

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО



На правах рукописи



Нгуен Ван Фе

**ПОВЫШЕНИЕ СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МНОГОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ
ПУТЁМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ
СПЕКТРАЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ**

**Специальность 05.12.04 – Радиотехника, в том числе
системы и устройства телевидения**

**Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук**

**Научный руководитель – Гельгор Александр Леонидович
кандидат технических наук, доцент**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список сокращений	4
Список обозначений	6
Введение	8
Глава 1. Виды модуляции для многочастотных сигналов	17
1.1. OFDM и SC-FDMA	17
1.2. SEFDM	19
1.3. FBMC, GFDM, UFMC	22
Цель и задачи работы	27
Глава 2. Методы синтеза оптимальных импульсов	29
2.1. Линейные задачи	29
2.2. Нелинейные задачи	39
Выводы по главе 2	46
Глава 3. Алгоритмы приема сигналов с МСИ	49
3.1. Алгоритм Витерби	49
3.2. Алгоритм ВСJR	52
3.3. Сферичный алгоритм	60
3.4. Подоптимальный алгоритм	63
Выводы по главе 3	67
Глава 4. SEFDM-сигналы с модифицированными импульсами	68
4.1. RRC-SEFDM	69
4.2. PR-SEFDM	78
4.3. Практический выигрыш от использования сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM	82

Выводы по главе 4	84
Глава 5. Анализ эффективности сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM	86
5.1. Описание модели	86
5.2. Оценка эффективности сигналов RRC-SEFDM	89
5.3. Оценка эффективности сигналов PR-SEFDM	92
5.4. Оценка эффективности сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM с использованием алгоритма M-BCJR	95
Выводы по главе 5	97
Заключение	99
Список литературы	105
Приложение 1	109

Список сокращений

АКФ – автокорреляционная функция;

АПВ – апостериорная вероятность;

АТ – абонентский терминал;

АФМ – амплитудно-фазовая манипуляция;

БС – базовая станция;

ДПФ – дискретное преобразование Фурье;

ИХ – импульсная характеристика;

КАМ – квадратурная амплитудная манипуляция;

КИХ – конечная импульсная характеристика;

МСИ – межсимвольная интерференция;

ОБПФ – обратное дискретное преобразование Фурье;

ЦП – циклический префикс;

ВЕС – концентрация энергии (Band Energy Concentration);

BER – вероятность битовой ошибки (Bit Error Rate);

FBMC – множество поднесущих с использованием банка фильтров (Filter Bank Multi-Carrier);

FDL – потери в свободном евклидовом расстоянии (Free Distance Losses);

FTN – быстрее чем Найквист (Faster than Nyquist);

GC – групповая корреляция (Group Correlation);

GFDM – сигнал с обобщенным частотным уплотнением (Generalized Frequency Division Multiplexing);

LTE – долговременное развитие (Long-Term Evolution);

OFDM – мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов (Orthogonal Frequency Division Multiplexing);

PC – парциальная корреляция (Partial Correlation);

PR – частичный отклик (Partial Response);

RC – приподнятый косинус (Raised Cosine);

RRC – корень из приподнятого косинуса (Root Raised Cosine);

SC-FDMA – множественный доступ с частотным разделением каналов и одной несущей (Single Carrier Frequency Division Multiple Access);

SEFDM – Спектрально-эффективный сигнал с частотным уплотнением (Spectrally Efficient Frequency Division Multiplexing);

SISO – с мягкими решениями на входе и на выходе (Soft Input Soft Output);

UFMC – Универсальный фильтруемый сигнал на нескольких несущих (Universal Filtered MultiCarrier).

Список обозначений

$a(t)$ – импульс, использованный при формировании сигнала;

a_k – дискретные отсчёты импульса;

$BEC(W)$ – коэффициент концентрации мощности в полосе частот $[-W/2, W/2]$;

C_k – модуляционный символ, передаваемый на k -м тактовом интервале;

$d_{св}^2$ – квадрат свободного евклидова расстояния;

E_C – средний квадрат амплитуды точек сигнального созвездия;

$F_a(f)$ – преобразование Фурье импульса $a(t)$;

$g_x[k]$ – отсчёты автокорреляционной функции сигнала $x(t)$, взятые в моменты времени kT ;

L – глубина МСИ;

M_C – размер сигнального созвездия;

n_k – отсчёты белого гауссовского шума;

N_{SC} – количество информационных поднесущих частот;

N_0 – односторонняя спектральная плотность средней мощности белого шума;

N_{FFT} – размер ДПФ/ОДПФ;

$P_{ош}$ – битовая вероятность ошибки;

R – скорость подачи информации в канал;

T – длительность тактового интервала;

$W_{99\%}$ – ширина полосы частот, вычисленная по критерию 99% концентрации энергии;

α – коэффициент частотного уплотнения поднесущих частот;

β – коэффициент сглаживания RRC-импульса;

α_k – метрики состояний, вычисляемые в прямой рекурсии алгоритма BCJR;

β_k – метрики состояний, вычисляемые в обратной рекурсии алгоритма BCJR;

γ_k – метрики перехода между состояниями в решётке в алгоритме BCJR;

β_E – удельные энергетические затраты;

γ – спектральная эффективность;

ξ_k – нормированные значения ошибочных символов;

$\psi(t)$ – интерполирующий импульс;

Δf – частотное разнесение соседних поднесущих частот.

Введение

Актуальность темы диссертации

Повышение спектральной эффективности при передаче информации с помощью электромагнитных колебаний по-прежнему является актуальной задачей. В большинстве современных систем передачи информации используются сигналы без межсимвольной интерференции (МСИ) или с устранением МСИ при приёме, что обеспечивает возможность использования вычислительно простых алгоритмов поэлементного приёма. Тем не менее, еще в 1975 году Мазо доказал возможность значительного повышения спектральной эффективности без энергетических потерь за счёт введения МСИ [20]. Его идея заключалась в том, чтобы при использовании линейной модуляции с sinc-импульсом передавать модуляционные символы в $1/\tau$ ($0 < \tau < 1$) раз быстрее, чем требуется для устранения МСИ при приёме. Для сигналов с sinc-импульсом это означает преодоление «барьера Найквиста», поэтому такие сигналы были названы «быстрее, чем Найквист» – «Faster than Nyquist» (FTN). Мазо показал, что для сигналов FTN с сигнальным созвездием QPSK использование приёма в целом при $0,8 \leq \tau < 1$ не приводит к энергетическим потерям. Использование $\tau = 0,8$ эквивалентно передаче данных в нормированной полосе частот 0,8, т.е. обеспечивает 25% выигрыш в спектральной эффективности по отношению к лучшим по критерию максимума спектральной эффективности сигналам без МСИ. Под лучшими сигналами без МСИ понимаются сигналы с линейной модуляцией и sinc-импульсом. В [21] было предложено использовать идею FTN для семейства RRC-импульсов (RRC от англ. «Root Raised Cosine», что означает «корень из приподнятого косинуса» – форма энергетического спектра одного из импульсов данного семейства импульсов), к которым принадлежит sinc-импульс, использованный в оригинальной статье Мазо. В [21] показано, что таким образом также удаётся заметно повысить спектральную эффективность без энергетических потерь.

