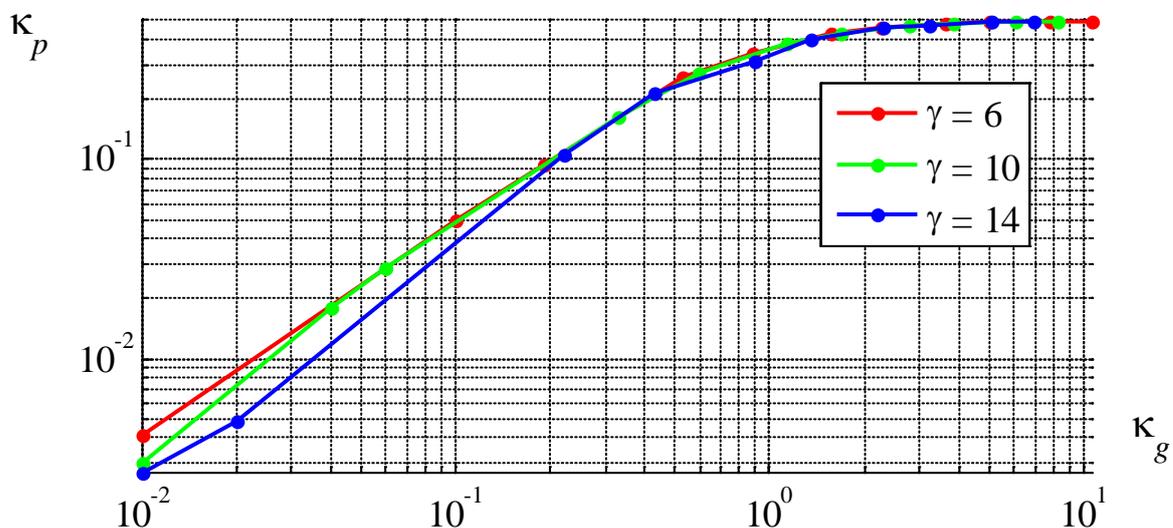
и  $\gamma = 6, 10, 14$ . На рис. 3.13*в-г* представлены зависимости получаемых максимального коэффициента парциальной корреляции и пик-фактора соответственно от величины  $\kappa_g$  для тех же условий.



a)



б)



в)

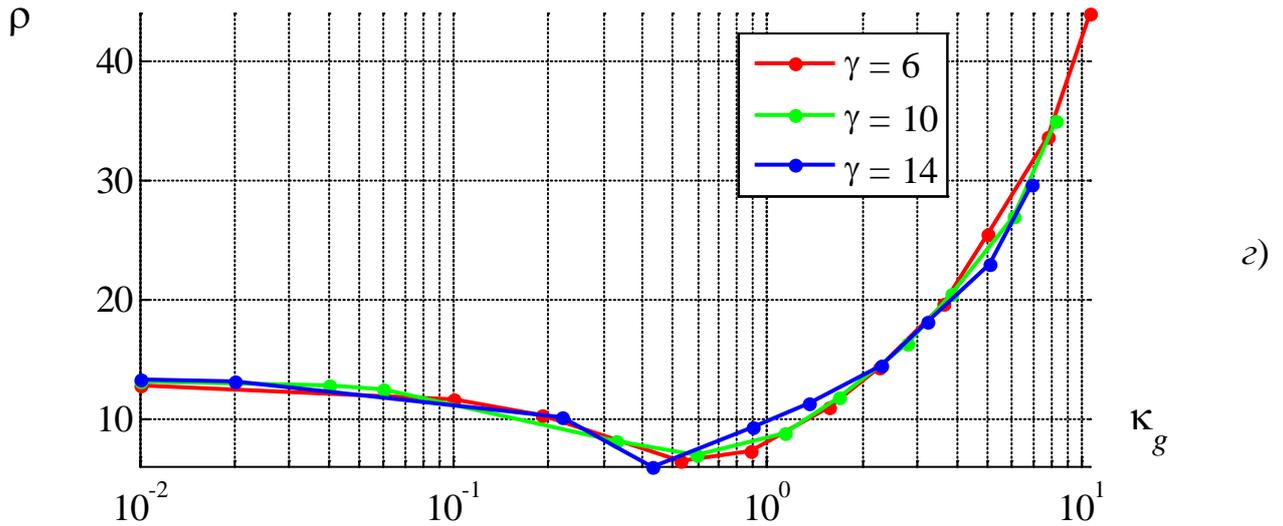


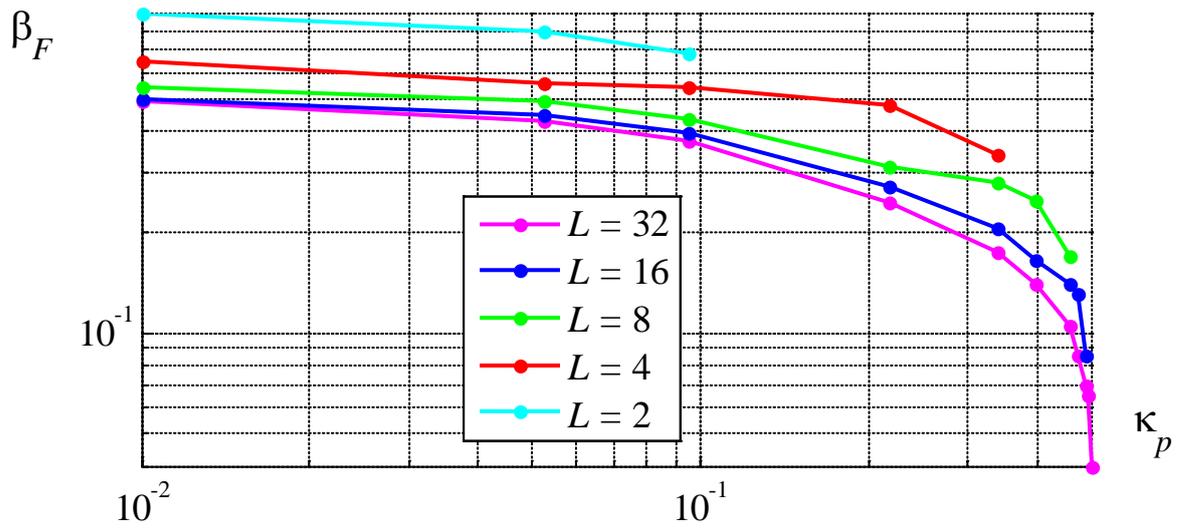
Рис. 3.13. Зависимости характеристик 32-компонентных сигналов с ФМ-4 от МКГК при ограничении на МКГК

Из анализа представленных кривых следует, что зависимости и спектральной эффективности, и значений максимальных коэффициентов парциальной корреляции, и пик-фактора при фиксированном значении  $\kappa_g$  практически совпадают для разных значений скоростей спада спектра. Тем не менее, количество компонент, при котором обеспечивается заданное значение  $\kappa_g$ , возрастает с ростом  $\gamma$ .

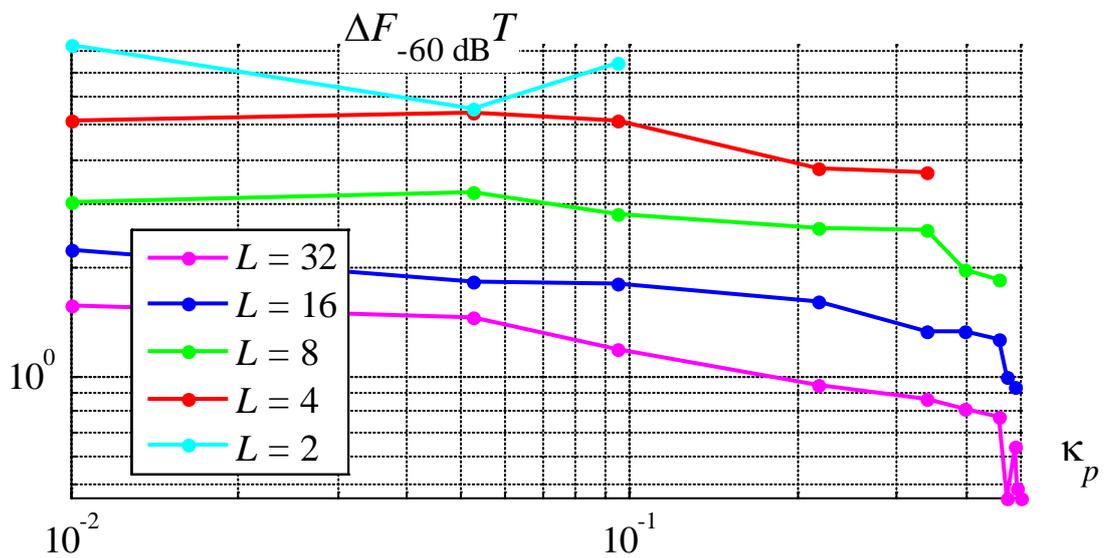
Из анализа кривых на рис. 3.13б следует, что с увеличением заданного значения скорости спада энергетического спектра полоса частот  $\Delta F_{-60 \text{ дБ}}$  уменьшается для квазиортогональных многокомпонентных сигналов и сигналов с большим уровнем МСИ.

### 3.2.2. Оптимизация при ограничении на МКПК

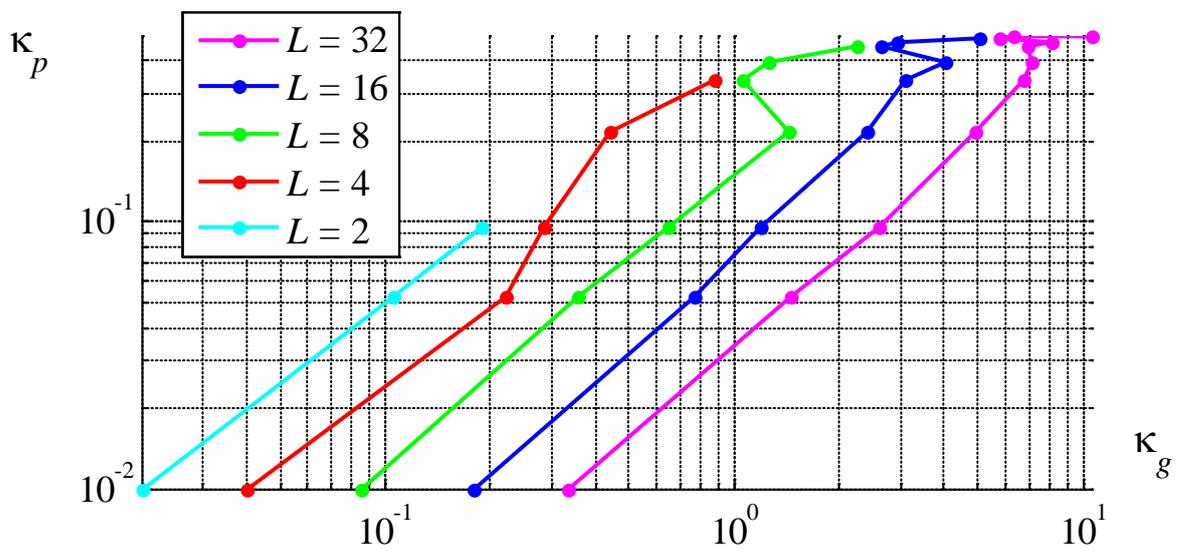
На рис. 3.14а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F$ , а на рис. 3.14б – зависимости полосы  $\Delta F_{-60 \text{ дБ}}$  от  $\kappa_p$  для сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$ . На рис. 3.14в–г представлены зависимости получаемых максимального коэффициента парциальной корреляции и пик-фактора соответственно от величины  $\kappa_p$  для тех же условий.



a)



b)



c)

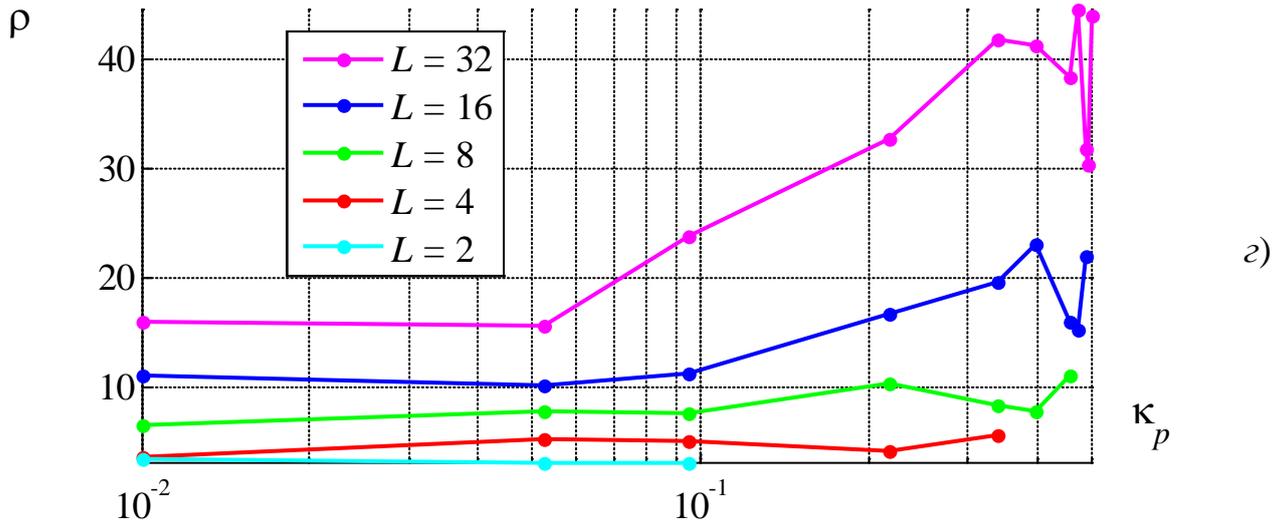
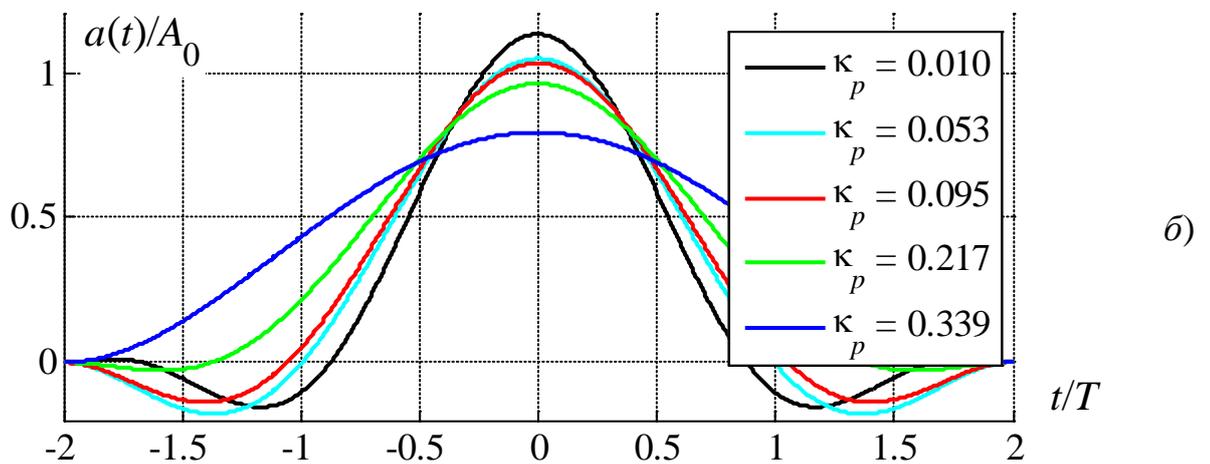
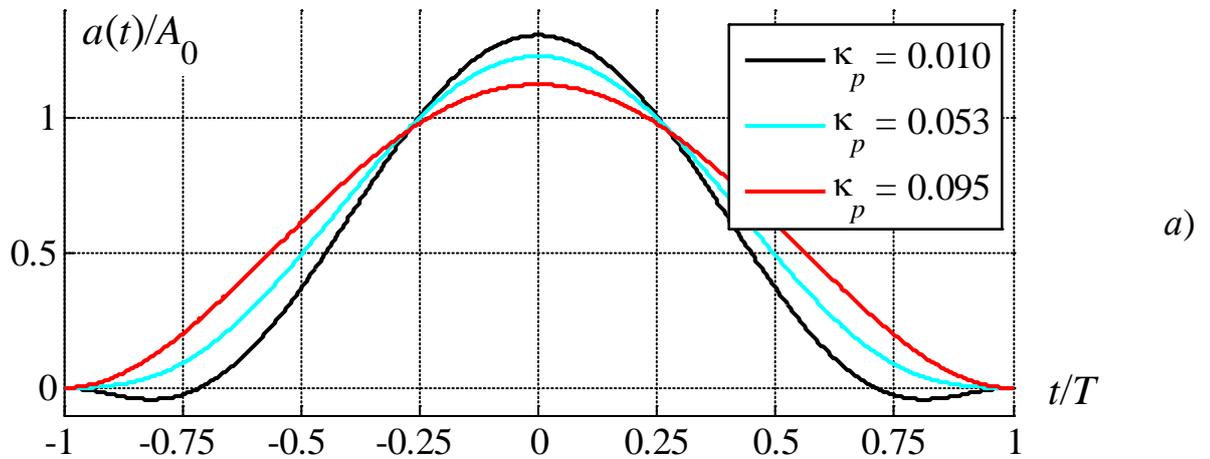
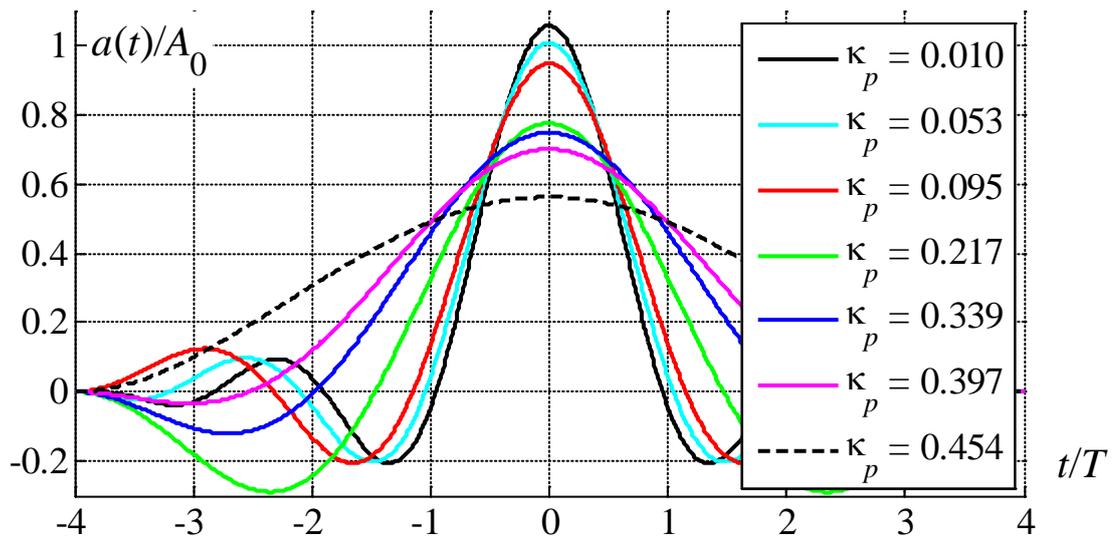