В развитие идеи введения МСИ Саид и Андерсон в 1998 году предложили методику синтеза оптимальных импульсов для сигналов с частичным откликом

(Partial-Response Signal, PRS) [22]. Это обеспечило дополнительный выигрыш в спектральной эффективности по отношению к сигналам FTN. Критерием оптимизационной задачи в [22] является максимизация свободного евклидова расстояния при условии фиксированного значения полосы частот, содержащей заданную долю мощности сигнала. Авторами были предложены импульсы, обеспечивающие передачу данных в нормированной полосе частот 0,76 без потерь в свободном евклидовом расстоянии. Это эквивалентно дополнительному 5% выигрышу в спектральной эффективности по отношению к сигналам FTN или 32% выигрышу в спектральной эффективности по отношению к лучшим сигналам без МСИ.

С развитием беспроводных систем передачи информации возростала актуальность вопросов повышения скорости передачи информации в многолучевых каналах. Решением, которое используется по сей день, является применение сигналов OFDM и помехоустойчивого кодирования с перемежением символов. При таком подходе в приёмнике достаточно использовать простой одношаговый эквалайзер. С целью дополнительного повышения спектральной эффективности были предложены сигналы SEFDM [4], отличительной особенностью которых от сигналов OFDM является сближение поднесущих, что приводит к появлению МСИ. Отметим, что в данном случае речь идёт об интерференции между сигналами разных поднесущих, передаваемых в одном SEFDM-символе, поэтому иногда используют термин «межканальная интерференция», тем не менее, мы далее будем использовать только термин МСИ, как это делается в современной литературе, считая, что из контекста ясно о каком варианте интерференции идёт речь. Интересным фактом является то, что идея перехода от сигналов OFDM к сигналам SEFDM является аналогом идеи перехода от сигналов с линейной модуляцией и sinc-импульсом к сигналам FTN, но реализована эта идея в спектральной, а не во временной области.

В настоящее время имеется множество публикаций, посвящённых вычислительно эффективным алгоритмам формирования и приёма сигналов SEFDM. Перспективным алгоритмом формирования сигналов SEFDM является алгоритм,

который отличается от алгоритма формирования OFDM только тем, что после выполнения ОДПФ отбрасываются несколько отсчётов сигнала [5]. В качестве алгоритмов приёма рассматриваются, в основном, вычислительно-эффективные модификации алгоритма полного перебора, например, [26–28]. Однако, алгоритмы [26–27] оказываются практически нереализуемыми из-за большого количества состояний решётки, а алгоритм [28] позволяет работать только с небольшим количеством поднесущих.

Учитывая сказанное выше, актуальным представляется попытка применения идей [21–22] для модификации сигналов SEFDM с целью дополнительного повышения спектральной эффективности многочастотных сигналов. Фактически, речь идёт о замене спектральных sinc-импульсов на спектральные RRC-импульсы или оптимальные спектральные импульсы. Под спектральным импульсом здесь и далее мы понимаем спектр поднесущей одного OFDM- или SEFDM-символа; очевидно, что спектральный импульс является преобразованием Фурье от импульса во временной области, например, для сигналов OFDM имеем прямоугольный импульс во временной области и соответствующий ему спектральный sinc-импульс. Для предлагаемых сигналов, очевидно, необходимо предложить методы их эффективного формирования и обработки. При постановке задачи поиска оптимального спектрального импульса необходимо выбрать и обосновать критерий оптимизации и дополнительные ограничения. Ожидается, что дополнительно к повышению спектральной эффективности использование новых спектральных импульсов позволит значительно упростить обработку сигналов SEFDM, в том числе, удастся применить подоптимальные алгоритмы приёма и тем самым значительно снизить вычислительную сложность обработки таких сигналов.

Объектом исследования в работе являются многочастотные сигналы с неортогональными поднесущими.

Предметом исследования являются спектральная эффективность и удельные энергетические затраты многочастотных сигналов со спектральными импульсами, обеспечивающими неортогональность поднесущих.

Целью работы является повышение спектральной эффективности при использовании многочастотных сигналов с управляемой межсимвольной интерференцией МСИ путём применения оптимальных спектральных импульсов и подоптимальных алгоритмов приёма при энергетических потерях в допустимых пределах.

Для достижения указанной цели требуется решить следующие **задачи**.

1. Оптимизация формы спектрального импульса для минимизации энергетических потерь при фиксированной длительности сигнала.
2. Разработка вычислительно-эффективных алгоритмов обработки многочастотных сигналов с управляемой МСИ в спектральной области.
3. Разработка методики формирования и обработки многочастотных сигналов со спектральными импульсами, обеспечивающими неортогональность поднесущих.
4. Разработка структурной схемы модема для передачи информации с использованием сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM.
5. Разработка имитационной модели для оценки помехоустойчивости приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM.
6. Проведение имитационного эксперимента по приёму сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM с целью оценки их эффективности в канале с аддитивным белым гауссовским шумом.

Структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и одного приложения. Общий объем диссертационной работы составляет 112 страниц, в том числе 97 страниц основного текста, 58 рисунков, 9 таблиц, списка литературы из 40 источников.

Во **введении** обоснована актуальность и новизна темы исследования, сформулирована цель и основные задачи исследования, описана структура диссертационной работы.

В **первой главе** приведён аналитический обзор работ, посвящённых методам формирования многочастотных сигналов: OFDM и SC-FDMA, SEFDM, FBMC, GFDM, UFDM. Сигналы OFDM и SC-FDMA используются в стандарте мобильной связи четвёртого поколения LTE на физическом уровне. Сигналы FBMC, GFDM, UFDM являются предложениями для перспективных стандартов связи; в этих сигналах предлагается использовать различные фильтры-прототипы, обеспечивающие квазиортогональность поднесущих.

Сигналы SEFDM являются сигналами с управляемой МСИ, полученными в результате сближения поднесущих сигналов OFDM, что обеспечивает повышение спектральной эффективности. Идея формирования сигналов SEFDM идентична идее формирования сигналов FTN, только реализована в частотной, а не во временной области.

Предложена идея построения новых сигналов PR-SEFDM с использованием оптимальных спектральных импульсов в качестве формы спектра поднесущих. Также предложена идея построения сигналов RRC-SEFDM, которые отличаются от традиционных сигналов SEFDM применением RRC-импульсов в качестве формы спектра поднесущих.

В результате обзора литературы обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и основные задачи исследования.

В **второй главе** описаны методики синтеза оптимальных импульсов для одночастотных сигналов с частичным откликом и для многокомпонентных сигналов. Для многокомпонентных сигналов возможна постановка нелинейной оптимизационной задачи для нахождения формы финитных импульсов оптимальных по критерию минимизации нормированной полосы частот, содержащей заданную долю мощности сигнала с дополнительными ограничениями на свободное евклидово расстояние или коэффициент групповой корреляции, определяющий уровень МСИ. Для сигналов с частичным откликом удаётся сформулировать линейную оптимизационную задачу, обеспечивающую нахождение оптимального дискретного импульса.

В **третьей главе** описаны оптимальные алгоритмы приёма сигналов с управляемой МСИ: алгоритм Витерби и сферичный алгоритм, реализующие оптимальный приём по критерию максимального правдоподобия ансамбля символов; алгоритм ВСJR, оптимальный по критерию максимума апостериорной вероятности каждого символа. В конце главы описаны подоптимальные алгоритмы, используемые для уменьшения вычислительной сложности: алгоритм М-Витерби, в памяти которого сохраняются только M состояний с наименьшими метриками на каждом шаге, алгоритм М-ВСJR, в памяти которого сохраняются M путей с наибольшими вероятностями на каждом шаге прямой рекурсии, в обратной рекурсии, вычисления производятся по путям, выжившим в прямой рекурсии.

В **четвёртой главе** предложена методика формирования и обработки многочастотных сигналов SEFDM с модифицированными спектральными импульсами. Предложено использование RRC-импульсов в качестве спектров поднесущих многочастотных сигналов с целью уменьшения уровня МСИ, которые получили название RRC-SEFDM. При приёме сигналов RRC-SEFDM требуется повышать частоту дискретизации в спектральной области согласно теореме Котельникова. Другим подходом для формирования многочастотных сигналов с неортогональными поднесущими является использование оптимальных импульсов в качестве формы спектра поднесущих. Такие сигналы получили название PR-SEFDM. Для сигналов PR-SEFDM, не требуется передискретизация спектра и сближение поднесущих, т.е. размер преобразования Фурье остаётся неизменным. Предложена структурная схема передатчика и приёмника сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM на основе ДПФ и ОДПФ.

В **пятой главе** описана имитационная модель, разработанная для получения помехоустойчивости сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM, с помощью которой производилась оценка спектральной эффективности этих сигналов. В плоскости зависимости значения спектральной эффективности от удельной энергетической

затраты приводится сравнение для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM при использовании оптимального алгоритма BCJR, и также его подоптимальная версия – M-BCJR.

В **заключении** сформулированы основные результаты исследования, представляющие теоретический и практический интерес, перечислены научная новизна и положения, выносимые на работу.

Научная новизна результатов диссертационной работы

- Впервые предложены многочастотные спектрально-эффективные сигналы RRC-SEFDM и PR-SEFDM, которые благодаря использованию неортогональных поднесущих позволяют повысить спектральную эффективность передачи информации по отношению к сигналам OFDM.

- Для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM предложена структурная схема модема, в которой аналогично случаю сигналов OFDM используются блоки прямого и обратного ДПФ.

- Впервые для сигналов PR-SEFDM предложена методика синтеза оптимальных спектральных импульсов по критерию максимального евклидова расстояния, при наличии дополнительного ограничения на длительность сигнала, в которой сосредоточена заданная концентрация энергии сигнала.

- Для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM впервые показано, что максимальное увеличение спектральной эффективности передачи информации возможно только при одновременном введении МСИ и увеличении размера сигнального созвездия.

- Показано, что для сигналов PR-SEFDM применение подоптимального алгоритма приёма M-BCJR позволяет снизить вычислительную сложность обработки сигнала при отсутствии энергетических потерь.

Положения, выносимые на защиту

- При фиксированных удельных энергетически затратах увеличение длины спектрального импульса для сигналов PR-SEFDM приводит к повышению спектральной эффективности, однако повышение тем меньше, чем больше значение длины. Так для случая сигнального созвездия QPSK изменение длины спектрального импульса от $L = 8$ до $L = 12$ приводит к повышению спектральной эффективности менее, чем на 1%, в то время как переход от $L = 4$ до $L = 8$ обеспечивает повышение спектральной эффективности на 24%.

- Для сигналов PR-SEFDM использование в алгоритме M-BCJR числа «выживающих» на каждом шаге путей $M = 4$ для созвездия QPSK и $M = 8$ для созвездия 16-QAM обеспечивает сохранение спектральной эффективности и удельных энергетических затрат при уменьшении вычислительной сложности до 512 раз по отношению к оптимальному алгоритму BCJR.

- Для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM при фиксированных удельных энергетических затратах переход от сигнального созвездия QPSK к сигнальному созвездию 16-QAM обеспечивает выигрыш в спектральной эффективности до 25%.

- По отношению к сигналам OFDM с сигнальными созвездиями QPSK и 16-QAM сигналы PR-SEFDM с такими же созвездиями обеспечивают выигрыш в спектральной эффективности до 27% при энергетическом проигрыше не больше 1,3 дБ.

Теоретическая значимость результатов диссертационной работы

Впервые сформулирована и решена задача синтеза оптимальных спектральных импульсов по критерию максимизации свободного евклидова расстояния, при наличии дополнительных ограничений на длительность временного импульса, в которой сосредоточена заданная доля энергии сигнала. Разработана

методика формирования и обработки многочастотных сигналов, у которых в качестве формы спектральных импульсов используются оптимальные импульсы или RRC-импульсы.

Практическая значимость результатов диссертационной работы

Предложена структурная схема модема для передачи и приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM, которые позволяют повысить спектральную эффективность передачи информации по отношению к сигналам OFDM. Предложена методика формирования и обработки сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM в частотной области, что обеспечивает возможность простой замены использования сигналов OFDM на сигналы RRC-SEFDM и PR-SEFDM. Предложен вычислительно-эффективный подоптимальный алгоритм приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM.

Глава 1. Виды модуляции для многочастотных сигналов

1.1. OFDM и SC-FDMA

В стандарте мобильной связи четвёртого поколения LTE на физическом уровне используются технология OFDM для передачи данных в линии вниз от базовой станции (БС) к абонентному терминалу (АТ) и технология SC-FDMA для передачи данных в линии вверх от АТ к БС [1], в обоих случаях используется циклический префикс (ЦП). OFDM является ортогональной системой передачи информации, в которой отсутствует межсимвольная интерференция в идеальных условиях. Комплексная огибающая сигналов OFDM может быть записана в следующем виде:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} C_k^{(n)} a(t-kT) \exp(j2\pi n(t-kT)/T), \quad (1.1)$$

где T – длительность символа OFDM, k – номер символа OFDM, N – количество поднесущих частот, $C_k^{(n)}$ – модуляционный каналный символ n -ой поднесущей k -го символа OFDM, $a(t)$ – финитный импульс, задаваемый выражением:

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T/2, T/2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (1.2)$$

На рис. 1.1 представлена реализация сигнала OFDM для $N = 12$ и созвездия QPSK.

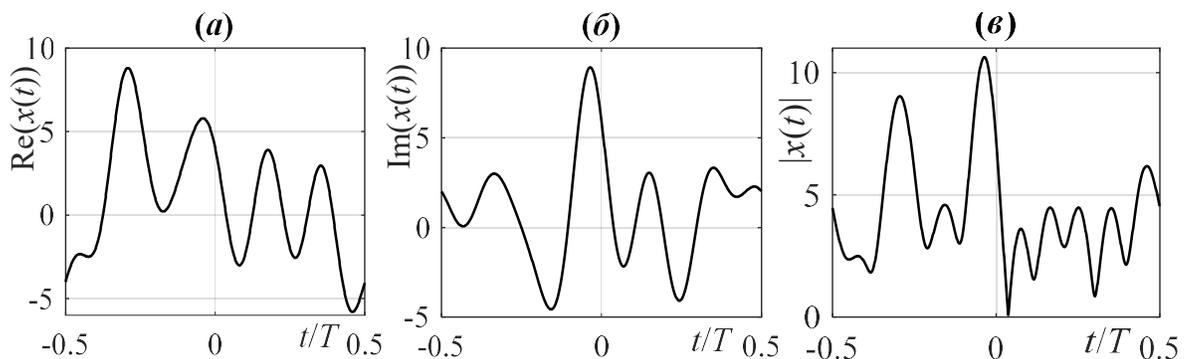


Рис. 1.1. Реализация сигнала OFDM для $N = 12$ и созвездия QPSK
(а) Вещественная часть сигнала; (б) Мнимая часть сигнала; (в) Модуль сигнала

На рис. 1.2 представлена структурная схема передатчика и приёмника сигналов OFDM. В приёмнике последовательность N модуляционных символов поступает в последовательно-параллельный преобразователь. К результату с выхода последовательно-параллельного преобразователя добавляются $(N_{FFT} - N)/2$ нулей в начале и в конце. Полученный результат поступает в блок ОДПФ. Полученный поток сигнала во временной области поступает в параллельно-последовательный преобразователь. В приёмнике сигналов OFDM, порядок действий является обратным по отношению к передатчику, однако в конце добавляется QAM демодулятор.