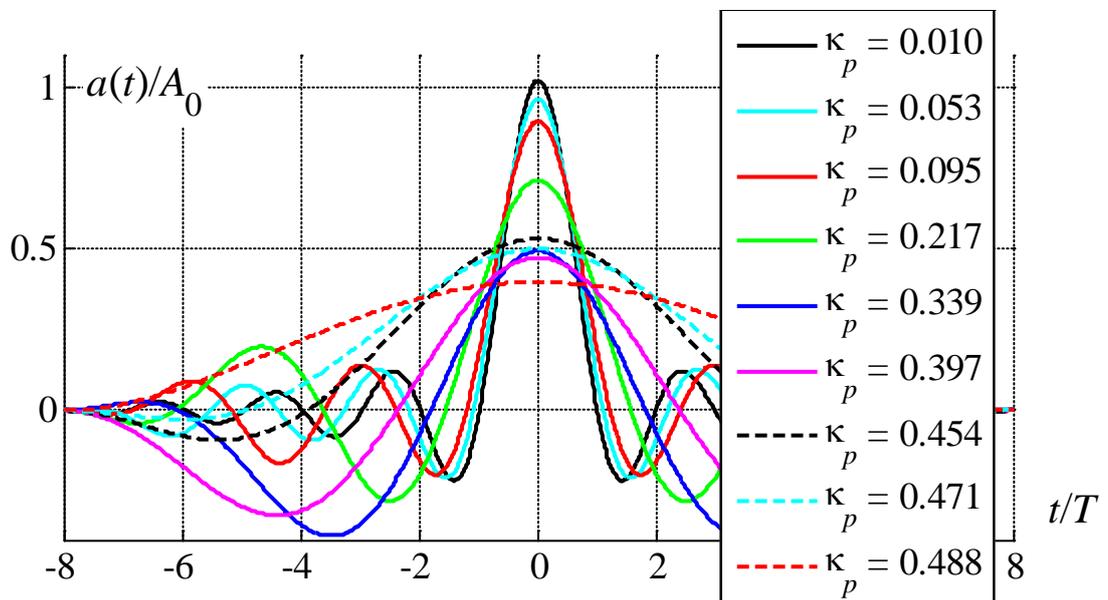
Рис. 3.14. Зависимости характеристик многокомпонентных сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$  от МКПК при ограничении на МКПК

На рис. 3.15а–е приведены формы огибающей для значений  $L = 2, 4, 8, 16, 32$  и 32 (дважды  $L = 32$ ) соответственно для разных значений  $\kappa_p$ , при этом  $\gamma = 6$ .

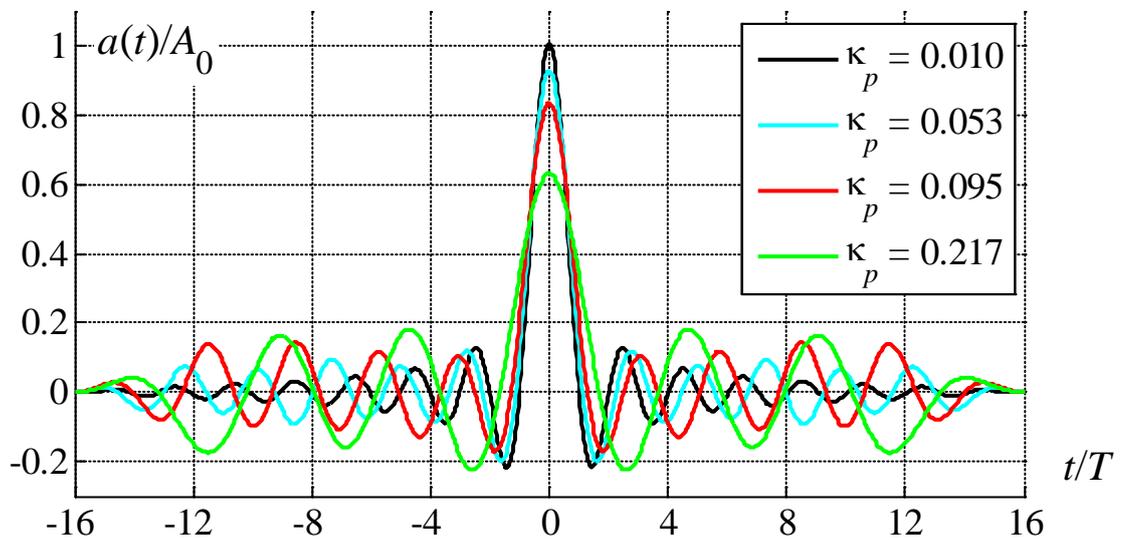




b)



c)



d)

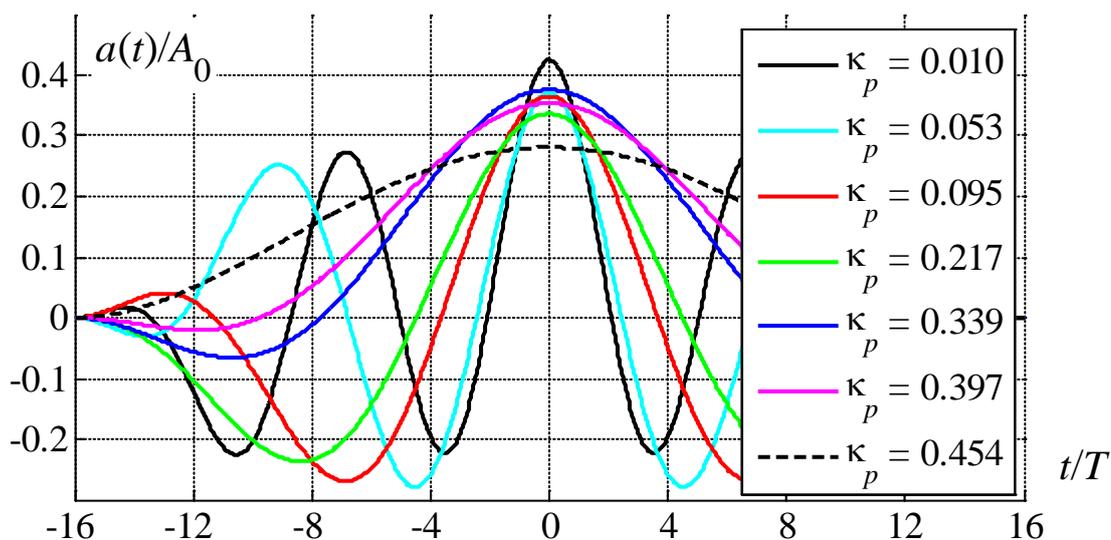


Рис. 3.15. Формы огибающей при ограничении на МКПК сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$

Из анализа кривых на рис. 3.15 следует, что, как и в случае ограничения на МКГК, с уменьшением  $\kappa_p$  огибающая  $a(t)$  многокомпонентных сигналов становится похожа на функцию вида  $\sin(x)/x^u$ . Однако в этом случае для  $\kappa_p < 0,048$  абсолютные значения локальных экстремумов значительно больше. Это вызвано тем, что необходимо минимизировать лишь максимальный коэффициент парциальной корреляции. При этом остальные коэффициенты парциальной корреляции могут оказаться соизмеримы с максимальным. В области  $\kappa_p > 0,048$ , т.е. при наличии слабых ограничений на МКПК, результат оптимизации практически совпадает с аналогичным случаем ограничения на МКГК.

По-прежнему, с приближением к границе тактового интервала огибающая становится все меньше похожа на функцию  $\sin(x)/x^u$  из-за наличия условий ограничения на скорость спада спектра.

Как и в случае ограничения МКГК для фиксированного значения  $\kappa_p$  огибающие сигналов с разным числом компонент тем ближе друг к другу, чем больше значения  $L$ . На рис. 3.16 представлены огибающие многокомпонентных сигналов с ФМ-4,  $\gamma = 6$ ,  $\kappa_p = 0,217$  и  $L = 8, 16, 32$ .

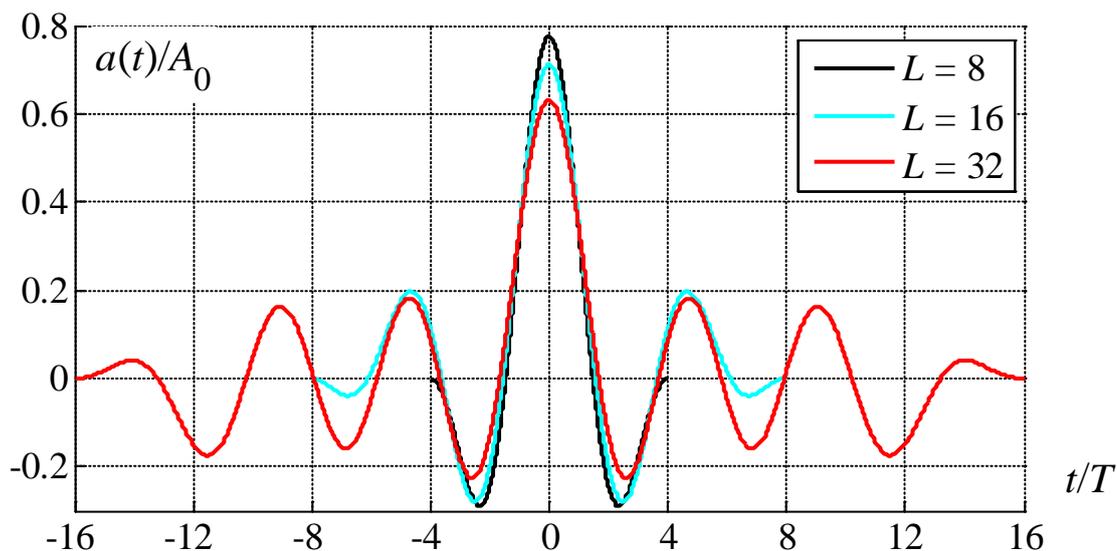


Рис. 3.16. Формы огибающей при ограничении на МКПК сигналов с ФМ-4,  $\kappa_p = 0,217$ ,  $\gamma = 6$  и  $L = 8, 16, 32$

В табл. 3.6 представлены характеристики решений оптимизационной задачи при ограничении на МКПК сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$ .

Табл. 3.6

| $L$ | $m$ | $\rho$ | $\kappa_g$ | $\kappa_p$ | $\Delta F_{99\%} T$ | $\Delta F_{-60\text{дБ}} T$ |
|-----|-----|--------|------------|------------|---------------------|-----------------------------|
| 2   | 7   | 3,41   | 0,02       | 0,010      | 1,81                | 8,40                        |
|     | 6   | 3,01   | 0,11       | 0,052      | 1,58                | 5,55                        |
|     | 4   | 2,97   | 0,19       | 0,095      | 1,36                | 7,41                        |
| 4   | 9   | 3,61   | 0,04       | 0,010      | 1,29                | 5,17                        |
|     | 7   | 5,26   | 0,22       | 0,052      | 1,11                | 5,38                        |
|     | 7   | 5,08   | 0,28       | 0,095      | 1,08                | 5,13                        |
|     | 6   | 4,21   | 0,44       | 0,217      | 0,96                | 3,77                        |
|     | 4   | 5,54   | 0,88       | 0,339      | 0,68                | 3,70                        |
| 8   | 11  | 6,48   | 0,08       | 0,010      | 1,09                | 3,04                        |
|     | 10  | 7,73   | 0,36       | 0,052      | 0,98                | 3,27                        |
|     | 7   | 7,64   | 0,65       | 0,095      | 0,87                | 2,84                        |
|     | 7   | 10,39  | 1,43       | 0,217      | 0,63                | 2,57                        |
|     | 6   | 8,31   | 1,05       | 0,339      | 0,56                | 2,54                        |

|    |    |       |       |       |      |      |
|----|----|-------|-------|-------|------|------|
|    | 6  | 7,85  | 1,26  | 0,397 | 0,50 | 1,97 |
|    | 4  | 11,03 | 2,26  | 0,454 | 0,34 | 1,85 |
| 16 | 10 | 11,00 | 0,18  | 0,010 | 1,00 | 2,24 |
|    | 8  | 10,22 | 0,77  | 0,052 | 0,90 | 1,84 |
|    | 8  | 11,27 | 1,19  | 0,095 | 0,79 | 1,82 |
|    | 8  | 16,70 | 2,39  | 0,217 | 0,55 | 1,62 |
|    | 8  | 19,71 | 3,11  | 0,339 | 0,41 | 1,34 |
|    | 6  | 23,08 | 4,03  | 0,397 | 0,33 | 1,33 |
|    | 6  | 16,01 | 2,63  | 0,454 | 0,28 | 1,27 |
|    | 6  | 15,29 | 2,95  | 0,471 | 0,26 | 1,00 |
|    | 4  | 22,06 | 5,01  | 0,488 | 0,17 | 0,93 |
| 32 | 21 | 15,92 | 0,33  | 0,010 | 0,98 | 1,58 |
|    | 19 | 15,55 | 1,46  | 0,052 | 0,86 | 1,45 |
|    | 19 | 23,75 | 2,59  | 0,095 | 0,75 | 1,19 |
|    | 16 | 32,82 | 4,89  | 0,217 | 0,49 | 0,94 |
|    | 8  | 41,89 | 6,72  | 0,339 | 0,35 | 0,86 |
|    | 8  | 41,26 | 7,15  | 0,397 | 0,28 | 0,81 |
|    | 8  | 38,46 | 6,93  | 0,454 | 0,21 | 0,77 |
|    | 7  | 44,49 | 8,14  | 0,471 | 0,17 | 0,46 |
|    | 6  | 31,83 | 5,76  | 0,488 | 0,14 | 0,64 |
|    | 5  | 30,33 | 6,33  | 0,492 | 0,13 | 0,49 |
|    | 4  | 44,12 | 10,53 | 0,497 | 0,08 | 0,46 |

Из анализа кривых рис. 3.14–3.16 и данных табл. 3.6 следуют выводы.

1. Как и в случае ограничения на МКГК повышение спектральной эффективности при фиксированном числе компонент  $L$  возможно только за счет ослабления ограничения на максимальный коэффициент парциальной корреляции, т.е. увеличения значения  $\kappa_p$ , причем заметные изменения  $\beta_F$  начинаются только с некоторого порогового значения  $\kappa_p$ .

2. Повышение спектральной эффективности при фиксированном значении  $\kappa_p$  возможно за счет увеличения числа компонент, однако, скорость повышения эффективности быстро падает с ростом числа компонент.

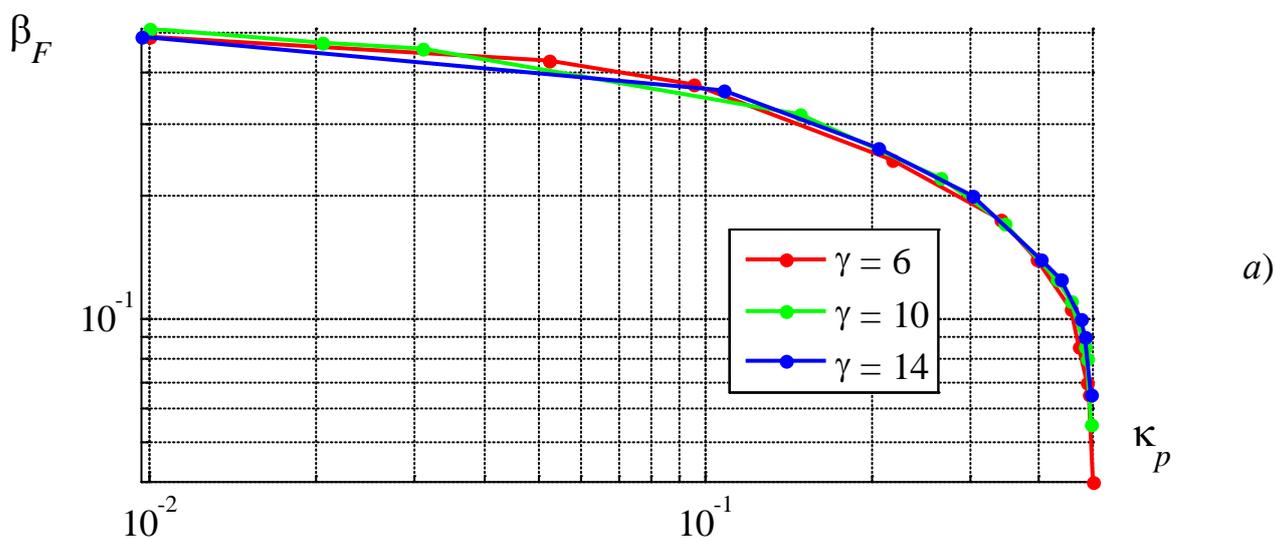
3. Ширина полосы частот  $\Delta F_{-60\text{дБ}}$  также уменьшается с ростом значения  $\kappa_p$  и увеличением числа компонент.

4. При фиксированном значении  $\kappa_p$  с увеличением числа компонент МКГК также возрастает.

5. Аналогично случаю ограничения МКГК, для  $\kappa_p < 0,2$  пик-фактор колебаний практически не зависит значения  $\kappa_p$  и тем больше, чем больше число компонент. В области  $\kappa_p > 0,2$  пик-фактор колебания возрастает не только с увеличением числа компонент, но и с увеличением значения  $\kappa_p$ .

Исследование решений оптимизационной задачи при ограничении на МКГК для сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 10, 14$  показало, что тенденции, выявленные для  $\gamma = 6$ , оказываются верными и для  $\gamma = 10, 14$ .

Для сравнения результатов при различных значениях скорости спада спектра на рис. 3.17а представлены зависимости удельных спектральных затрат  $\beta_F$ , а на рис. 3.17б – зависимости полосы  $\Delta F_{-60\text{дБ}}$  от  $\kappa_p$  для сигналов с ФМ-4,  $L = 32$  и  $\gamma = 6, 10, 14$ . На рис. 3.17в–г представлены зависимости получаемых максимального коэффициента парциальной корреляции и пик-фактора соответственно от величины  $\kappa_p$  для тех же условий.