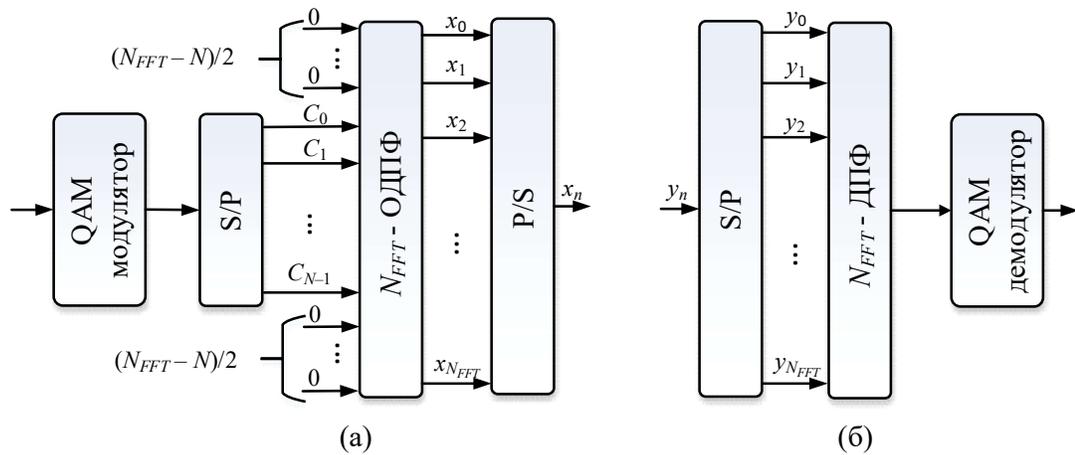


Рис. 1.2. Принципиальная схема передатчика на основе ОДПФ (а) и приёмника на основе ДПФ (б) для сигналов OFDM, N_{FFT} – размер ОБПФ и БПФ

Несмотря на достоинства технологии OFDM, в восходящем направлении стандарта LTE на физическом уровне применяется технология SC-FDMA. Сигналы OFDM имеют высокий уровень пик-фактора [2], который приводит к уменьшению энергетической эффективности АТ, также требует использовать высококачественный усилитель. В отличие от этого, сигналы с SC-FDMA обеспечивает заметно меньший уровень пик-фактора по сравнению с сигналами OFDM [3]. Существуют два различных варианта формирования сигналов SC-FDMC по способу расстановки поднесущих: распределённая расстановка (англ. Distributed) – DFDMA и локальная расстановка (англ. Localized) – LFDMA. Хотя

способ DFDMA обеспечивает лучшее значение пик-фактора, в стандарте LTE используется вариант LFDMA, т.к. он обеспечивает большую пропускную способность системы при неоднородности условий связи для разных абонентов [3].

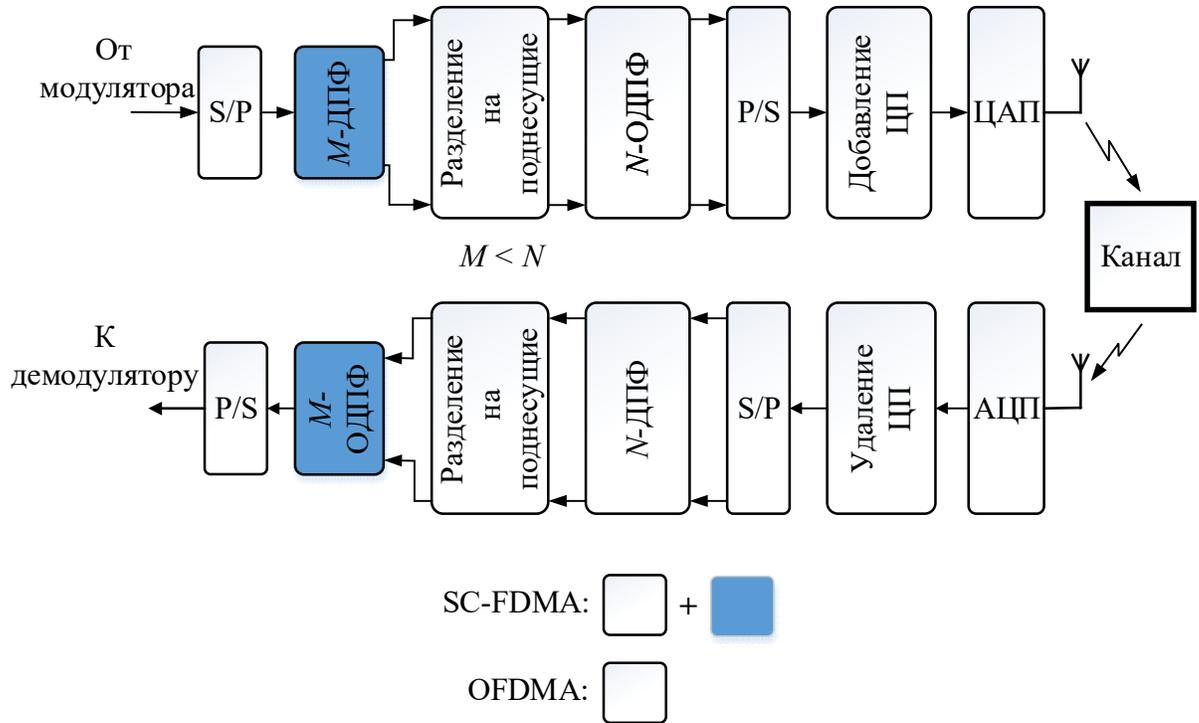


Рис. 1.3. Сравнение структурной схемы систем OFDMA и SC-FDMA

На рис. 1.3 изображено сравнение структурной схемы систем OFDM и SC-FDMA. В отличие от системы OFDM, поток модуляционных символов от последовательно-параллельного преобразователя преобразуется в частотные отсчёты с помощью ДПФ с размером M . Результат с выхода ДПФ поступает на блок разделения на поднесущих, где частотные отсчёты распределяются в нужные поднесущие. Полученный поток поступает в блок ОДПФ с размером N , где N на много больше M . К временной последовательности после параллельно-последовательного преобразователя добавляется циклический префикс перед передачей.

1.2. SEFDM

Одним из перспективных направлений развития OFDM являются сигналы SEFDM, идею которых впервые предлагали в [4] в 2003 году. Принципиальным отличием сигналов SEFDM является использование меньшего разнеса между

поднесущими, чем в сигналах OFDM, где величина разноса определяется требованием ортогональности поднесущих. Комплексная огибающая сигналов SEFDM $x(t)$ может быть записана следующим образом:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} C_k^{(n)} a(t - kT) \exp(j2\pi n \Delta f (t - kT)), \quad (1.3)$$

где $\Delta f = \alpha/T$ – частотное разнесение соседних поднесущих частот, α – коэффициент частотного уплотнения поднесущих частот, $\alpha \in (0, 1]$, для сигналов OFDM значение $\alpha = 1$.

На рис. 1.4 представлены спектры поднесущих сигнала OFDM (при $\alpha = 1$) и сигнала SEFDM с коэффициентом частотного разнесения $\alpha = 0,5$. Для обоих сигналов, количество поднесущих $N = 8$. Из этого рисунка видно, что полоса сигнала SEFDM снижается в 2 раза по сравнению с полосой сигнала OFDM.

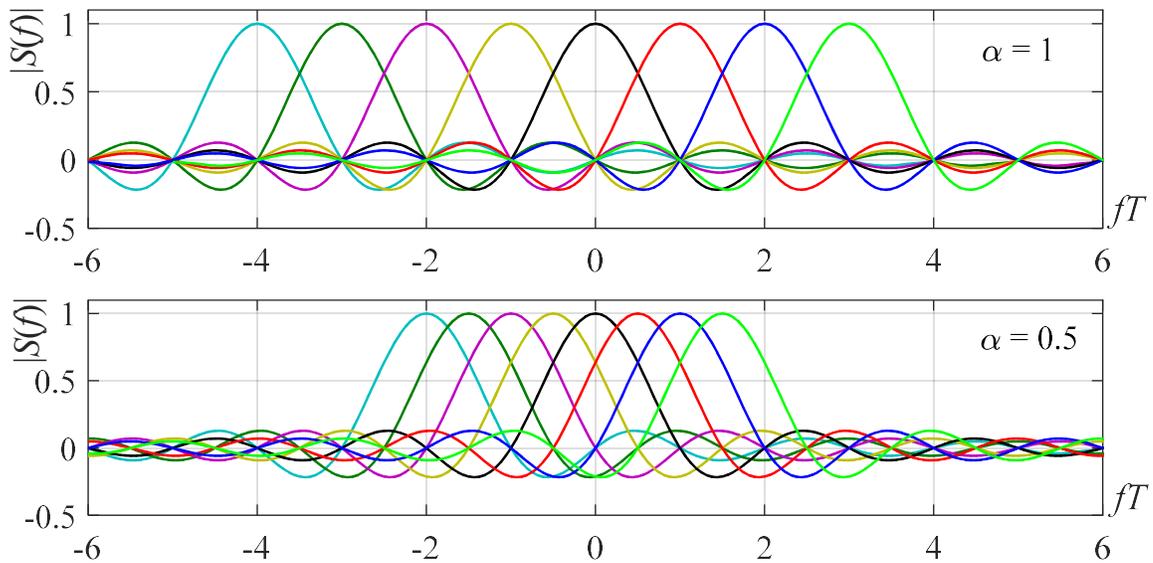


Рис. 1.4. Спектр поднесущих сигнала OFDM (при $\alpha = 1$) и сигнала SEFDM (при $\alpha = 0,5$)

Из рис. 1.4 очевидно, что в сигналах SEFDM появляется межсимвольная интерференция МСИ. Однако, чем меньше значения α , тем более глубокий уровень МСИ. Принципиальные схемы формирования и обработки сигналов SEFDM изображены на рис. 1.5. Из рис. 1.5 (а) можно видеть, что суть алгоритма формирования сигналов SEFDM заключается в том, что после выполнения ОДПФ от-

брасываются αN_{FFT} отсчётов сигнала [5–6], что является отличием от формирования сигналов OFDM. В приёмной стороне, в параллельный поток, выходящий из выхода последовательно-параллельного преобразователя, добавляются αN_{FFT} нулей. Полученный результат поступает на блок ДПФ. В качестве демодулятора сигналов SEFDM, в [7–8] предлагали использовать модификации алгоритма полного перебора, высокая вычислительная сложность которых позволяет принимать только сигналы с небольшим количеством поднесущих.

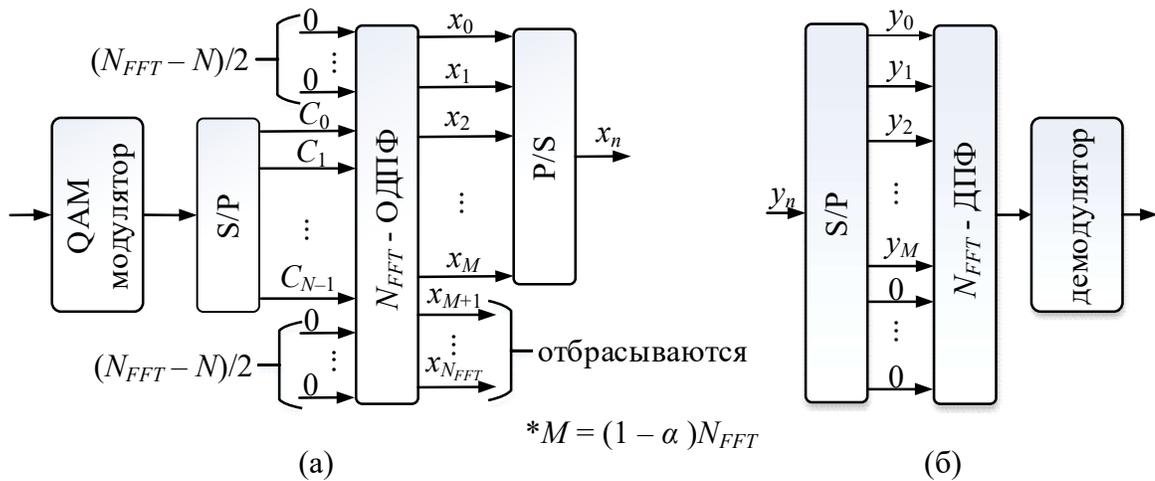


Рис. 1.5. Принципиальная схема формирования сигналов SEFDM

В последующем исследовании сигналов SEFDM предлагали два новых метода формирования и обработки, позволяющие работать с большим количеством поднесущих [9]. Первым методом является разбиение множества всех поднесущих на подмножества с небольшим количеством поднесущих в каждом. Если интерференция между поднесущими в разных подмножествах невелика, то возможно отдельно принимать каждое подмножество поднесущих. Второй метод заключается в применении турбо эквалайзера для сигналов SEFDM со свёрточным кодированием. Демодуляция осуществляется в спектральной области с помощью вычислительно простого алгоритма. Несмотря на низкое качество такого демодулятора, общий результат оказывается удовлетворительным за счёт итеративной обработки, включающей SISO (англ. Soft Input Soft Output – с мягкими

решениями на входе и на выходе) декодирование свёрточного кода. Вопросы практической реализации SEFDM представлены в [9–11].