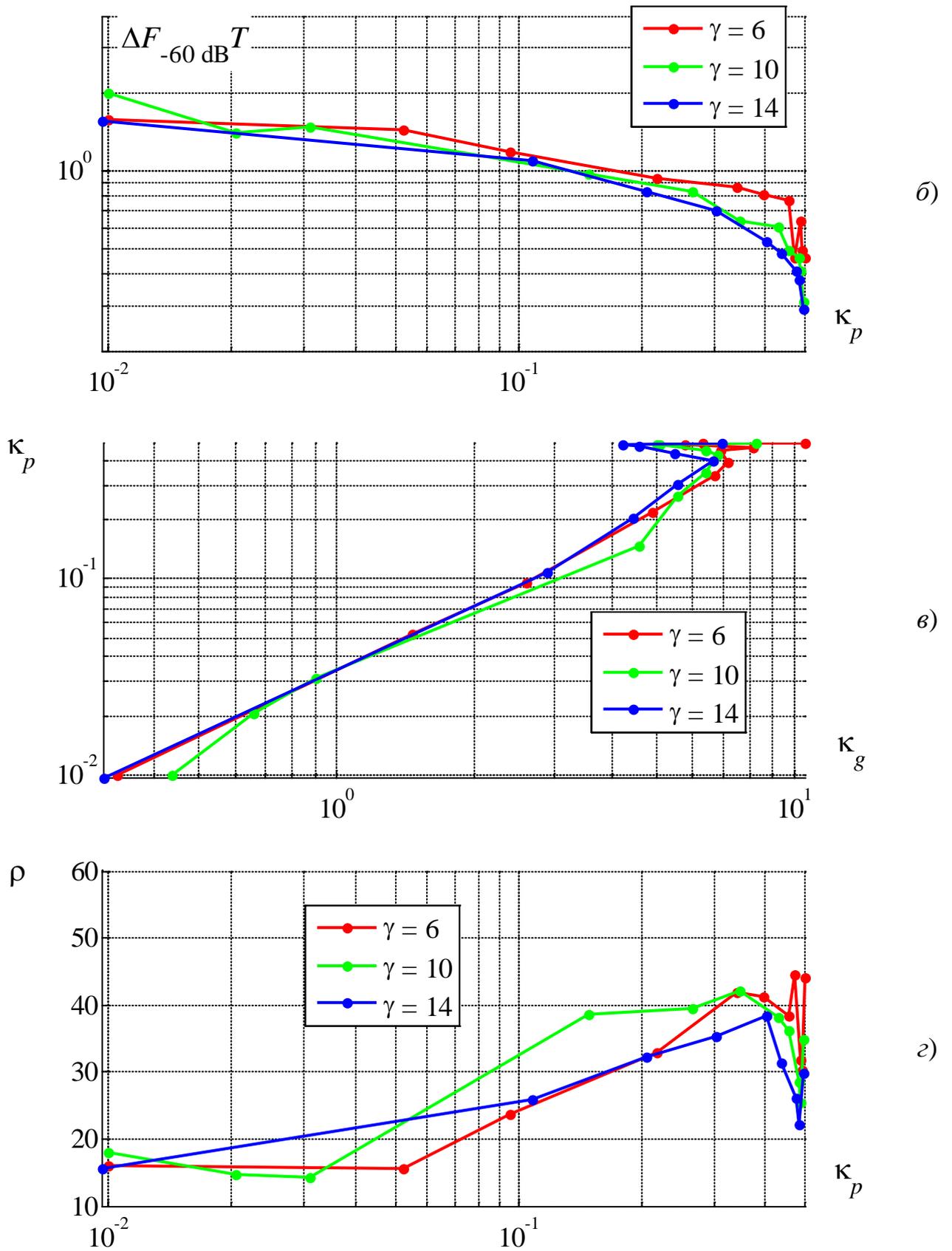


Рис. 3.17. Зависимости характеристик 32-компонентных сигналов с ФМ-4 от МКПК при ограничении на МКПК

Из анализа представленных кривых следует, что зависимости спектральной эффективности, и значений максимальных коэффициентов групповой корреляции при фиксированном значении  $\kappa_p$  практически совпадают для разных значений скоростей спада спектра. Тем не менее, количество компонент, при котором обеспечивается заданное значение  $\kappa_p$ , возрастает с ростом  $\gamma$ .

С увеличением заданного значения скорости спада энергетического спектра полоса частот  $\Delta F_{-60 \text{ дБ}}$  уменьшается для многокомпонентных сигналов с большим уровнем МСИ.

### 3.2.3. Сравнение результатов оптимизации при ограничениях на МКГК и МКПК

С целью сравнения решений оптимизационной задачи при ограничении на МКГК и МКПК на рис. 3.18 представлены зависимости  $\kappa_p$  от  $\kappa_g$  для сигналов с ФМ-4,  $\gamma = 6$  и  $L = 4, 8, 16, 32$ , кривые 1–4 соответствуют решениям задачи при ограничении на МКПК, кривые 5–8 – на МКГК.

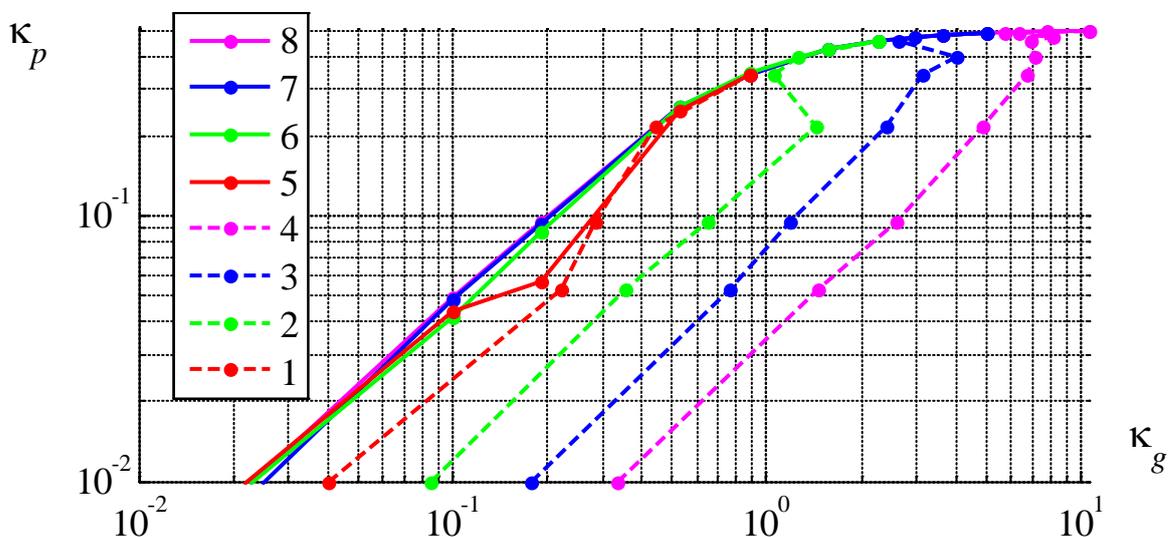


Рис. 3.18. Зависимости МКПК от МКГК для сигналов с ФМ-4,  $\gamma = 6$  и  $L = 4, 8, 16, 32$

Из представленных кривых следует, что при заданном значении  $\kappa_p$  минимальное значение  $\kappa_g$  достигается при решении задачи с ограничением на МКГК; при заданном значении  $\kappa_g$  минимальное значение  $\kappa_p$  достигается при решении задачи с ограничением на МКПК. Это и понятно: например, при ограничении коэффициента парциальной корреляции с ростом  $L$  количество парциальных

корреляций увеличивается, и максимальный коэффициент групповой корреляции возрастает.

Напомним, что минимизация того или иного коэффициента корреляции направлена на снижение уровня МСИ, которая, в свою очередь, является причиной ухудшения помехоустойчивости приема многокомпонентных сигналов. Очевидно, невозможно указать какой именно из двух рассматриваемых коэффициентов корреляции непосредственно связан с помехоустойчивостью. Однако, говоря о возможностях применения многокомпонентных сигналов, всегда будем ограничивать коэффициент групповой корреляции. С одной стороны, логично предположить, что на помехоустойчивость приема в большей степени влияет суммарная корреляция, т.е. коэффициент групповой корреляции. С другой стороны при ограничении коэффициента групповой корреляции значение коэффициента парциальной корреляции оказывается однозначно связанным с  $\kappa_g$  независимо от  $L$ .

### **3.3. Оптимизация при наличии ограничений на пик-фактор и корреляционные свойства**

Используя результаты, полученные в разд. 3.1 и 3.2, определим зависимость спектральной эффективности многокомпонентных сигналов от заданных ограничений на пик-фактор и корреляционные свойства. На рис. 3.19 для сигналов с ФМ-4,  $\gamma = 6$  и  $L = 2, 4, 8, 16, 32$  представлены зависимости  $\rho$  от  $\kappa_g$ . При этом заштрихованные области соответствуют комбинациям значений  $\rho$  и  $\kappa_g$ , которые достижимы при синтезе многокомпонентных сигналов с числом компонент от  $2 \leq L \leq 16$ . Также обозначены линии уровня спектральной эффективности.

Из анализа представленных данных следует, что, во-первых, повышение спектральной эффективности при использовании многокомпонентных сигналов возможно при увеличении количества компонент, повышении пик-фактора колебаний и максимального коэффициента групповой корреляции.

Во-вторых, не для всех пар значений  $\rho$  и  $\kappa_g$  можно построить многокомпонентные сигналы. Например, невозможно добиться сколь угодно большого увеличения коэффициента групповой корреляции, т.е. увеличения уровня МСИ, при сохранении произвольного значения пик-фактора колебаний. Таким образом, будем говорить о достижимых и недостижимых парах значений  $\rho$  и  $\kappa_g$ .

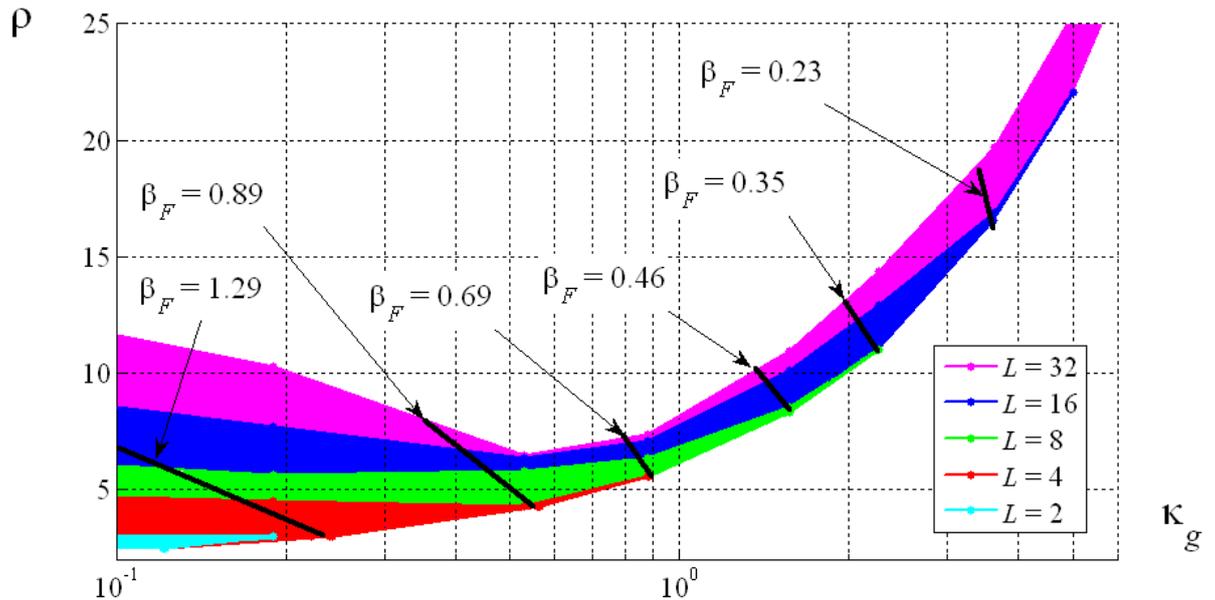


Рис. 3.19. Зависимость пик-фактора колебаний от МКГК для многокомпонентных сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$

В-третьих, для каждой достижимой пары значений  $\rho$  и  $\kappa_g$  существует граничное значение числа компонент  $L_{zp}$ , при котором еще удастся повысить спектральную эффективность. При попытке синтеза многокомпонентных сигналов с  $L > L_{zp}$ , и тех же значениях  $\rho$  и  $\kappa_g$  получаются  $L_{zp}$ -компонентные сигналы. Так, для пары  $\rho = 7,5$  и  $\kappa_g = 1,0$  получим  $L_{zp} = 16$ .

### 3.4. Выводы по главе 3

1. Показано, что повышение спектральной эффективности при использовании многокомпонентных сигналов возможно при увеличении количества компонент и ослаблении ограничений на пик-фактор колебаний, максимальный коэффициент групповой корреляции и максимальный коэффициент парциаль-

ной корреляции. Так, при переходе от  $L = 2$  к  $L = 16$  предельно достижимая спектральная эффективность для сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$  уменьшается с  $\beta_F = 0,68$  до  $\beta_F = 0,09$ .

2. Показано, что не для всех пар значений  $\rho$  и  $\kappa_g$  можно построить многокомпонентные сигналы. Например, невозможно добиться сколь угодно большого увеличения коэффициента групповой корреляции, т.е. увеличения уровня МСИ, при сохранении произвольного значения пик-фактора колебаний.

3. Для каждой достижимой пары значений  $\rho$  и  $\kappa_g$  существует граничное значение числа компонент  $L_{cp}$ , при котором еще удастся повысить спектральную эффективность. При попытке синтеза многокомпонентных сигналов с  $L > L_{cp}$ , и тех же значениях  $\rho$  и  $\kappa_g$  получаются  $L_{cp}$ -компонентные сигналы. Так, для пары  $\rho = 7,5$  и  $\kappa_g = 1,0$  получим  $L_{cp} = 16$ .

4. При ограничении коэффициента групповой корреляции значением  $\kappa_g = 0,01$ , т.е. при построении квазиортогональных многокомпонентных сигналов, удельные затраты полосы снижаются с ростом  $L$ , однако уже при  $L = 16$  практически достигают своего предельного значения. При этом пик-фактор сигналов увеличивается с ростом  $L$ .

5. Для любых  $L$  усиление ограничения на пик-фактор или на МКГК или на МКПК, приводит к увеличению числа членов разложения в усеченный ряд Фурье, необходимого для получения заданной точности решения.

## Глава 4. Формирование и прием многокомпонентных сигналов

Для многокомпонентных сигналов, описанных во второй главе, рассмотрены квадратурные методы формирования и демодуляции. Предложен алгоритм приема многокомпонентных сигналов на основе алгоритма Витерби. Описана имитационная модель системы передачи информации, использующая многокомпонентные сигналы и позволяющая оценить помехоустойчивость приема. На основе спектральных характеристик и полученных кривых помехоустойчивости оценена эффективность использования многокомпонентных сигналов с точки зрения близости к границе Шеннона.

### 4.1. Метод формирования многокомпонентных сигналов

Предлагается квадратурный способ формирования многокомпонентных сигналов с КАМ [27], упрощенная структурная схема которого представлена на рис. 4.1.

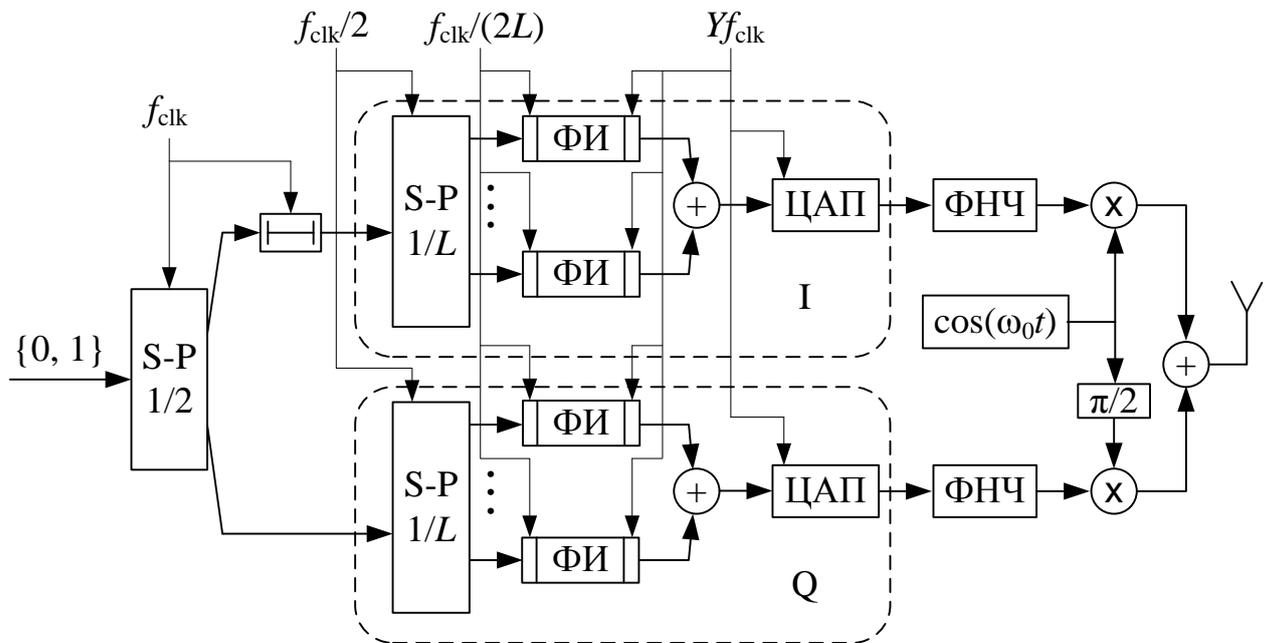


Рис. 4.1. Упрощенная структурная схема формирования многокомпонентных сигналов с КАМ

Поясним функционирование схемы на рис. 4.1. Пусть необходимо сформировать  $L$ -компонентные сигналы с длительностью тактового интервала компонент  $LT$  и  $M$ -позиционной КАМ. Тогда на вход формирователя многокомпонентных сигналов с частотой  $f_{\text{clk}} = \log_2 M / T$  должны поступать двоичные символы. Последовательность таких символов, прежде всего, проходит через последовательно-параллельный преобразователь (S-P), который тактируется частотой  $f_{\text{clk}}$  и разделяет входящую последовательность на две по принципу четный, нечетный, соответственно для формирования синфазной и квадратурной составляющих сигнала. Подпоследовательность, символ которой появляется первым на выходе последовательно-параллельного преобразователя, проходит через линию задержки на один такт частоты  $f_{\text{clk}}$ . Это необходимо для одновременного формирования квадратурных составляющих одной компоненты.