1.3. FBMC, GFDM, UFMC

FBMC – многочастотный фильтрбанк сигналов (англ. Filter-Bank Multicarrier), который рассматривается для использования на физическом уровне сетей стандарта последующего поколения, является предложенной модификацией сигналов OFDM [12–14]. Традиционную OFDM схему можно считать частным случаем FBMC схемы с прямоугольным фильтром прототипа, дискретная импульсная характеристика которого представлена согласно формуле (1.2). Если отдельно рассмотрим каждую n -ую поднесущую, формирующий сигнал $x(t)$ может быть представлен следующим образом:

$$x(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x_n(t), \quad (1.4)$$

где:

$$x_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k^{(n)} a_n(t - kT), \quad (1.5)$$

$$a_n(t) = a(t) e^{j2\pi n t / T}, \quad (1.6)$$

Заметим, что выражение (1.5) является линейной свёрткой последовательности переданных символов с импульсной характеристикой $a_n(t - kT)$. В итоге, (1.1) можно переписать в таком виде

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} C_k^{(n)} a_n(t - nT), \quad (1.7)$$

На рис. 1.6 представлена структурная схема системы FBMC, которую тоже можно использовать в системе OFDM. Допустим канал является идеальным, тогда каналные символы $C_k^{(n)}$ могут быть приняты без ошибок если выполняется следующее условие ортогональности

$$\langle a_{\text{Tx}}^{(n)}(t - kT), a_{\text{Rx}}^{(m)}(t - lT) \rangle = \delta_{n,m} \delta_{k,l}, \quad (1.8)$$

где:

$$\langle a_{\text{Tx}}^{(n)}(t - kT), a_{\text{Rx}}^{(m)}(t - lT) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} a_{\text{Tx}}^{(n)}(t - kT) a_{\text{Rx}}^{*(m)}(t - lT) dt, \quad (1.9)$$

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (1.10)$$

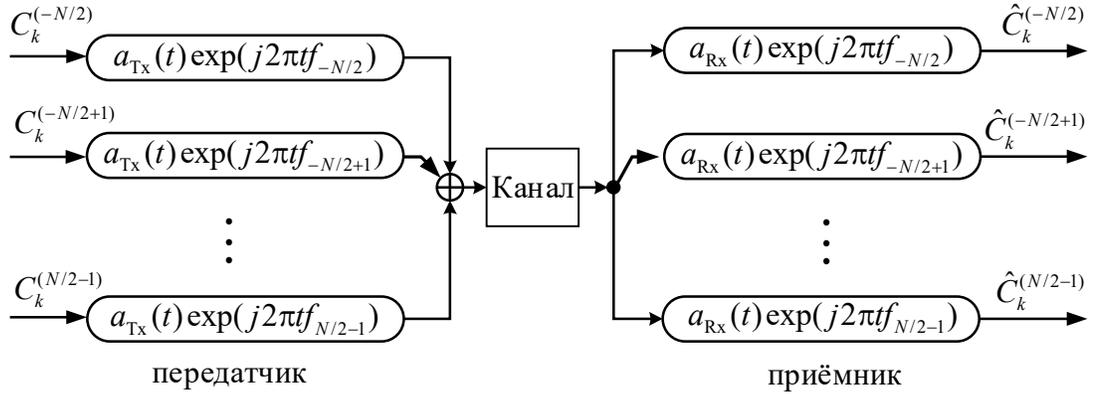


Рис. 1.6. Структурная схема FBMC

Однако, прямоугольный фильтр прототипа не обеспечивает отсутствие МСИ в канале с замиранием. Семейство фильтров прототипа гарантирует низкий уровень МСИ. Импульсная характеристика таких фильтров может быть представлена в таком виде:

$$a(t) = 1 + 2 \sum_{l=1}^{L-1} A_l \cos(2\pi \frac{lt}{LT}), \quad (1.11)$$

где коэффициенты A_k представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Коэффициенты фильтра прототипа в спектральной области

L	A_0	A_1	A_2	A_3
2	1	$\sqrt{2} / 2$	-	-
3	1	0.911438	0.411438	-
4	1	0.971960	$\sqrt{2} / 2$	0.235147

На рис. 1.7 изображена импульсная характеристика для случая $L = 4$ во временной и спектральной областях.

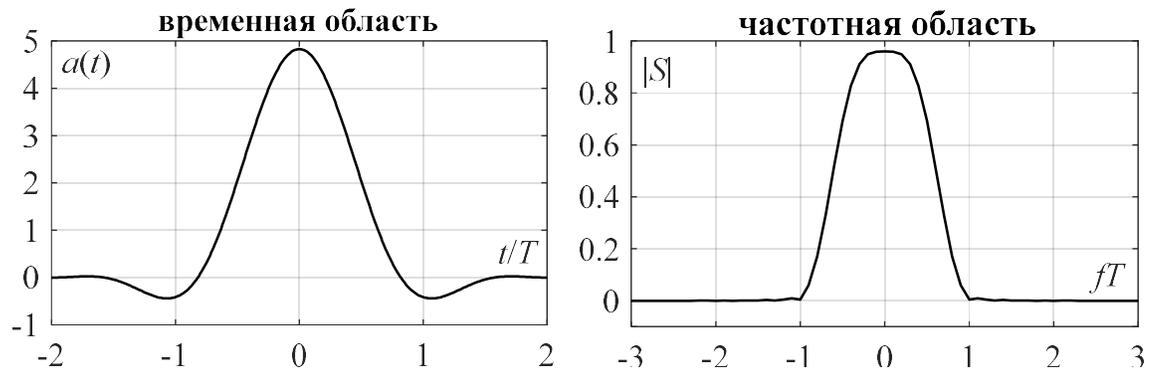
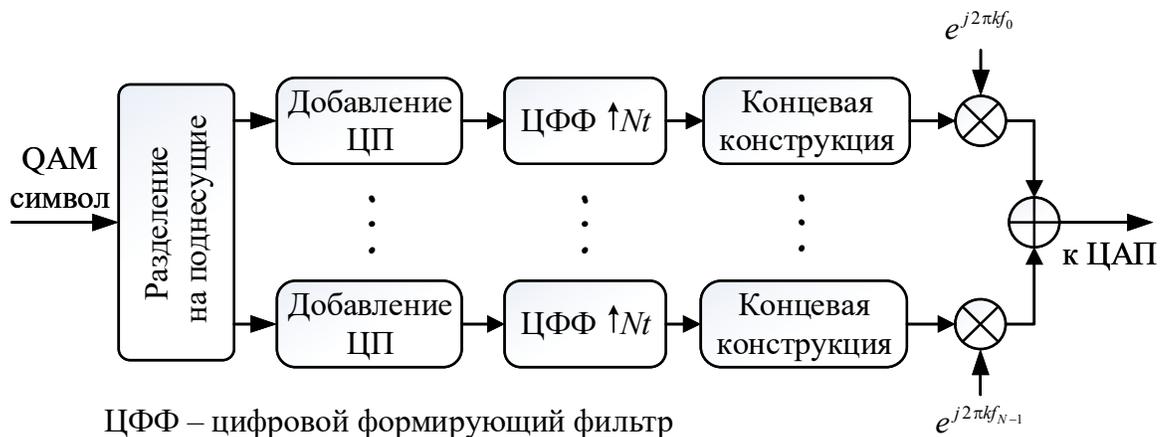


Рис. 1.7. Импульсная характеристика фильтра прототипа во временной и частотной областях для $L = 4$

GFDM – сигнал с обобщенным частотным уплотнением (англ. Generalized Frequency Division Multiplexing) эффективно используется во фрагментированных полосах частот благодаря низкому уровню внеполосного излучения, позволяющему работать на распределённых ограниченных полосах [15–16].