Далее подпоследовательности снова проходят через последовательно-параллельный преобразователь (каждая через свой), однако в этот раз разделяются на  $L$  составляющих; принцип деления остается неизменным: первый, второй, ...,  $L$ -й. Используемые два последовательно-параллельных преобразователя тактируются частотой  $f_{\text{clk}} / 2$ .

Таким образом, на формирователи импульсов (ФИ) с частотой  $f_{\text{clk}} / 2L$  поступают двоичные символы. Вход ФИ тактируется частотой  $f_{\text{clk}} / 2L$ . Причем тактовые импульсы поступают на ФИ с определенной задержкой (на рис. 4.1 блок задержки входит в ФИ): для первой компоненты  $\tau_1 = 0$ , для второй компоненты  $\tau_2 = 1 / (f_{\text{clk}} / 2)$ , и т.д. для  $p$ -й компоненты  $\tau_p = (p - 1) / (f_{\text{clk}} / 2)$ . Блок ФИ устроен таким образом, что сохраняет поступающие двоичные символы до тех пор, пока их количество не составит  $\log_2 M / 2$ . Обратим внимание, что заполнение ФИ происходит за период  $LT$ . При заполнении ФИ необходимым числом двоичных символов на выходе начинается формирование сигнала одного тактового интервала одной квадратуры одной компоненты длительностью  $LT$ , т.е. до следующего заполнения входа ФИ. В этом случае входные данные используются для определения амплитуды и полярности импульса, как при формировании сигналов с АФМ. Сигнал на выходе ФИ дискретизирован по времени (с

частотой  $Yf_{\text{clk}}$ ) и квантован по уровню в соответствии с числом разрядов цифро-аналогового преобразователя и известного значения пик-фактора результирующего сигнала. Значение  $Y$  выбирается так, чтобы обеспечить заданную точность характеристик формируемого сигнала.

Сигналы разных компонент складываются в квадратурах и подвергаются цифро-аналоговому преобразованию. Суммарные сигналы разных квадратур поступают на фильтр нижних частот, формирующий спектральную маску сигналов.

Полученные на нулевой частоте квадратурные составляющие переносятся на несущую частоту, складываются и излучаются в пространство. Обратим внимание, что на практике перенос на несущую частоту обычно осуществляется в несколько этапов с использованием промежуточных частот.

При формировании многокомпонентных сигналов с одинаковой АФМ предложенная схема упрощается (рис. 4.2). В этом случае отсутствует первый последовательно-параллельный преобразователь, линия задержки и блок формирования одной из квадратур. Также в отличие от рис. 4.1 блок ФИ ожидает поступления  $\log_2 M$  двоичных символов, т.е. в два раза больше, чем для сигналов с КАМ при фиксированном размере модуляционного созвездия.

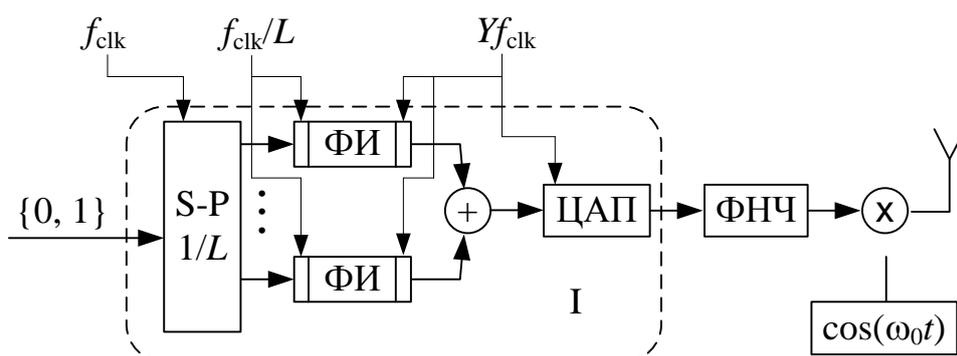


Рис. 4.2. Упрощенная структурная схема формирования многокомпонентных сигналов с одинаковой АФМ

Обе предложенные схемы рис. 4.1 и рис. 4.2 могут быть использованы и для формирования традиционных однокомпонентных сигналов со сглаженной огибающей. В этом случае в обеих схемах отпадает необходимость в использовании последовательно-параллельных преобразователей в квадратурах.

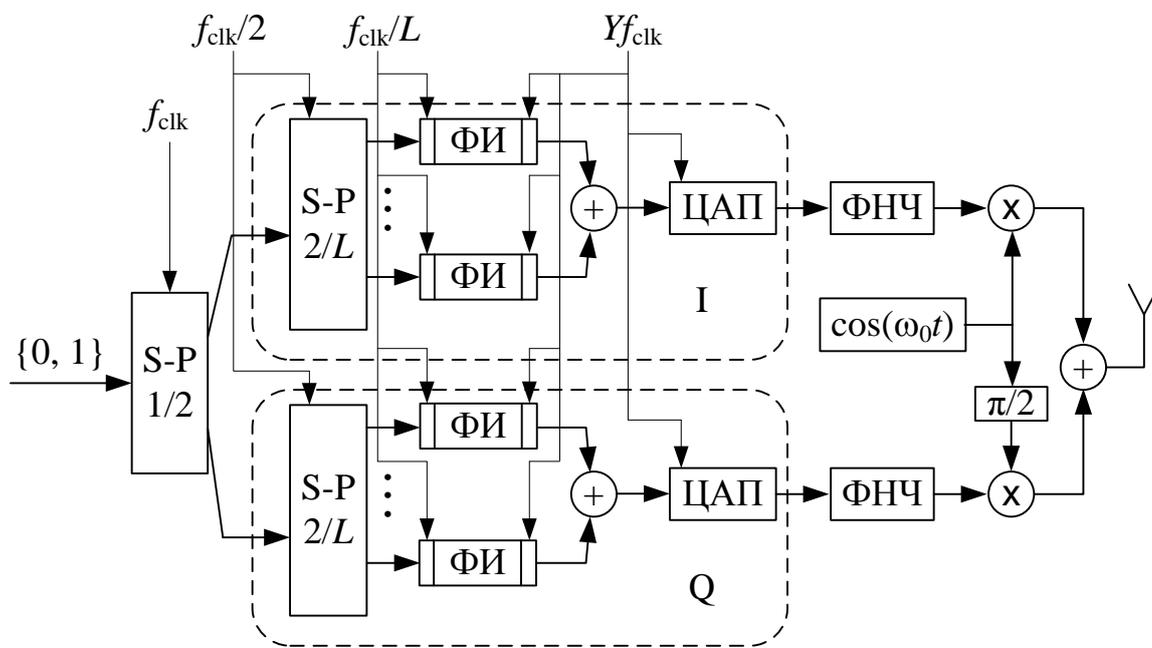


Рис. 4.3. Упрощенная структурная схема формирования многокомпонентных сигналов с АФМ и созвездиями, повернутыми на угол  $\alpha = \pi/2$

На рис. 4.3 представлена схема формирования многокомпонентных сигналов с АФМ, когда созвездия компонент с четными номерами повернуты относительно созвездий компонент с нечетными номерами на угол  $\alpha = \pi/2$ . Отличие от схемы на рис. 4.1 заключается в том, что отсутствует линия задержки перед формирователем одной из квадратур, а блок ФИ, как и на схеме рис. 4.2 ожидает поступления  $\log_2 M$  двоичных символов.

На основе имитационного моделирования рассмотрены погрешности реализации оптимальных форм сигналов при использовании конечной разрядной сетки [36–37]. В табл. 4.1 приведены значения отклонений пик-фактора и ширины полосы  $\Delta F_{99\%}$  для 8-компонентных сигналов с ФМ-4 и  $\gamma = 6$ , огибающая которых получена при решении оптимизационной задачи при ограничении на

МКГК для  $\kappa_g = 0,53$ , где  $N$  – количество разрядов АЦП. Отклонения указаны в процентах от теоретических значений. Также приведены значения среднеквадратического отклонения формируемой огибающей от теоретической.

Табл. 4.1

|                     | $N \backslash Y$ | $Y$     |         |        |        |        |
|---------------------|------------------|---------|---------|--------|--------|--------|
|                     |                  | 4       | 8       | 16     | 32     | 64     |
| $\Pi_{\text{ФМ-4}}$ | 8                | -38,28% | -12,01% | -1,59% | -1,59% | -1,59% |
|                     | 16               | -30,79% | -11,78% | -2,84% | -0,68% | -0,19% |
| $\Delta F_{99\%} T$ | 8                | >100%   | >100%   | 2,15%  | 0,38%  | <0,01% |
|                     | 16               | >100%   | >100%   | 1,90%  | 0,13%  | <0,01% |
| $\sigma$            | 8                | 0,3050  | 0,1589  | 0,0804 | 0,0409 | 0,0214 |
|                     | 16               | 0,3049  | 0,1586  | 0,0800 | 0,0401 | 0,0201 |

Из анализа представленных в табл. 4.1 данных следует, что при увеличении разрядности АЦП и частоты дискретизации формируемая огибающая и соответственно характеристики получаемого колебания быстро стремятся к теоретическим. Например, для  $Y = 64$  и  $N = 16$  пик-фактор формируемых колебаний отличается от теоретического значения менее чем на 0,2%.

Для синтезированных в разд. 3 огибающих получено, что погрешности реализации оптимальных форм сигналов при использовании конечной разрядной сетки и снижении разрядности ЦАП с 16 до 8 составляют не более 2%. При этом значения  $Y$ , при которых достигается такая точность, составляют от 16 до 128 в зависимости от вида огибающей.

Рассмотрим примеры формирования многокомпонентных сигналов с использованием предложенных структурных схем. На рис. 4.4 представлен пример формирования 2-компонентного сигнала с ФМ-2, когда созвездие первой компоненты повернуто относительно созвездия второй компоненты на угол  $\alpha = \pi/2$ . При этом используется огибающая, обеспечивающая минимальное значение пик-фактора  $\Pi = 2,01$  при заданной скорости спада спектра  $\gamma = 14$ . Коэф-

коэффициенты разложения решения соответствующей оптимизационной задачи в усеченный ряд Фурье представлены в табл. 4.2.

Табл. 4.2

|       |                         |       |                         |          |                         |
|-------|-------------------------|-------|-------------------------|----------|-------------------------|
| $a_0$ | $1,6054 \cdot 10^0$     | $a_4$ | $4,9269 \cdot 10^{-2}$  | $a_8$    | $-5,0257 \cdot 10^{-4}$ |
| $a_1$ | $8,2107 \cdot 10^{-1}$  | $a_5$ | $1,0502 \cdot 10^{-2}$  | $a_9$    | $2,0069 \cdot 10^{-4}$  |
| $a_2$ | $-1,3842 \cdot 10^{-1}$ | $a_6$ | $-4,1017 \cdot 10^{-3}$ | $a_{10}$ | $-9,0947 \cdot 10^{-5}$ |
| $a_3$ | $-1,2412 \cdot 10^{-1}$ | $a_7$ | $1,1754 \cdot 10^{-3}$  | $a_{11}$ | $4,4040 \cdot 10^{-5}$  |

На рис. 4.4 представлен начальный этап формирования сигнала при поступлении двоичной последовательности  $\{1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, \dots\}$  на вход формирователя сигнала.

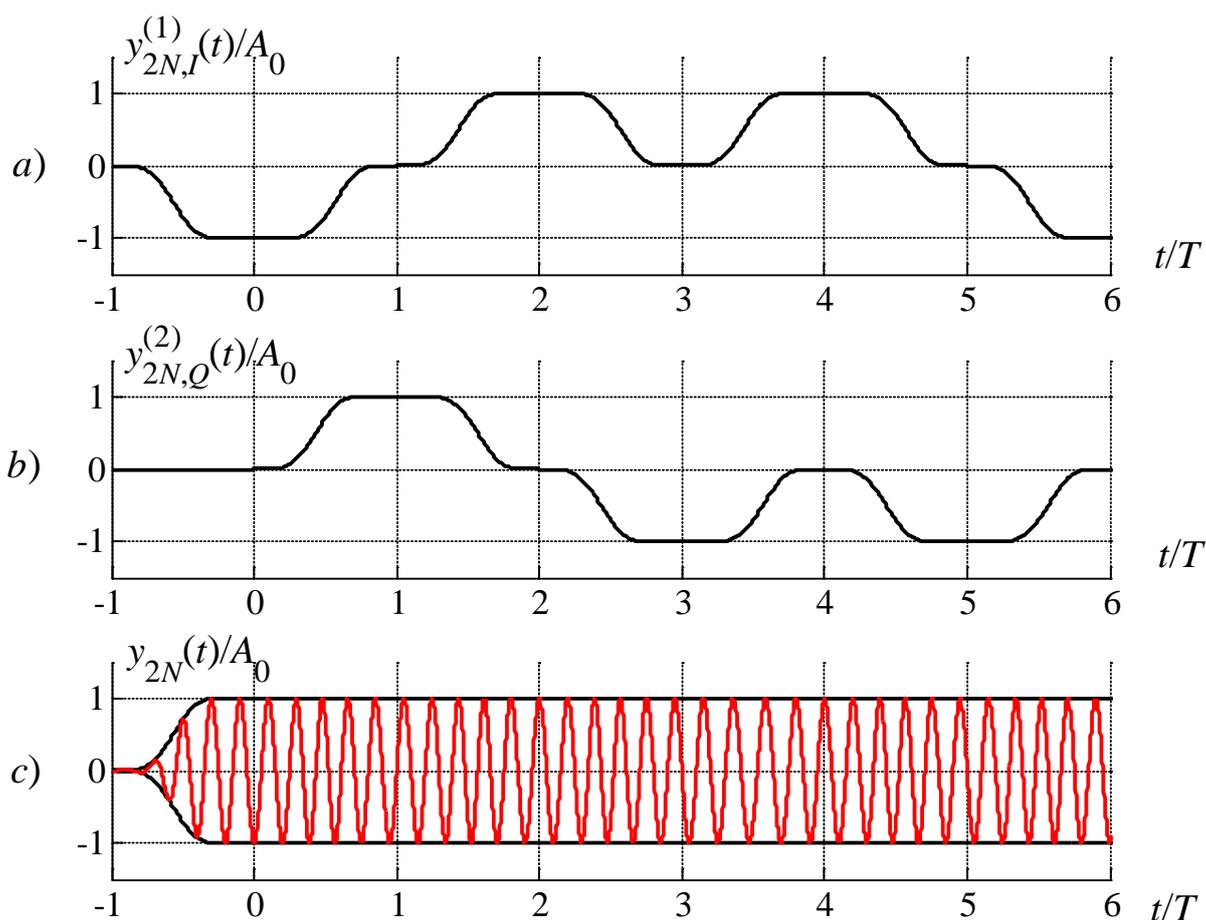


Рис. 4.4. Сигналы с выхода формирователя импульса первой и второй компонент соответственно  $a$ – $b$ ); сигнал, сформированный на несущей частоте  $f_0 = 5/T$   $c$ )

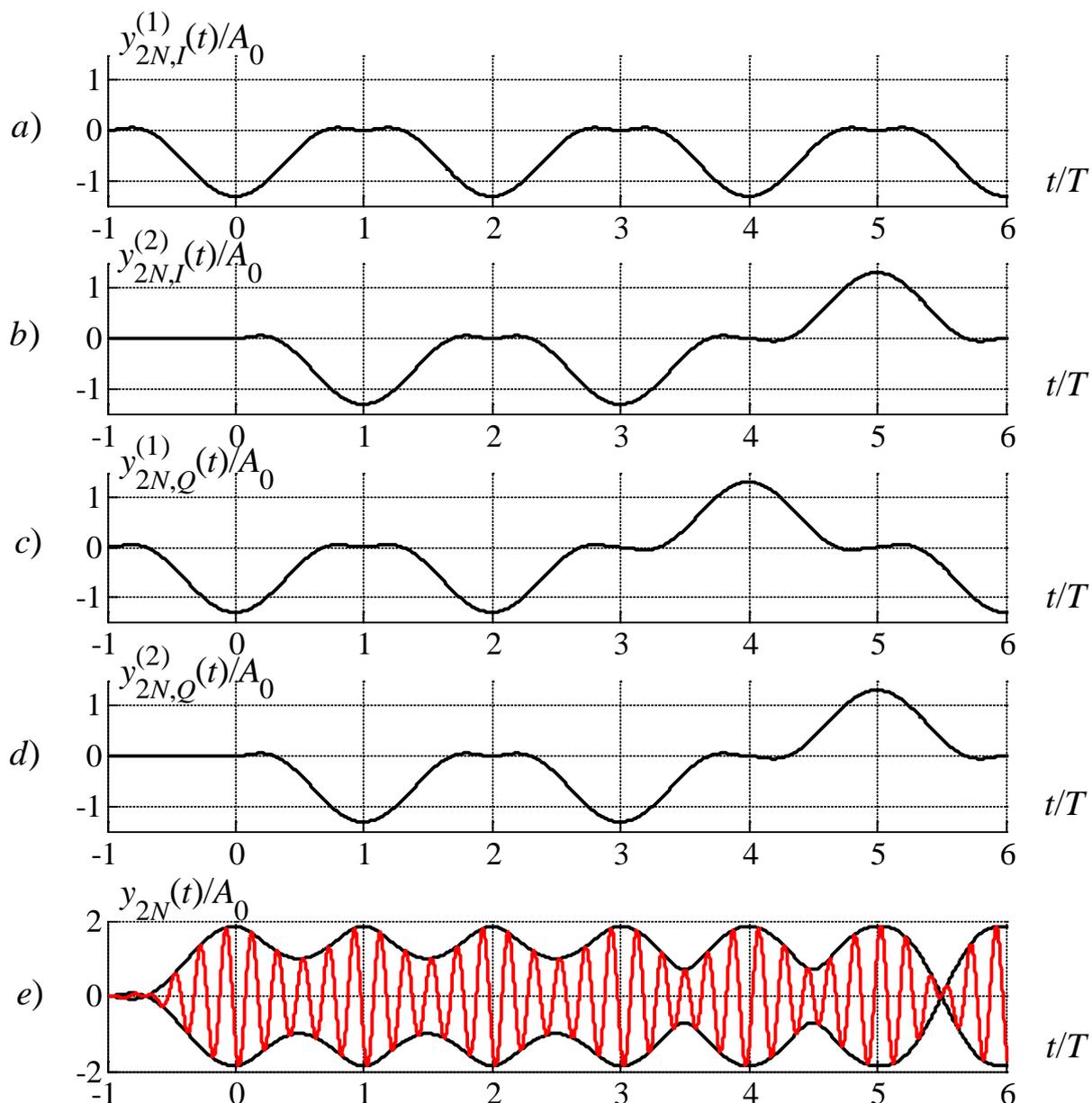


Рис. 4.5. Сигналы с выхода формирователей импульса первой и второй компонент синфазной и квадратурной составляющих соответственно *a–d*); сигнал, сформированный на несущей частоте  $f_0 = 5/T$  *e*)

На рис. 4.5 представлен пример формирования 2-компонентного сигнала с ФМ-4. При этом используется огибающая, обеспечивающая построение квази-ортогональных сигналов при заданной скорости спада спектра  $\gamma = 6$ . Коэффициенты разложения решения соответствующей оптимизационной задачи в усеченный ряд Фурье представлены в табл. 4.3.

Табл. 4.3

|       |                         |       |                         |
|-------|-------------------------|-------|-------------------------|
| $a_0$ | $1,3965 \cdot 10^0$     | $a_4$ | $1,5390 \cdot 10^{-2}$  |
| $a_1$ | $9,8854 \cdot 10^{-1}$  | $a_5$ | $-6,4256 \cdot 10^{-3}$ |
| $a_2$ | $2,1131 \cdot 10^{-1}$  | $a_6$ | $3,0671 \cdot 10^{-3}$  |
| $a_3$ | $-5,2437 \cdot 10^{-2}$ | $a_7$ | $-1,6627 \cdot 10^{-3}$ |

На рис. 4.5 представлен начальный этап формирования сигнала при поступлении двоичной последовательности  $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, \dots\}$  на вход формирователя сигнала.

Таким образом, предложены структурные схемы формирования (квадратурные модуляторы) многокомпонентных спектрально-эффективных сигналов с различными видами модуляционных созвездий. Реализация предложенных квадратурных модуляторов целесообразна на основе цифровых сигнальных процессоров.

## 4.2. Демодулятор многокомпонентных сигналов

Предлагается квадратурный способ демодуляции многокомпонентных сигналов с КАМ [31, 34], упрощенная структурная схема которого представлена на рис. 4.6.

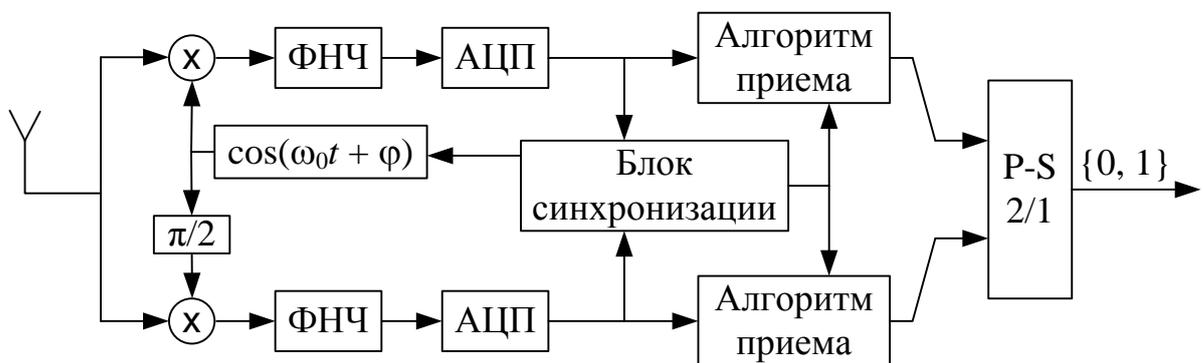


Рис. 4.6. Упрощенная структурная схема демодуляции многокомпонентных сигналов с КАМ

Поясним функционирование схемы рис. 4.6. Поступающий на приемник многокомпонентный сигнал сносится в квадратурах на нулевую частоту. Каждая квадратура проходит через ФНЧ для подавления соканальных помех, далее подвергается квантованию по уровню и дискретизации по времени. Полученные цифровые отсчеты поступают на блоки реализации алгоритма приема и блок синхронизации.

Роль блока синхронизации заключается в подстройке частоты и фазы гетеродина, соответственно  $\omega_0$  и  $\varphi$ , а также в определении начала тактовых интервалов компонент сигнала и значения коэффициента затухания сигнала  $\mu$  (см. разд. 1.4). Обычно подобные задачи синхронизации решаются путем введения так называемых пилотных сигналов, параметры которых заранее известны приемнику. В данной работе будем считать, что синхронизация успешно выполнена, не касаясь вопросов ее реализации.

С выхода блоков алгоритма приема последовательности оценок переданных символов поступают на параллельно-последовательный преобразователь для формирования единой последовательности.

Независимая обработка квадратурных составляющих обусловлена независимостью формирования квадратур (см. разд. 4.1). Для многокомпонентных сигналов с одинаковой АФМ структурная схема упростится благодаря отсутствию одного из блоков алгоритма приема.

Обратимся к подробному рассмотрению блока алгоритма приема. Запишем, прежде всего, квадратурные составляющие многокомпонентного сигнала:

$$y_{LN,c/s}(t) = \sum_{p=1}^L \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{L}} A_{r_p,c/s}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L),$$

где

$$A_{r_p,c}^{(k)} = A_{r_p}^{(k)} \cos \varphi_{r_p}^{(k)}, \quad A_{r_p,s}^{(k)} = A_{r_p}^{(k)} \sin \varphi_{r_p}^{(k)}.$$

Понятно, что при передаче квазиортогональных многокомпонентных сигналов, достаточно использовать поэлементный алгоритм приема, который сводится к вычислению интеграла от произведения принятого сигнала и огибающей интересующей компоненты. Рассмотрим значение такого интеграла для

$k$ -го тактового интервала  $p$ -й компоненты синфазной составляющей  $L$ -компонентного сигнала:

$$\begin{aligned}
 KI &= \int_{-LT/2+kLT+\Delta t_p}^{LT/2+kLT+\Delta t_p} [\mu y_{LN,c}(t) + n(t)] a_p^{(k)}(t, L) dt = \\
 &= \mu KG_p^{(k)} + \int_{-LT/2+kLT+\Delta t_p}^{LT/2+kLT+\Delta t_p} \left[ \frac{\mu}{\sqrt{L}} A_{r_p,c}^{(k)} a_p^{(k)}(t, L) + n(t) \right] a_p^{(k)}(t, L) dt,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $\mu$  и  $n(t)$ , как и в разд. 1.4, – коэффициент, характеризующий затухание сигнала при распространении и аддитивная помеха соответственно.

Учитывая, что рассматриваются квазиортогональные сигналы, т.е.  $KG_p^{(k)} = 0,01$ , а также условие нормировки энергии огибающей (1.21), преобразуем (4.1):

$$KI \approx \frac{\mu}{\sqrt{L}} A_{r_p,c}^{(k)} + \int_{-LT/2+kLT+\Delta t_p}^{LT/2+kLT+\Delta t_p} n(t) a_p^{(k)}(t, L) dt. \tag{4.2}$$

Можно показать [9], что значение интеграла в последнем выражении распределено по стандартному нормальному распределению. Таким образом, при вычислении  $KI$  получаем смесь АБГШ и значения  $A_{r_p,c}^{(k)}$ . Для алгоритма, оптимального по максимуму правдоподобия (см. разд. 1.4), оценка значения  $A_{r_p,c}^{(k)}$  сводится к поиску минимума выражения:

$$q = \arg \left[ \min_{q=1, \dots, M} \{ KI \sqrt{L} / \mu - A_{q_p,c}^{(k)} \} \right],$$

тогда

$$\hat{A}_{r_p,c}^{(k)} = A_{q_p,c}^{(k)}.$$

Следовательно, алгоритм приема квазиортогональных многокомпонентных сигналов состоит из двух основных этапов: выделение сигнала заданной компоненты (вычисление значения  $KI$ ) и оценка символа канального алфавита.

Очевидно, что для многокомпонентных сигналов с МСИ использование алгоритма поэлементного приема будет тем менее эффективно, чем больше значение максимального коэффициента групповой корреляции: в этом случае к

шумовой составляющей в (4.2) добавляется случайная величина  $\mu K G_p^{(k)}$ , что приводит к значительному увеличению отношения сигнал/шум, необходимого для достижения заданной достоверности приема.

В разд. 2.3 было показано, что на основе поэлементного алгоритма приема независимых сигналов можно построить алгоритмы приема многокомпонентных сигналов с МСИ, такие как (2.18) и (2.19). Однако реализация оптимального алгоритма практически невозможна, а для подоптимального, по-видимому, невозможно заранее определить его проигрыш по отношению к оптимальному.

Предлагается в качестве основы алгоритма приема многокомпонентных сигналов с МСИ использовать алгоритм Витерби, применяемый при декодировании сверточных кодов [6]. Сразу опишем алгоритм применительно к многокомпонентным сигналам.

Понятно, что в общем случае, можно использовать алгоритм приема “в целом”, когда сравниваются последовательности сигналов целиком и решение выносится в пользу последовательности символов канального алфавита, обеспечивающей минимальное эвклидово расстояние:

$$\min_{\{r\}} \left\{ \int_{-LT/2}^{-LT/2+NLT+(L-1)T} (x(t) - \mu y_{LN}(t, \{r\}))^2 dt \right\}, \quad (4.3)$$

где  $\{r\}$  – последовательность символов канального алфавита, и минимум вычисляется по всем возможным реализациям  $\{r\}$ .

Прямая реализация (4.3) означала бы сравнение  $M^{LN}$  эвклидовых расстояний, что, очевидно, невозможно даже для малых значений  $M$ . Однако благодаря специфическому правилу формирования многокомпонентных сигналов существует реализация (4.3), не связанная с чрезмерными вычислительными затратами, по крайней мере, для небольшого числа компонент.

Сигнал каждой квадратуры многокомпонентного сигнала в любой момент времени определяется  $L \log_2(M)/2$  двоичными символами (см. разд. 4.1), где группы по  $\log_2(M)/2$  символов определяют огибающую одной компоненты. С периодом  $T$  в какой-либо компоненте заканчивается один тактовый интервал и начинается другой, т.е. происходит замена определенной группы  $\log_2(M)/2$  сим-

волов на новую. Следовательно, вид сигнала каждой квадратуры определяется содержимым двоичного регистра размерностью  $L \log_2(M)/2$ , в который с периодом  $T$  поступает группа  $\log_2(M)/2$  символов, вытесняющая наиболее старую группу той же размерности, т.е. регистр функционирует по принципу очереди.

Схематически все детали поведения регистра адекватно отображаются *решеткой*. Она содержит два столбца из  $2^{L \log_2(M)/2}$  узлов, левый для текущего состояния регистра, а правый для последующего. Ребра (стрелки) ведут из каждого узла левого столбца в некоторые  $2^{\log_2(M)/2}$  правого. Для определенности будем считать, что новые группы  $\log_2(M)/2$  символов поступают в регистр справа и рассмотрим пример решетки для  $L = 2$ ,  $M = 4$ . На рис. 4.7 представлена решетка для указанного случая, когда количество узлов в каждом столбце 4 и размер регистра 2, причем сплошные либо пунктирные линии означают пути, которые выбираются входным символом ноль либо единица соответственно. Подобно этому в каждый узел правого столбца входят два ребра, маркированные одинаково: либо сплошными (нулевой входной символ), либо пунктирными (входной бит единица) линиями.

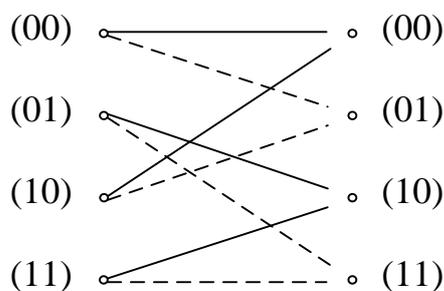


Рис. 4.7. Решетка для  $L = 2$ ,  $M = 4$

При формировании многокомпонентных сигналов с периодом  $T$  происходит переход вдоль какого-то ребра решетки. Отслеживать этот процесс по диаграмме, подобной рис. 4.7, очевидно, неудобно, так как пришлось бы перескакивать из правого столбца в тот же узел левого на каждом очередном шаге. Для избежания этого можно повторять решетку, используя правый столбец текущего шага, как левый столбец для последующего. Тогда формирование многоком-



общее продолжение. Это, однако, означает, что из всех путей, исходящих из  $A$  и имеющих общее продолжение, тот, который имел минимальное расстояние до  $x(t)$  вплоть до  $k$ -го шага, останется ближайшим к  $x(t)$  навсегда, поскольку общее продолжение внесет равный вклад во все расстояния. Таким образом, можно сохранить только путь, прибывший в узел  $A$  с минимальным расстоянием, отбросив остальные. Сохраненный путь называется *выжившим*. Текущее, т.е. вычисленное по части сигнала  $x(t)$  вплоть до  $k$ -го шага, расстояние выжившего пути узла  $A$  называется *метрикой узла  $A$* .

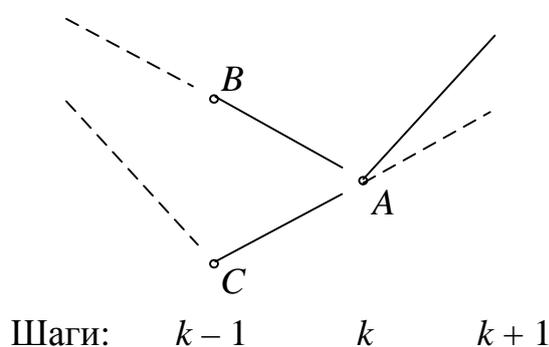


Рис. 4.9. Пути, проходящие через узел  $A$  на  $k$ -м шаге для  $L = 2$ ,  $M = 4$

Вспомним, что в любой узел входят  $2^{\log_2(M)/2}$  ребра, т.е. для случая  $L = 2$ ,  $M = 4$  ровно 2 ребра. Рис. 4.9 иллюстрирует это на примере некоторого узла  $A$ . Два ребра, входящие в него, исходят из узлов  $B$  и  $C$ . Расстояния двух путей, входящих в  $A$ , можно найти, измерив *метрики ребер*, т.е. расстояния до последней части сигнала  $x(t)$ , и прибавив их к метрикам ребер  $B$  и  $C$ . Путь с меньшим расстоянием считается выжившим для узла  $A$  и запоминается вместе с его расстоянием (метрикой узла), тогда как другой отбрасывается. По выполнении этих операций для всех узлов решетчатой диаграммы можно переходить к следующему шагу.

В результате прохода по решетчатой диаграмме с большой вероятностью на  $k$ -м шаге после удаления невыживших путей сложится ситуация, когда в первом столбце диаграммы все пути сольются в один и только из одного узла будет выходить единственное ребро. В этом случае нет необходимости хранить

информацию об этом столбце, и можно вынести решение о первой группе  $\log_2(M)/2$  символов, формирующих сигнал на соответствующем интервале времени. Конечно, при построении алгоритмов приема реальных сигналов выносить решения в случайные моменты времени нецелесообразно и предпочтительнее была бы процедура регулярного характера. В теории сверточного кодирования показано, что на  $k$ -м шаге почти всегда все пути, проходящие через  $(k - 5L\log_2(M)/2)$  столбец диаграммы сливаются. В данной работе предлагается считать, что указанная зависимость выполняется и для многокомпонентных сигналов (это будет косвенно подтверждено при построении имитационной модели). В случае, если на  $(k - 5L\log_2(M)/2)$  шаге существует несколько ребер, либо несколько узлов, с исходящими из них ребер, то предлагается выбирать узел и ребро, соответствующие пути с минимальным весом. С одной стороны, это делает алгоритм приема подоптимальным, с другой стороны, как будет показано далее, при значениях отношения сигнал/шум, обеспечивающих вероятность ошибки  $p < 10^{-3}$ , указанное предположение будет верным практически всегда. Следовательно, чем выше отношение сигнал/шум тем ближе предложенный алгоритм к оптимальному.

Таким образом, предложена структурная схема демодулятора многокомпонентных спектрально-эффективных сигналов с различными видами модуляционных созвездий. В качестве алгоритма приема предлагается использовать алгоритм когерентного приема “в целом” с поэлементным принятием решений на основе алгоритма Витерби.

### **4.3. Имитационная модель системы передачи информации**

Аналитическое исследование помехоустойчивости предложенного алгоритма приема многокомпонентных сигналов на основе алгоритма Витерби и получение кривых вероятности ошибки в замкнутой форме, по-видимому, невозможно, поэтому для оценки помехоустойчивости в работе использовано имитационное моделирование.

Имитационная модель системы передачи сообщений (рис. 4.10) состоит из четырех основных частей: источник, канал передачи, приемник и блок определения вероятности ошибки – помехоустойчивости. Источник состоит из генератора псевдослучайной последовательности (ПСП) двоичных символов и формирователя сигналов выбранного типа на их основе. При этом формируются квадратурные составляющие сигнала без переноса на несущую частоту. Канал передачи осуществляет аддитивное смешивание квадратурной составляющей сигнала с белым гауссовским шумом (БГШ).



Рис. 4.10. Структурная схема программы имитационной модели

Рассмотрим подробнее замену аддитивного добавления шума к сигналу на несущей частоте на добавление шума к квадратурной составляющей на нулевой частоте.

В случае добавления шума к сигналу на несущей частоте случайный процесс на входе демодулятора может быть записан так:

$$x(t) = \mu[y_{LN,c}(t)\cos(\omega_0 t) + y_{LN,s}(t)\sin(\omega_0 t)] + n(t).$$

При выполнении в демодуляторе операции выделения квадратурных составляющих на нулевой частоте получим следующий результат для одной из квадратурных составляющих:

$$x_c(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) = \mu y_{LN,c}(t)(1/2 + \cos(2\omega_0 t)) + \mu y_{LN,s}(t)\sin(2\omega_0 t) + n(t)\cos(\omega_0 t).$$

После прохождения через ФНЧ

$$x_c(t) = \mu y_{LN,c}(t) / 2 + n_c(t) / 2,$$

где  $n_c(t) = n(t)\cos(\omega_0 t)$  – квадратурная составляющая шумового процесса. Можно показать [9] что  $n_c(t)$ , как и  $n(t)$ , является БГШ, при этом его математическое ожидание также равно нулю, а дисперсия, т.е. средняя мощность, в 2 раза меньше, чем у  $n(t)$ . Таким образом, действительно можно заменить добавление БГШ к сигналу на несущей частоте на добавление БГШ к квадратурным составляющим сигнала. При этом средняя мощность БГШ в квадратурах должна быть в 2 раза меньше, чем при добавлении БГШ к сигналу на несущей частоте.

Заметим, что основным источником аддитивных шумов являются тепловые шумы, для которых спектральная плотность средней мощности определяется по формуле Найквиста

$$N_0 = kT,$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. При комнатной температуре типичное значение  $N_0 = -204$  дБ (Вт/Гц).