ЦФФ – цифровой формирующий фильтр

Рис. 1.8. Структурная схема передатчика сигналов GFDM

На рис. 1.8 представлена структурная схема передатчика сигналов GFDM. Из рисунка видно, что передатчик сигналов GFDM аналогичен передатчику сигналов OFDM с частотами f_0, f_1, \dots, f_{N-1} , которые не должны быть смежными. Как и в системе OFDM, в системе GFDM используется циклический префикс, длина которого превосходит сумму от длин импульсных откликов передающего фильтра, канала и приёмного фильтра. Однако, в этой схеме используется технология, называемая концевой конструкцией в пользу уменьшения циклического префикса [15]. На рис. 1.9 представлен пример концевой конструкции символов FGDM: (a) – исходный символ GFDM с добавлением циклического префикса,

(б) – выделенная синяя часть соответствует удлинённой части блока символов GFDM, пропускающего через канал, (в) – усечение концевой части и добавление её в начало ЦП для сохранения длины блока GFDM. Из анализа рис. 1.9 очевидно, что использование концевой конструкции приводит к увеличению скорости передачи символов GFDM.

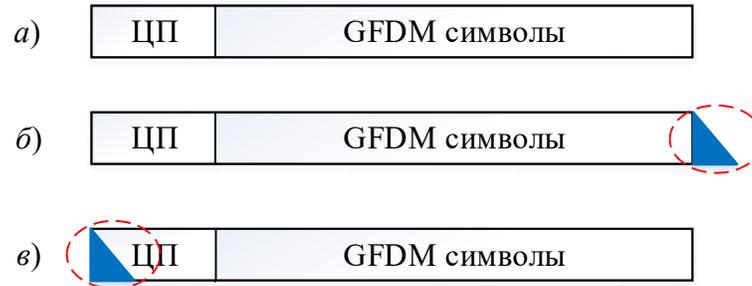


Рис. 1.9. Концевая конструкция

В системе GFDM используется один ЦП в одном блоке, что приводит к увеличению скорости передачи данных. На рис. 1.10 представлены структуры блоков данных в системах OFDM и GFDM. Как известно, в системе OFDM, ЦП передается после каждого символа. Из этого рисунка очевидно, что из-за уменьшения количества ЦП, скорость передачи символов в системе GFDM увеличивается по сравнению с системой OFDM.

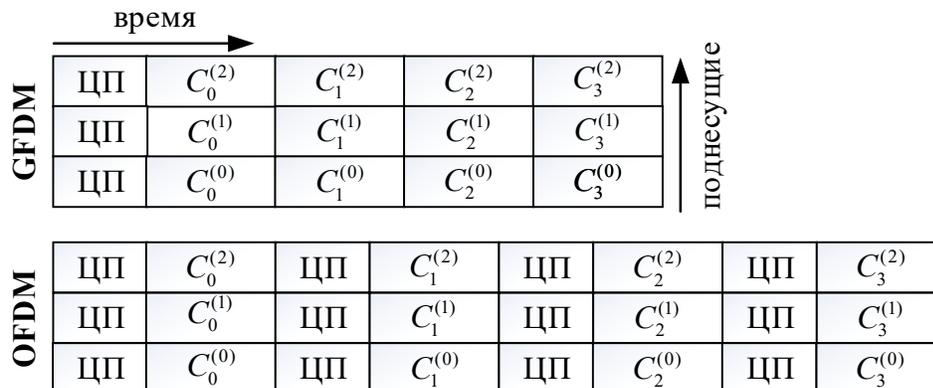


Рис. 1.10. Структура блоков данных в системах OFDM и GFDM

Для удобного представления математического описания сигналов GFDM, обозначим: N – количество поднесущих, Q – количество переданных модуляци-

онных символов на каждой поднесущей, $Q_{\text{ЦП}}$ – количество модуляционных символов с добавлением циклического префикса, $\tilde{C}_0^{(n)}, \dots, \tilde{C}_{Q_{\text{ЦП}}-1}^{(n)}, \dots, \tilde{C}_{Q+Q_{\text{ЦП}}-1}^{(n)}$ – символы на выходе блока «Добавление ЦП» для n -ой поднесущей, $a_{\text{ТХ}}$ – импульсная характеристика формирующего фильтра с длиной L , Nt – количество отсчётов импульса $a(t)$ на интервале T . Тогда сигнал на выходе ЦФФ может быть записан в виде

$$x_k^{(n)} = \sum_{q=0}^{Q+Q_{\text{ЦП}}-1} \tilde{C}_q^{(n)} a_{\text{ТХ}}(k - qM), \quad (1.12)$$

где $k = 0, \dots, Nt(Q + Q_{\text{ЦП}} + L - 1) - 1$. После конечной конструкции, количество отсчётов для каждой поднесущей уменьшается на $Nt(L - 1)$.

На рис. 1.11 изображена структурная схема GFDM-приёмника.

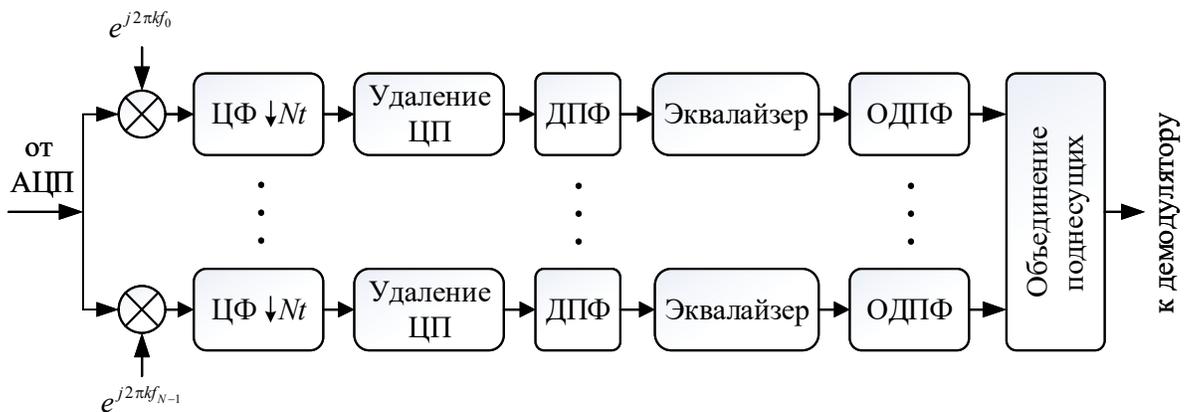


Рис. 1.11. Структурная схема GFDM приёмника

UFMC – универсальный фильтруемый многочастотный сигнал (англ. Universal Filtered Multicarrier) был предложен в проекте 5G NOW [14], [17–19]. UFMC относится к экспериментальному применению сигналов FBMC. В отличие от системы FBMC, в которой каждый формирующий фильтр используется для каждой поднесущей, в системе UFMC – для множества поднесущих.

На рис. 1.12 представлена структурная схема передатчика системы UFMC. Временной сигнал в каждом субблоке после параллельно-последовательного преобразователя проходит через свой цифровой формирующий фильтр ЦФФ. Результаты с выхода ЦФФ поэлементно суммируются. Полученный сигнал передается на одной несущей частоте.