В приемнике осуществляется обработка либо по алгоритму поэлементного приема (для квазиортогональных сигналов), либо по алгоритму Витерби. Затем производится сравнение символа, в пользу которого было вынесено решение в приемнике, с переданным символом и, таким образом, определяется помехоустойчивость алгоритма.

Генератор (ПСП) формирует последовательность двоичных символов  $d_r$ . Формирователь сигналов за один раз формирует отсчеты квадратур сигнала  $y_{LN,c}[k]$  и  $y_{LN,s}[k]$   $k = 1, 2, \dots, N_t$  на интервале времени  $T$ .

Генератор шума формирует выборочные значения  $n_c[k]$  и  $n_s[k]$  случайного процесса, имеющего нормальный закон распределения.

Оценка вероятности ошибочного приема производится по величине отношения количества ошибочно принятых символов к полному числу принятых символов в течение сеанса при фиксированном значении отношения сигнал/шум.

Полоса частот, занимаемая спектром шума, выбирается из условия

$$F = N_t/2T,$$

где  $N_t$  – число выборочных значений на интервале времени  $T$ . В этом случае интервал дискретизации равен

$$\Delta t = T/N_t,$$

тогда мощность шума в полосе  $2F$  равна

$$P_{\text{ш}} = \frac{N_0}{2} 2F = N_0 F,$$

где  $N_0/2$  – односторонняя спектральная плотность мощности канального шума.

Отношение сигнал/шум задается выражением

$$h^2 = \frac{E_a / \log_2 M}{N_0},$$

либо

$$h_0^2 = \frac{E_0 / \log_2 M}{N_0},$$

где  $E_0 = P_{\text{п}} T$  – энергия радиоимпульса с прямоугольной огибающей,  $P_{\text{п}}$  – пиковая мощность формируемых сигналов. Выбор  $h$  соответствует фиксированной средней мощности,  $h_0$  – фиксированной пиковой мощности. Тогда

$$h_0^2 = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{ш}}} TF = \frac{1}{\log_2 M} \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{ш}}} \frac{N_t}{2}.$$

Мощность шума можно определить из выражения

$$P_{\text{ш}} = \frac{1}{T} \int_0^T n^2(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N_t} (n[k])^2 \Delta t = \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} (n[k])^2.$$

Значение дисперсии, необходимое для обращения к программно-реализованному генератору шума в случае фиксированной пиковой мощности, равно

$$\mathbf{D} = P_{\text{ш}} = \frac{1}{h_0^2} \frac{P_{\text{п}} N_t}{2}.$$

При представлении полученных результатов в виде кривых помехоустойчивости необходимо решить задачу определения доверительного интервала по заданному числу испытаний  $n$  при оценке величины вероятности события  $p$  по его относительной частоте  $\hat{p}$ .

Пусть в последовательности независимых испытаний некоторое событие  $A$  происходит в каждом испытании с вероятностью  $p$  (соответственно, событие  $\bar{A}$  происходит с вероятностью  $(1 - p)$ ). При исследовании эффективности устройства различения сигналов в результате каждого испытания происходит (с вероятностью  $p$ ), либо не происходит (с вероятностью  $(1 - p)$ ) ошибка в принятии решения относительно того, какой из возможных сигналов поступил на вход устройства. Ошибка фиксируется как значение некоторой случайной величины  $\xi$ , равное 1, в противном случае – как значение, равное 0. Тогда математическое ожидание ошибки

$$\mathbf{E}\{\xi\} = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Следовательно, задача оценки величины  $p$  сводится к оценке величины математического ожидания  $\mathbf{E}\{\xi\}$ . При этом дисперсия ошибки

$$\mathbf{D}\{\xi\} = m_2\{\xi\} - \mathbf{E}^2\{\xi\}.$$

Поскольку

$$m_2\{\xi\} = \mathbf{E}^2\{\xi\} = 1 \cdot p - 0 \cdot (1 - p) = p,$$

то:

$$\mathbf{D}\{\xi\} = p - p^2 = p(1 - p).$$

Выберем в качестве оценки  $\hat{p}$  значения вероятности  $p$  величину

$$\hat{\mathbf{E}}\{\xi\} = \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{k}{n},$$

где  $k$  – число событий  $A$  (например, ошибок в принятии решения) в серии из  $n$  испытаний.

Величина  $\hat{p}$  имеет биномиальное распределение, так как величина  $k$  подчиняется биномиальному закону:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

причем при  $n \gg 1$  это распределение хорошо аппроксимируется нормальным.

Практически достаточно иметь  $np \geq 10$ ;  $n(1-p) \geq 10$ . При этом, очевидно,

$$\mathbf{E}\{\hat{p}\} = p; \mathbf{D}\{\hat{p}\} = \frac{1}{n} \mathbf{D}\{p\} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Если считать, что величина  $p$  известна, то

$$P\left\{|\hat{p} - p| \leq \delta_\beta \sqrt{\mathbf{D}\{\hat{p}\}}\right\} = P\left\{|\hat{p} - p| \leq \delta_\beta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} = 1 - \beta = \Phi(\delta_\beta),$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция Крампа и

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Тогда, выбрав доверительную вероятность  $1 - \beta$ , получаем значение  $\delta_\beta$  и, соответственно, доверительный интервал

$$\left[ \hat{p} - \delta_\beta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + \delta_\beta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

Поскольку  $p$  на самом деле неизвестна и подлежит оценке, воспользуемся приближенным подходом, а именно, будем считать, что границы доверительного интервала равны

$$\left[ \hat{p} - \delta_\beta \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + \delta_\beta \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right].$$

В табл. 4.4 приведены значения  $\delta_\beta$  для заданных  $\beta$  и  $n$ .

Табл. 4.4

| $1 - \beta$<br>$n - 1$ | 0,900 | 0,990 | 0,999 |
|------------------------|-------|-------|-------|
| 10                     | 1,81  | 3,17  | 4,59  |
| 20                     | 1,73  | 2,84  | 3,85  |
| 30                     | 1,70  | 2,75  | 3,65  |
| $\infty$               | 1,64  | 2,58  | 3,29  |

Итак, описана имитационная модель передачи информации, использующая многокомпонентные сигналы. Освещены вопросы формирования АБГШ и выбора фиксированной пиковой либо средней мощности при определении отношения сигнал/шум. Рассмотрены вопросы определения точности получаемых кривых помехоустойчивости.

#### **4.4. Помехоустойчивость алгоритмов приема многокомпонентных сигналов**

На рис. 4.11 представлены кривые помехоустойчивости поэлементного алгоритма приема для многокомпонентных сигналов с ФМ-4,  $L = 4$ ,  $\gamma = 6$ , огибающие которых были получены при решении оптимизационной задачи при ограничении на МКГК (см. разд. 3.2.1). На рис. 4.11 результаты приведены для фиксированной средней мощности, а на рис. 4.12 приведены те же результаты, но для фиксированной пиковой мощности. Также на рис. 4.11–12 приведена кривая помехоустойчивости традиционных однокомпонентных сигналов с прямоугольной огибающей и ФМ-4 [35].

Отметим, что при определении помехоустойчивости поэлементного алгоритма приема многокомпонентных сигналов рассматривался прием последовательности сигналов, переносящей  $10^6$  бит. При построении экспериментальных кривых на рис. 4.11–12 указан доверительный интервал вычисленных значений вероятности ошибок для доверительной вероятности  $(1 - \beta) = 0,99$ .

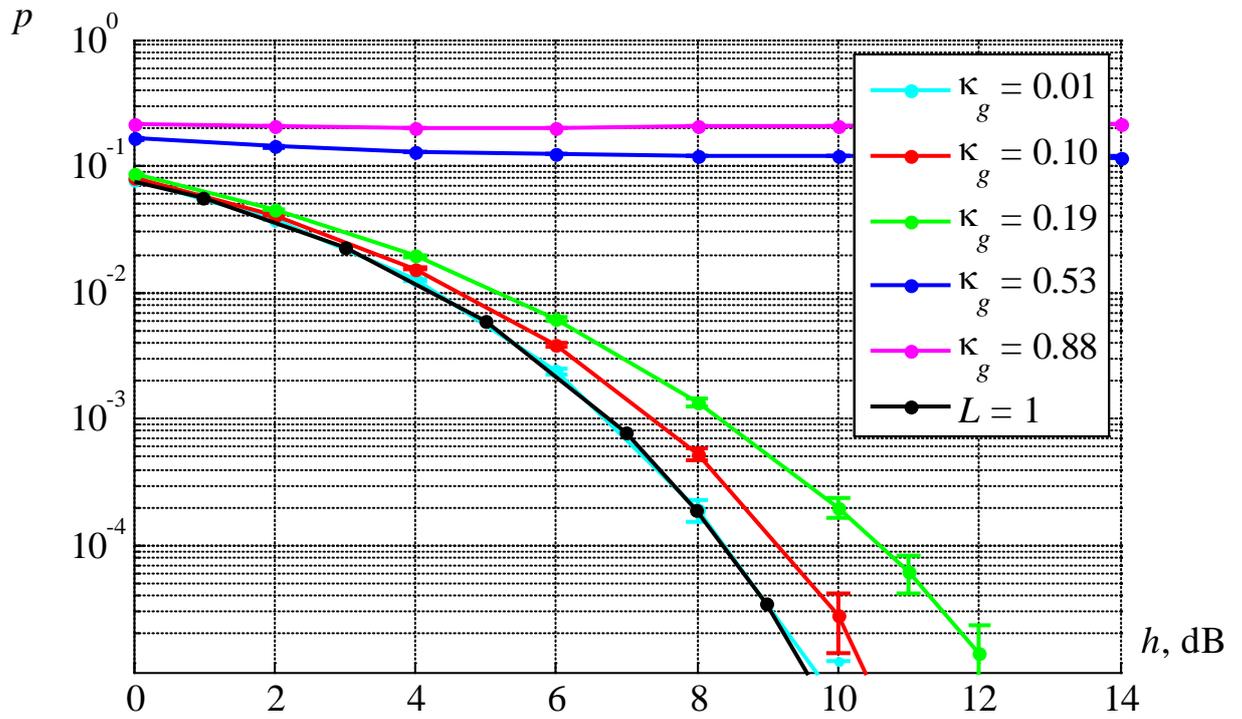


Рис. 4.11. Помехоустойчивость поэлементного алгоритма приема для 4-компонентных сигналов при фиксированной средней мощности

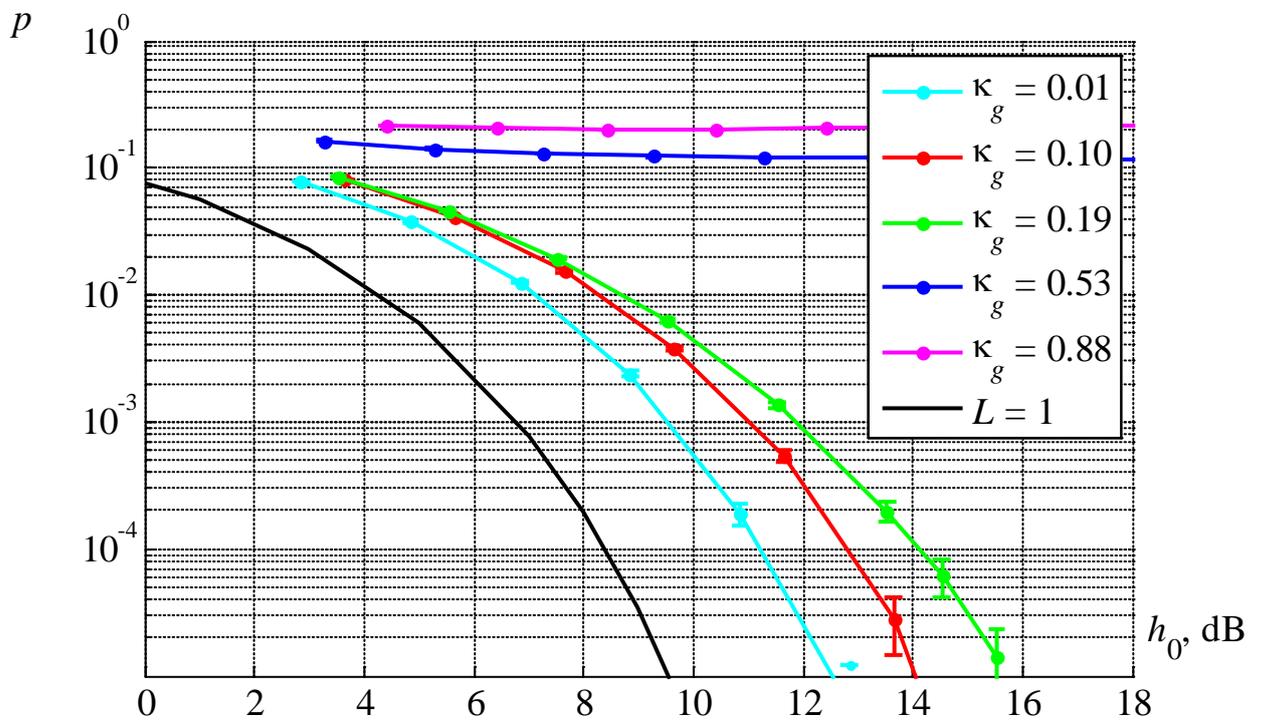


Рис. 4.12. Помехоустойчивость поэлементного алгоритма приема для 4-компонентных сигналов при фиксированной пиковой мощности

Из анализа представленных на рис. 4.11–12 кривых следует, что, во-первых, с ростом максимального коэффициента групповой корреляции вероятность ошибок увеличивается. Так, для  $\kappa_g = 0,19$  для средней вероятности ошибок  $p = 10^{-4}$  энергетический проигрыш по отношению к традиционным однокомпонентным сигналам составляет  $\sim 2$  дБ. Во-вторых, начиная с некоторого значения МКГК (в данном случае  $\kappa_g > 0,19$ ), прием многокомпонентных сигналов при использовании поэлементного алгоритма приема становится невозможным.

Учитывая, что пик-фактор рассмотренных сигналов больше пик-фактора сигналов с прямоугольной огибающей, при переходе к случаю фиксированной пиковой мощности энергетический проигрыш многокомпонентных сигналов возрастает. Так, для сигналов с  $\kappa_g = 0,19$  для средней вероятности ошибок  $p = 10^{-4}$  энергетический проигрыш увеличивается с 2 до 5,5 дБ.

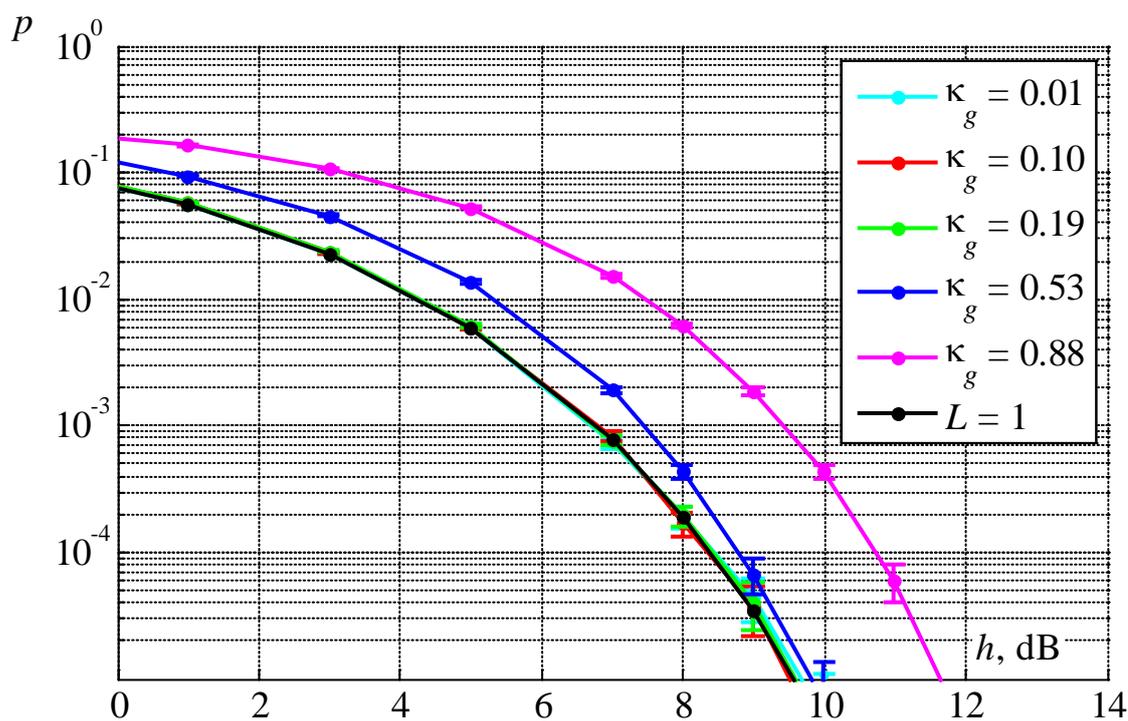


Рис. 4.13. Помехоустойчивость алгоритма Витерби для 4-компонентных сигналов при фиксированной средней мощности

На рис. 4.13 представлены кривые помехоустойчивости алгоритма Витерби для тех же сигналов, что и в предыдущем случае. На рис. 4.13 результаты

приведены для фиксированной средней мощности, а на рис. 4.14 приведены те же результаты, но для фиксированной пиковой мощности. Также на рис. 4.13–14 приведена кривая помехоустойчивости традиционных однокомпонентных сигналов с прямоугольной огибающей и ФМ-4.

Отметим, что при определении помехоустойчивости алгоритма Витерби приема многокомпонентных сигналов рассматривался прием последовательностей сигналов, переносящих  $10^3$  бит, и эксперимент повторялся  $10^3$  раз. Как и на рис. 4.11–12, при построении экспериментальных кривых на рис. 4.13–14 указан доверительный интервал вычисленных значений вероятности ошибок для доверительной вероятности  $(1 - \beta) = 0,99$ .

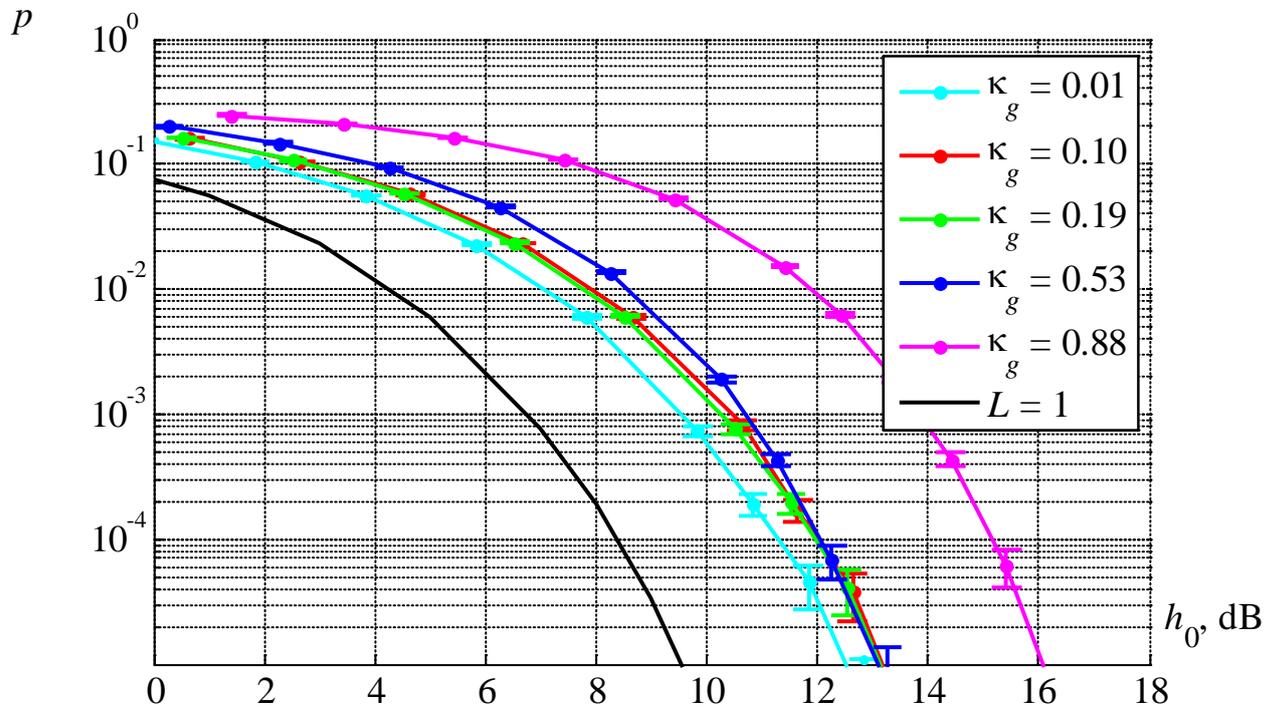


Рис. 4.14. Помехоустойчивость алгоритма Витерби для 4-компонентных сигналов при фиксированной пиковой мощности

Из анализа представленных кривых следует, что в условиях фиксированной средней мощности, при приеме многокомпонентных сигналов по алгоритму Витерби существует граничное значение МКГК, при котором еще возможно устранение МСИ. Более того, такое граничное значение МКГК практически совпадает с тем, которое обеспечивает минимальное значение пик-фактора при

решении оптимизационной задачи с ограничением на МКГК. Так, на рис. 4.13 для  $\kappa_g = 0,01, 0,10$  и  $0,19$  и для традиционных однокомпонентных сигналов с огибающей прямоугольного вида кривые вероятности ошибок практически совпадают. Для сигналов с лучшей спектральной эффективностью и наибольшим уровнем МСИ ( $\kappa_g = 0,88$ ) проигрыш по отношению к традиционным однокомпонентным сигналам составляет  $\sim 2$  дБ при средней вероятности ошибок  $p = 10^{-4}$ .

Из анализа кривых на рис. 4.14 видно, что, как и в предыдущем случае, результаты для многокомпонентных сигналов со сглаженной огибающей становятся хуже, так как их пик-фактор больше, чем у сигналов с прямоугольной огибающей. Для сигналов с  $\kappa_g = 0,88$  проигрыш по отношению к традиционным однокомпонентным сигналам составляет  $\sim 7$  дБ при средней вероятности ошибок  $p = 10^{-4}$ , т.е. больше на 5 дБ, чем при фиксированной средней мощности. Для остальных значений МКГК проигрыш составляет от 3 до 4 дБ при той же вероятности ошибок.

#### 4.5. Характеристики эффективности использования многокомпонентных сигналов

Анализ помехоустойчивости приема совместно с полученными результатами оценки компактности энергетического спектра (полосы занимаемых частот  $\Delta F$ ) позволяют оценить эффективность использования многокомпонентных сигналов с точки зрения их близости к границе Шеннона.

При вычислении удельных затрат полосы частот  $\beta_F$  скорость  $R$  передачи информации примем равной пропускной способности  $C$  двоичного дискретного симметричного канала при вероятности ошибочного приема сигнала, равной  $p$  [20]:

$$C = (\log_2 M + p \log_2(p / (M - 1)) + (1 - p) \log_2(1 - p)) / T. \quad (4.4)$$

С учетом (4.4) имеем

$$\beta_F = \frac{\Delta F_{99\%}}{C} = \frac{T \Delta F_{99\%}}{\log_2 M + p \log_2(p / (M - 1)) + (1 - p) \log_2(1 - p)}.$$

Вычислим значения  $\beta_E$  для ряда значений вероятности ошибок  $p$  из условия

$$\beta_E = E_0 / N_0 = P_{\Pi} / (N_0 C)$$

или, с учетом (4.4),

$$\beta_E = \frac{h_0^2 / \log_2 M}{\log_2 M + p \log_2(p / (M - 1)) + (1 - p) \log_2(1 - p)},$$

где значение  $h_0^2$  определяется по данным разд. 4.3. Таким образом, будем рассматривать удельные энергетические затраты и эффективность в целом при фиксированной пиковой мощности [24].

Величины  $\beta_F$  и  $\beta_E$  для оптимального гауссовского канала, реализующего пропускную способность  $C$ , связаны следующим образом [26]:

$$\beta_E = (2^{1/\beta_F} - 1)\beta_F \quad (4.5)$$

На рис. 4.15 представлены зависимости удельных энергетических затрат от удельных затрат полосы частот для сигналов, рассмотренных в разд. 4.4. При этом кривая 1 соответствует границе (4.5); кривые 2, 3 – однокомпонентным сигналам с прямоугольной огибающей и ФМ-4, КАМ-16 соответственно; кривая 4 – однокомпонентным сигналам с огибающей вида  $\cos(x)$ ; кривые 5–9 соответствуют 4-компонентным сигналам, огибающие которых получены при ограничении на МКГК и  $\kappa_g = 0,01$ ,  $\kappa_g = 0,10$ ,  $\kappa_g = 0,19$ ,  $\kappa_g = 0,53$ ,  $\kappa_g = 0,88$  соответственно. Также отметим, что крайние верхние точки всех кривых, кроме первой, соответствуют средней вероятности ошибок  $p = 10^{-4}$ .

Из анализа представленных кривых следует, что даже при фиксированной пиковой мощности многокомпонентные сигналы оказываются эффективнее с точки зрения близости к границе Шеннона, чем традиционные однокомпонентные. Видно, что удельные затраты полосы рассмотренных 4-компонентных сигналов значительно меньше, чем у сигналов с прямоугольной огибающей при незначительном энергетическом проигрыше. Более того, повышение размерности сигнального созвездия в сигналах с прямоугольной огибающей не приводит к изменению ситуации, наоборот, хотя разрыв в спектральной эффективности

сокращается, энергетические затраты возрастают настолько, что превосходят энергетические затраты 4-компонентных сигналов.

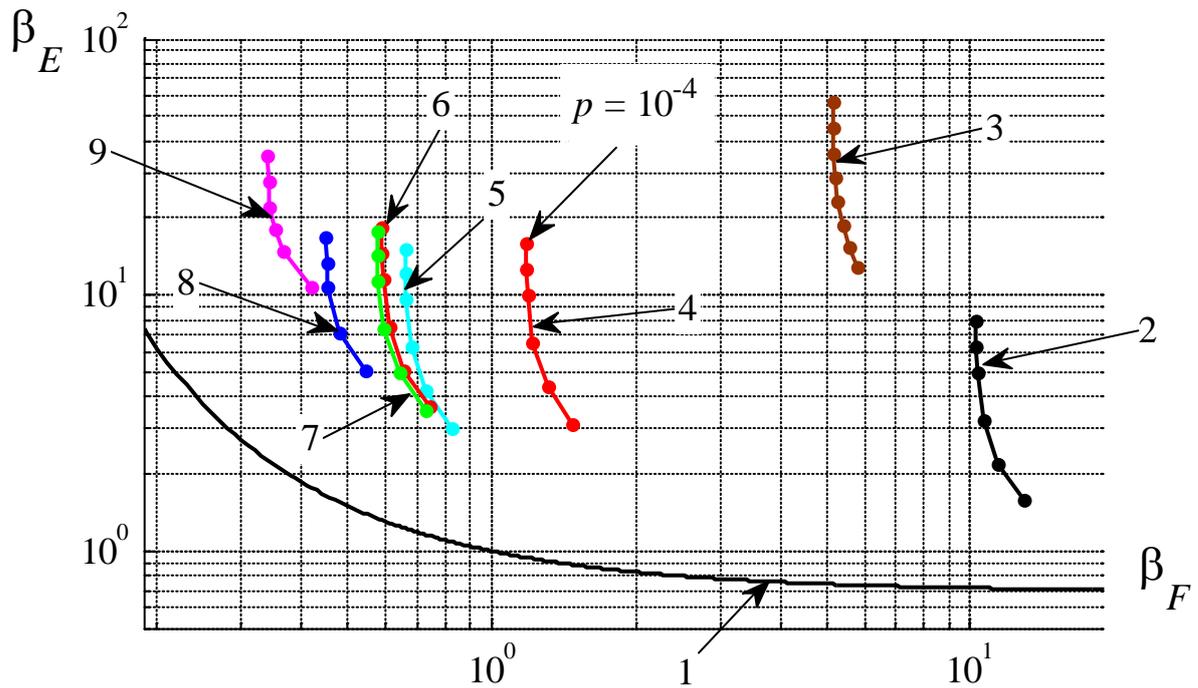


Рис. 4.15. Эффективность использования многокомпонентных сигналов

При сравнении 4-компонентных сигналов с однокомпонентными со сглаженной огибающей видно, что удельные затраты первых меньше при практически одинаковой энергетической эффективности.

Наконец, сравнивая между собой 4-компонентные сигналы, видно, что лучшей эффективностью обладают сигналы с  $\kappa_g = 0,53$ , т.е. те сигналы, чей пик-фактор минимален, и для которых еще возможно устранение МСИ при использовании алгоритма Витерби.

#### 4.6. Выводы по главе 4

1. В качестве алгоритма приема многокомпонентных сигналов с МСИ предложено использование алгоритма когерентного приема “в целом” с поэлементным принятием решений на основе алгоритма Витерби, при этом хеммингова метрика заменяется евклидовой метрикой при вычислении расстояний между принятым и опорными колебаниями.

2. Разработанная имитационная модель позволяет определять помехоустойчивость алгоритма приема Витерби и поэлементного приема для многокомпонентных сигналов.

3. Показано, что для поэлементного приема многокомпонентных сигналов помехоустойчивость ухудшается с ростом значения МКГК. Так для  $\kappa_g = 0,19$  для средней вероятности ошибок  $p = 10^{-4}$  энергетический проигрыш по отношению к традиционным однокомпонентным сигналам с прямоугольной огибающей составляет  $\sim 2$  дБ.

4. Показано, что при приеме многокомпонентных сигналов по алгоритму Витерби существует граничное значение МКГК, при котором еще возможно устранение МСИ. Более того, такое граничное значение МКГК практически совпадает с тем, которое обеспечивает минимальное значение пик-фактора при решении оптимизационной задачи с ограничением на МКГК.

5. Показано, что использование многокомпонентных спектрально-эффективных сигналов при наличии ограничений на пик-фактор и МКГК приводит к повышению шенноновской эффективности.

## Заключение

### **Научная новизна результатов диссертационной работы.**

- Сформулирована и решена оптимизационная задача синтеза спектрально-эффективных многокомпонентных сигналов при наличии ограничений на величину пик-фактора колебаний, корреляционные свойства и скорость спада энергетического спектра случайной последовательности сигналов.
- Определено правило выбора начального приближения для численного решения оптимизационной задачи и правило оценки точности полученного решения.
- Показано, что повышение спектральной эффективности возможно только при увеличении числа компонент, что сопровождается ростом пик-фактора и уровня МСИ.
- Показано, что для любого заданного значения спектральной эффективности всегда существует граничное значение числа компонент, увеличение которого не приводит к улучшению результатов.
- Определено, что при построении квазиортогональных многокомпонентных сигналов с ростом числа компонент практически достигается предельное значение спектральной эффективности ортогональных сигналов.
- Разработана имитационная модель, позволяющая определять помехоустойчивость приема многокомпонентных сигналов по алгоритму Витерби и характеристики сигналов с учетом погрешностей формирования, обусловленных ограниченностью разрядной сетки цифро-аналоговых преобразователей.
- Показано, что при приеме многокомпонентных сигналов по алгоритму Витерби существует предельное значение коэффициента групповой корреляции, при котором еще удастся устранить МСИ.

**Теоретическая значимость** результатов работы заключается в том, что впервые сформулирована и решена задача синтеза оптимальной огибающей многокомпонентных сигналов при наличии различных комбинаций ограничений на скорость спада спектра, величину пик-фактора колебаний и коэффици-

ент корреляции. Определена помехоустойчивость приема алгоритма Витерби для многокомпонентных сигналов с МСИ. Значимость полученных теоретических результатов обусловлена их новизной и дальнейшим развитием теории сигналов и передачи сообщений.

**Публикации.** Результаты диссертационных исследований опубликованы в 6 статьях.

**Апробация результатов.** Материалы диссертационного исследования апробированы на Политехническом симпозиуме 2006 г., 64-й научно-технической конференции НТОРЭС им. А. С. Попова, международной научно-практической конференции “XXXVIII Неделя науки СПбГПУ” 2009г.

**Реализация результатов исследований.** Результаты диссертационных исследований реализованы в НИР по Договору № 2538/140908802 от 25.06.2008 и НИР по Договору № 2538/140908803 от 25.06.2008 с ФГУП “НИИ “Вектор” (Санкт-Петербург), проводимых в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете в 2008-2010 года.

**Пути дальнейшей реализации.** Научные и практические результаты, полученные в ходе выполнения исследования, в дальнейшем могут быть использованы при создании перспективных подвижных систем связи, модернизации систем спутникового и кабельного цифрового телевидения и беспроводной передачи данных в системах с кодовым разделением каналов.

**Положения, выносимые на защиту.**

- Получены оптимальные спектрально-эффективные 4-компонентные сигналы, обеспечивающие значение удельных затрат полосы  $\beta_F = 0,45$ , что более, чем в 2 раз меньше, чем у сигналов с огибающей вида  $\cos(x)$  при одинаковых энергетических затратах.
- Показано, что повышение спектральной эффективности многокомпонентных сигналов возможно путем увеличения числа компонент и ослабления ограничений на пик-фактор и корреляционные свойства, а именно при увеличении числа компонент с 16 до 32 предельное значение удельных затрат уменьшается от значения  $\beta_F = 0,17$ , до  $\beta_F = 0,08$ .

- При фиксированном числе компонент увеличение скорости спада спектра приводит к уменьшению предельно достижимого значения полосы частот по уровню внеполосных излучений, а именно для 32-компонентных сигналов повышение скорости спада спектра в 2,3 раза приводит к уменьшению полосы по уровню  $-60$  дБ с  $0,46/T$  до  $0,29/T$ .

- На основе имитационного моделирования показано, что погрешности реализации оптимальных форм сигналов при использовании конечной разрядной сетки и снижении разрядности ЦАП с 16 до 8 составляют не более 2%.

- Использование алгоритма приема на основе алгоритма Витерби при обработке 4-компонентных сигналов обеспечивает среднюю вероятность ошибки на бит не более  $p = 10^{-4}$  при фиксированной пиковой мощности и энергетических затратах  $h_0^2 = 12$  дБ.

**Методы исследования.** В ходе исследований использовались методы теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, теории электрической связи, вариационного исчисления, методов вычислительной математики и программирования.

**Вклад автора в разработку проблемы.** Автором выведено выражение для определения пик-фактора многокомпонентных сигналов, сформулирована и численно решена оптимизационная задача синтеза спектрально-эффективных сигналов при наличии дополнительных ограничений на пик-фактор колебаний и корреляционные свойства. Разработана имитационная модель квадратурного формирования и приема многокомпонентных сигналов с использованием элементарного алгоритма приема и алгоритма Витерби.

**Обоснованность** научных результатов обеспечивается применением апробированного метода численного решения оптимизационных задач, корректностью постановок и решения задач, вводимых допущений и ограничений, формулировок и выводов, комплексным использованием строгих аналитических методов исследования и подтверждается совпадением полученных результатов с известными для частных случаев.

**Достоверность** полученных результатов исследования определяется хорошим совпадением аналитических результатов с результатами имитационного моделирования и экспериментальных исследований.

## Список литературы

1. Бадалов А.Л., Михайлов А.С. Нормы на параметры электромагнитной совместимости РЭС: Справочник. – М.: Радио и связь, 1990. – 271 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
3. Гуревич М.С. Спектры радиосигналов. – М.: Связьиздат, 1963. – 312 с.
4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – СПб: Лань, 2005. – 232 с.
5. Зюко А.Г., Фалько А.И., Панфилов И.П., Банкет В.Л., Иващенко П.В. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.
6. Ипатов В. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. – М. Техносфера, 2007. – 488 с.
7. Князев А.Д. Элементы теории и практики обеспечения электромагнитной совместимости РЭС. – М.: Радио и связь, 1984. – 336 с.
8. Коржик В.И., Финк Л.М., Щелкунов К.Н., Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник. – М. Радио и связь, 1981. – 232 с.
9. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
10. Макаров С.Б., Цикин И.А. Передача дискретных сообщений по радиоканалам с ограниченной полосой пропускания. – М.: Радио и связь, 1988. – 304 с.
11. Сикарев А.А., Фалько А.И. Оптимальный прием дискретных сообщений. – М.: Связь, 1978. – 328 с.
12. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – Изд. 2-е, испр.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2003. – 1104 с.

13. Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра. – М.: Радио и связь, 2000. – 502 с.
14. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1970. – 728 с.
15. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. / Быховской И.М., Вавилова Б.Т. под ред. Быховского М.Л. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
16. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.
17. Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. / Под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова. – М.: ИЛ, 1963. – 832 с.
18. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – Изд. 5-е. – М.: УРСС, 2002. – 320 с.
19. Гельгор А.Л., Е.А. Попов. Основы теории информации: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та., 2008. – 158 с.
20. Гельгор А.Л., Е.А. Попов. Дискретные каналы передачи информации: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та., 2008. – 135 с.
21. Артамонов А.А., Косухин И.Л., Макаров С.Б. Спектральные характеристики случайных последовательностей зависимых ФМ-сигналов с огибающей, описываемой полиномом  $n$ -ой степени // Техника средств связи. Серия “Техника радиосвязи”. – 1990. – выпуск 8.
22. Вальдман Д.Г., Макаров С.Б., Теаро В.И. Синтез спектрально-эффективных сигналов с заданными частотно-временными характеристиками для систем связи // Техника радиосвязи. – 1997. – выпуск 3. – С. 22–33.
23. Гельгор А.Л., Попов Е.А. Оптимизация формы огибающей многокомпонентных сигналов при наличии ограничений на пик-фактор и коэффициент корреляции // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2010. – № 5. – С. 25–29.

24. Гельгор А.Л., Е.А. Попов. Спектральная и энергетическая эффективности многопозиционных зависимых сигналов с квадратурной амплитудной манипуляцией // Радиотехника. – 2008. – № 12. – С. 4–9.
25. Макаров С. Б., Сюэ Вэй. Синтез спектрально-эффективных сигналов для защищенных беспроводных телекоммуникационных систем с ограниченным энергетическим ресурсом // Проблемы информационной безопасности. Компьютерные системы. – 2006. – № 2. – С. 83–94.
26. Макаров С.Б., Уланов А.М., Цикин И.А. Эффективность применения ограниченных по спектру зависимых сигналов при передаче дискретных сообщений // Электросвязь. – 1988. – № 5.
27. Макаров С.Б., Цикин И.А. Дискретно-аналоговый метод формирования сигналов с ограниченным спектром // Радиотехника. – 1980. – № 8.
28. Сенин А.Г. К задаче синтеза оптимального радиосигнала // Радиотехника. – 1967. – Т. 22, № 7. – С. 91–96.
29. Школьный Л.А. Оптимизация формы огибающей радиоимпульса по минимуму внеполосных излучений // Радиотехника. – 1975. – Т. 30, № 6. – С. 12–15.
30. Amoroso, F. Pulse and Spectrum Manipulation in the Minimum (Frequency) Shift Keying (MSK) Format // IEEE Transactions on Communications. – 1976. – Volume 24, Issue 3. – P. 381–384.
31. Barbieri, A. Fertonani, D. Colavolpe, G. Time-frequency packing for linear modulations: spectral efficiency and practical detection schemes // IEEE Transactions on Communications. – 2009. – Volume 57, Issue 10. – P. 2951–2959.
32. Gronemeyer, S. McBride, A. MSK and Offset QPSK Modulation // IEEE Transactions on Communications. – 1976. – Volume 24, Issue 8. – P. 809–820.
33. Huang, J. Feher, K. Gendron, M. Techniques to Generate ISI and Jitter-Free Bandlimited Nyquist Signals and a Method to Analyze Jitter Effects // IEEE Transactions on Communications. – 1979. – Volume 27, Issue 11. – P. 1700–1711.

34. Santhanam, B. Maragos, P. Multicomponent AM-FM demodulation via periodicity-based algebraic separation and energy-based demodulation // *IEEE Transactions on Communications*. – 2000. – Volume 48, Issue 3. – P. 473–490.
35. Simon, M.K. Alouini, M.-S. Exponential-type bounds on the generalized Marcum Q-function with application to error probability analysis over fading channels // *IEEE Transactions on Communications*. – 2000. – Volume 48, Issue 3. – P. 359–366.
36. Singh, J. Dabeer, O. Madhow, U. On the limits of communication with low-precision analog-to-digital conversion at the receiver // *IEEE Transactions on Communications*. – 2009. – Volume 57, Issue 12. – P. 3629–3639.
37. Sorace, R. Digital-to-RF conversion for a vector modulator // *IEEE Transactions on Communications*. – 2000. – Volume 48, Issue 4. – P. 540–542.
38. Wen Wei Mendel, J.M. Maximum-likelihood classification for digital amplitude-phase modulations // *IEEE Transactions on Communications*. – 2000. – Volume 48, Issue 2. – P. 189–193.
39. Willink, T.J. Wittke, P.H. Campbell, L.L. Valuation of the effects of intersymbol interference in decision-feedback equalizers // *IEEE Transactions on Communications*. – 2000. – Volume 48, Issue 4. – P. 629–636.
40. Younggyun Kim Jaekyun Moon. Multidimensional signal space partitioning using a minimal set of hyperplanes for detecting ISI-corrupted symbols // *IEEE Transactions on Communications*. – 2000. – Volume 48, Issue 4. – P. 637–647.

## Приложение 1. Текст программы решения оптимизационной задачи на языке программирования Matlab

```

%% Очистка экрана и памяти
clear;
clc;

%% Инициализация
L = 4; % Количество компонент в сигнале
N = 2; % показатель степени функции вредности
M = 20; % количество членов в разложении искомой отгибающей
P = N-1; % количество производных для граничных условий
E = 1; % энергия сигнала
NPF = 16; % количество точек для проверки пик-фактора

Val_PF = 2.2; % ограничение на пик-фактор (=-1, если не ограничивается)
Val_Kor = 0.1; % ограничение на МКГК либо МКПК (=-1, если не огранич-ся)
Flag_SQ = false; % созвездия ФМ-4 (false), либо повернутые ФМ-2 (true)

% Вектор начального приближения

x0 = [1.5779950340804132e+000 ... ];

if length(x0) < M+1
    x0 = [x0, zeros(1, M+1-length(x0))];
else
    x0 = x0(1, 1:M+1);
end

%% Загружаем функционал и ограничения

% Линейные условия-равенства
% Граничные условия
FName = sprintf('Data\\Data_Bound_N%d_M%d', N, M);
load(FName, 'Bound');

Aeq = Bound;
if isequal(Bound, [])
    beq = [];
else
    beq = zeros(size(Bound, 1), 1);
end

% Линейные условия-НЕравенства
A = [];
b = [];

% Все нелинейные условия и функционал задаются в специальных файлах:
% Non_Linear_Conds и Minimized_Func соответственно

%% Формируем файл функции для минимизации и файл условий

Write_Fun_Con_Files(L, N, M, NPF, Val_PF, Val_Kor, Flag_SQ);

%% Поиск минимума функции многих переменных
% Настройка параметров оптимизации
FMC_Options = optimset('fmincon');

```

```

FMC_Options.Algorithm = 'active-set';           % Algorithm
FMC_Options.MaxFunEvals = 10^4;                % Maximum number of function
                                                % evaluations allowed
FMC_Options.MaxIter = 10^4;                    % Maximum number of iterations
                                                % allowed
FMC_Options.GradObj = 'on';                    % Gradient for the objective
                                                % function defined by the user
FMC_Options.GradConstr = 'on';                 % Gradient for nonlinear
                                                % constraint functions defined by the user
FMC_Options.TolFun = 10^-9;                    % Termination tolerance on the
                                                % function value
FMC_Options.TolCon = 10^-9;                    % Termination tolerance on the
                                                % constraint violation
FMC_Options.TolX = 10^-9;                      % Termination tolerance on x

% Сама оптимизация

ans_x = fmincon(@Minimized_Func, x0, A, b, Aeq, beq, -10*ones(M+1, 1), ...
... 10*ones(M+1, 1), @Non_Linear_Conds, FMC_Options);

function Write_Fun_Con_Files(L, N, M, NPF, Val_PF, Val_Kor, Flag_SQ)

%% Формируем файл функции для минимизации

fid = fopen('Minimized_Func.m', 'wt');

% Формируем заголовок файла
Line = sprintf('function [J, grad_J] = Minimized_Func(x)\n');
fwrite(fid, Line);
Line = sprintf('\n');
fwrite(fid, Line);

% Определяем коэффициенты k^(2*N) для вычисления функционала
Line = sprintf(['Koeffs = (2*pi*(0:', int2str(M), ')).^', int2str(2*N), ...
... '; \n']);
fwrite(fid, Line);

% Вычисляем функционал J
Line = sprintf('J = sum(Koeffs.*(x.^2))/2;\n');
fwrite(fid, Line);
Line = sprintf('\n');
fwrite(fid, Line);

% Вычисляем градиент
Line = sprintf('if nargin > 1\n');
fwrite(fid, Line);

Line = sprintf('    grad_J = (Koeffs.*x).';\n');
fwrite(fid, Line);

Line = sprintf('end\n');
fwrite(fid, Line);

fclose(fid);
disp('Файл сформирован');

%% Формируем файл условий
fid = fopen('Non_Linear_Conds.m', 'wt');

```

```

% Формируем заголовок файла
Line = sprintf('function [C, CEQ, grad_C, grad_CEQ] = ...
... Non_Linear_Conds(x)\n');
fwrite(fid, Line);
Line = sprintf('\n');
fwrite(fid, Line);

% Определяем значение пик-фактора
Line = sprintf('Val_PF = %f;\n', Val_PF);
fwrite(fid, Line);

% Определяем значение корреляции
Line = sprintf('Val_Kor = %f;\n', Val_Kor);
fwrite(fid, Line);

% Пропускаем строку
Line = sprintf('\n');
fwrite(fid, Line);

% Формируем условия-неравенства
Line = sprintf('C = [];\n');
fwrite(fid, Line);
% Пик-фактор
if ~isequal(Val_PF, -1)
    Line = sprintf('if nargin > 2\n');
    buf = [int2str(L), ', ', int2str(M), ', ', int2str(NPF), ', ', ...
... int2str(Flag_SQ)];
    fwrite(fid, Line);
    Line = sprintf(['    [PF, grad_PF] = PFs_Computation(x, ', ...
... buf, ', Val_PF);\n']);
    fwrite(fid, Line);
    Line = sprintf('else\n');
    fwrite(fid, Line);
    Line = sprintf(['    PF = PFs_Computation(x, ', buf, ', ...
... Val_PF);\n']);
    fwrite(fid, Line);
    Line = sprintf('end\n');
    fwrite(fid, Line);

    Line = sprintf('C = [C, PF];\n');
    fwrite(fid, Line);
end
% Корреляция
if ~isequal(Val_Kor, -1)
    Line = sprintf('if nargin > 2\n');
    buf = [int2str(L), ', ', int2str(M), ', ', int2str(Flag_SQ)];
    fwrite(fid, Line);
    Line = sprintf(['    [Korrel, grad_K] = ...
... Korrelations_Computation(x, ', buf, ', Val_Kor);\n']);
    fwrite(fid, Line);
    Line = sprintf('else\n');
    fwrite(fid, Line);
    Line = sprintf(['    Korrel = Korrelations_Computation(x, ...
... ', buf, ', Val_Kor);\n']);
    fwrite(fid, Line);
    Line = sprintf('end\n');
    fwrite(fid, Line);

    Line = sprintf('C = [C, Korrel];\n');
    fwrite(fid, Line);
end
Line = sprintf('\n');
fwrite(fid, Line);

```

```

% Формируем условия-равенства
Line = sprintf('CEQ = [];\n');
fwrite(fid, Line);
% Энергия
Line = sprintf(['Koeefs = ones(1, ', int2str(M+1), ')/2;\n']);
fwrite(fid, Line);
Line = sprintf('Koeefs(1, 1) = 1/4;\n');
fwrite(fid, Line);
Line = sprintf('Energy = sum(Koeefs .* (x.^2)) - 1;\n');
fwrite(fid, Line);
Line = sprintf('CEQ = [CEQ, Energy];\n');
fwrite(fid, Line);
Line = sprintf('\n');
fwrite(fid, Line);

% Вычисляем градиенты
Line = sprintf('if nargout > 2\n');
fwrite(fid, Line);

% Градиент условий-неравенств
Line = sprintf('    grad_C = [];\n');
fwrite(fid, Line);
% Пик-фактор
if ~isequal(Val_PF, -1)
    Line = sprintf('    grad_C = [grad_C, grad_PF];\n');
    fwrite(fid, Line);
end
% Корреляция
if ~isequal(Val_Kor, -1)
    Line = sprintf('    grad_C = [grad_C, grad_K];\n');
    fwrite(fid, Line);
end
Line = sprintf('\n');
fwrite(fid, Line);

% Градиент условий-равенств
Line = sprintf('    grad_CEQ = [];\n');
fwrite(fid, Line);
% Энергия
Line = sprintf('    grad_E = (2*Koeefs.*x).';\n');
fwrite(fid, Line);
Line = sprintf('    grad_CEQ = [grad_CEQ, grad_E];\n');
fwrite(fid, Line);

Line = sprintf('end\n');
fwrite(fid, Line);

fclose(fid);

function [C_PF, grad_C_PF] = PFs_Computation(x, L, M, NPF, Flag_SQ, Val_PF)

% Формируем имя файла для загрузки массивов и загружаем данные
FName = sprintf('Data\\Data_PF_L%d_M%d_NPF%d', L, M, NPF);
load(FName, 'PF_Martixes');

% Вычисляем значения огибающих для x в NPF точках
ats = cell(1, NPF);
for k = 1:NPF
    ats{1, k} = x * PF_Martixes{1, k}; %#ok<USENS>
    % Внимание, размер ats{1, k} - 1xL
end

```

```

% Определяем знаки значений всех L отгибающих во всех NPF точках
Koeefs = cell(1, NPF);
for k = 1:NPF
    Koeefs{1, k} = sign(ats{1, k});
end

% Вычисляем пик-фактор во всех точках
C_PF = zeros(1, NPF);
if Flag_SQ

    BUF = zeros(2, NPF);
    for k = 1:NPF
        BUF(1, k) = sum(Koeefs{1, k}(1, 1:2:L-1).*ats{1, k}(1, 1:2:L-1));
        BUF(2, k) = sum(Koeefs{1, k}(1, 2:2:L ).*ats{1, k}(1, 2:2:L ));
        C_PF(1, k) = 2*(BUF(1, k)^2 + BUF(2, k)^2)/L;
    end

else

    BUF = zeros(1, NPF);
    for k = 1:NPF
        BUF(1, k) = sum(Koeefs{1, k}.*ats{1, k});
        C_PF(1, k) = 2*BUF(1, k)^2/L;
    end

end

C_PF = C_PF - Val_PF;

% Вычисление градиентов
if nargin > 1
    grad_C_PF = zeros(M+1, NPF);
    if Flag_SQ

        for k = 1:NPF
            buf1 = zeros(M+1, 1);
            for p = 1:2:L-1
                buf1 = buf1 + Koeefs{1, k}(1, p)*PF_Martixes{1, k}(:, p);
            end
            buf1 = 2*buf1*BUF(1, k);
            buf2 = zeros(M+1, 1);
            for p = 2:2:L
                buf2 = buf2 + Koeefs{1, k}(1, p)*PF_Martixes{1, k}(:, p);
            end
            buf2 = 2*buf2*BUF(2, k);
            grad_C_PF(:, k) = 2*(buf1 + buf2)/L;
        end

    else

        for k = 1:NPF
            buf = zeros(M+1, 1);
            for p = 1:L
                buf = buf + Koeefs{1, k}(1, p)*PF_Martixes{1, k}(:, p);
            end
            buf = 2*buf*BUF(1, k);
            grad_C_PF(:, k) = 2*buf/L;
        end

    end

end
end

```

```

function [C_Korrel, grad_C_K, Korrels] = Korrelations_Computation(x, L, M,
Flag_SQ, Val_Kor)

Flag_Type = 1;
N = 3;
% 0: ограничение на парциальную корреляцию по максимальной парциальной корреля-
ции
% 1: ограничение на парциальную корреляцию по всем корреляциям
% 2: ограничение на групповую корреляцию - одним условием
% 3: ограничение на групповую корреляцию - 2^N условиями

% Если повернутые созвездия ФМ-2, то по корреляциям L в 2 раза меньше
if Flag_SQ
    L = L/2;
end

% Готовим имя файла для загрузки массивов
FName = sprintf('Data\\Data_Korrel_L%d_M%d', L, M);

% Загружаем только нужное содержимое
if nargin > 1
    load(FName, 'Korrel_Martixes', 'grad_Korrel_Martixes');
else
    load(FName, 'Korrel_Martixes');
end

% Вычисляем парциальные корреляции
Korrels = zeros(1, L-1); % вектор, содержащий значения всех парциальных кор-
%реляций, умноженных на 2

BUF = x.' * x;
for p = 1:L-1
    Korrels(1, p) = sum(sum(BUF.*Korrel_Martixes{1, p})); %#ok<USENS>
end

% В зависимости от типа Flag_Type вычисляем условия
switch Flag_Type
case 0 % парциальная корреляция
    [val, pos] = max(abs(Korrels));
    Koef = sign(Korrels(1, pos));
    C_Korrel = val/2 - Val_Kor;
case 1
    Koeffs = sign(Korrels);
    C_Korrel = Koeffs.*Korrels/2 - Val_Kor;
case 2 % групповая корреляция
    Koeffs = sign(Korrels);
    C_Korrel = sum(Koeffs.*Korrels) - Val_Kor;
case 3
    Koeffs = ones(2^N, L-1);
    Koeffs(1, :) = sign(Korrels);
    for k = 1:2^N
        buf = 2*(dec2bin(k-1, N)-48)-1;
        Koeffs(k, 1:N) = buf;
        Koeffs(k, N+1:L-1) = Koeffs(1, N+1:L-1);
    end

    C_Korrel = zeros(1, 2^N);
    for k = 1:2^N
        C_Korrel(1, k) = sum(Koeffs(k, :).*Korrels) - Val_Kor;
    end
end
end

```

```

% При необходимости вычисляем градиенты условий
if nargin > 1

    BUF = zeros(M+1, M+1);
    for k = 1:M+1
        BUF(k, :) = x;
    end

    switch Flag_Type
        case 0
            grad_C_K = Koef * sum(grad_Korrel_Martixes{1, pos}.*BUF, 2) / 2;
        case 1
            grad_C_K = zeros(M+1, L-1);
            for n = 1:L-1
                grad_C_K(:, n) = Koefs(1, n) * sum(grad_Korrel_Martixes{1, ...
... n}.*BUF, 2) / 2;
            end
        case 2
            grad_C_K = zeros(M+1, 1);
            for n = 1:L-1
                grad_C_K = grad_C_K + Koefs(1, n) * ...
... sum(grad_Korrel_Martixes{1, n}.*BUF, 2);
            end
        case 3
            grad_C_K = zeros(M+1, 2^N);
            for n = 1:L-1
                grad_Korrel_Martixes{1, n} = sum(grad_Korrel_Martixes{1, ...
... n}.*BUF, 2);
            end
            for k = 1:2^N
                for n = 1:L-1
                    grad_C_K(:, k) = grad_C_K(:, k) + Koefs(k, n) * ...
... grad_Korrel_Martixes{1, n};
                end
            end
        end
    end

end
end

```