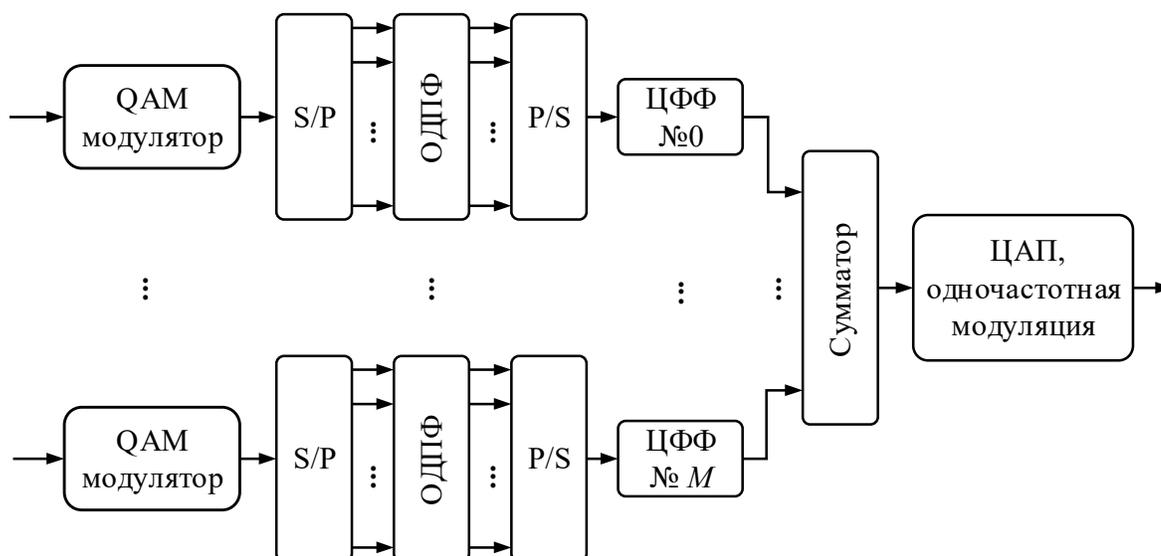


Рис. 1.12. Структурная схема передатчика системы UFMC

Цель и задачи работы

Целью работы является увеличение спектральной эффективности многочастотных сигналов при небольшой дополнительной потере в энергетической эффективности, которое достигается путём использования модифицированных импульсов в качестве формы поднесущих и алгоритма приёма с низкой вычислительной сложности.

Для достижения указанной цели требуется решить следующие **задачи**.

1. Оптимизация формы спектрального импульса для минимизации энергетических потерь при фиксированной длительности сигнала.
2. Разработка вычислительно-эффективных алгоритмов обработки многочастотных сигналов с управляемой МСИ в спектральной области.
3. Разработка методики формирования и обработки многочастотных сигналов с неортогональными поднесущими.
4. Разработка структурной схемы модема для передачи информации с использованием сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM.
5. Разработка имитационной модели для оценки помехоустойчивости приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM.

6. Проведение имитационного эксперимента по приёму сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM с целью оценки их эффективности в канале с аддитивным белым гауссовским шумом.

Глава 2. Методы синтеза оптимальных импульсов

В современном телекоммуникационном стандарте для повышения скорости передачи информации традиционно увеличивается размер сигнального созвездия. Однако существует другой способ повышения спектральной эффективности, который впервые доказал Мазо в 1974 году – введение управляемой МСИ [20]. Он рассматривал сигнал с линейной модуляцией и sinc-импульсами и предлагал передавать модуляционные символы в $1/\tau$ раз быстрее, чем требуется для выполнения условия устранения МСИ в отсчётные моменты времени, такие сигналы назвал «быстрее чем найквист». Также к сигналам с управляемой МСИ относятся сигналы с частичным откликом [22] и многокомпонентные сигналы [25]. Формула импульса для таких сигналов может быть получена в результате оптимизации. В данной главе рассмотрены методики синтеза оптимальных импульсов для этих сигналов. Для сигналов с частичным откликом будем рассматривать линейные задачи нахождения оптимальных импульсов по критерию максимального свободного евклидова расстояния при фиксированной занимаемой полосе частот. Для многокомпонентных сигналов – постановку и решение нелинейной оптимизационной задачи нахождения оптимальной формы импульса для двух критериев – концентрация энергии в заданной полосе частот и внеполосные излучения.

2.1. Линейные задачи

Методика нахождения оптимальных импульсов представлена в [22], где авторы предлагали постановку и решение линейной задачи для нахождения отсчётов оптимальной автокорреляционной функции (АКФ). Анализируя корни полинома, являющегося z-преобразованием оптимальной АКФ, можно восстановить дискретный оптимальный импульс. Критерием оптимизации является максимизация квадрата свободного евклидова расстояния $d_{св}^2$ в ансамбле сигналов, что обеспечивает асимптотически минимальную вероятность ошибки при увеличе-

нии отношения сигнал/шум. В качестве дополнительных ограничений используются: значение нормированной полосы частот, содержащей требуемую мощность формирующего сигнала; нормировка энергии импульса, обеспечивающая единственность решения.

Далее рассмотрим подробно постановку и решение оптимальной задачи. Предполагаем, что дискретный искомый оптимальный импульс b_n состоит из L отсчётов, тогда непрерывный импульс $a(t)$, соответствующий импульсной характеристике формирующего фильтра, можно получить в результате интерполяции

$$a(t) = \sum_{n=0}^{L-1} b_n \psi(t - nT), \quad (2.1)$$

где $\psi(t)$ – интерполяционная функция, например, одна из функций семейства корень из приподнятого косинуса. На рис. 2.1 представлена структурная схема формирователя непрерывного импульса $a(t)$, который состоит из трёх частей: дискретный оптимальный импульс b_n , обеспечивающий требуемую долю мощности формирующего сигнала в заданной полосе частот; цифро-аналоговый преобразователь ЦАП и интерполирующий фильтр с импульсной характеристикой $\psi(t)$.

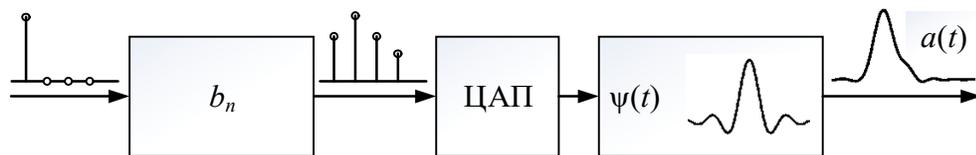


Рис. 2.1. Структурная схема модели формирования импульса $a(t)$

Тогда комплексная огибающая сигнала с МСИ получается в результате линейной фильтрации

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k a(t - kT), \quad (2.2)$$

где C_k – последовательность символов из используемого сигнального созвездия размерностью M_C , $a(t)$ – импульсная характеристика формирующего фильтра, T – длительность тактового интервала.

Значения автокорреляционной функции в отсчётные моменты времени kT непрерывного импульса $a(t)$ можно написать в таком виде

$$g_a[k] = (a * \tilde{a})(kT) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau + kT) a^*(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

где символ «*» обозначает комплексное сопряжение для общего случая, в котором импульс $a(t)$ может быть комплексным; $\tilde{a}(t) = a^*(-t)$.

Нормированный квадрат евклидова расстояния между двумя сигналами $x_1(t)$ и $x_2(t)$, соответствующими двум последовательностям канальных символов $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ можно вычислять по следующей формуле

$$d^2(C^{(1)}, C^{(2)}) = \frac{1}{2E_6} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt = \frac{1}{2E_b} \int_{-\infty}^{+\infty} |(C_k^{(1)} - C_k^{(2)}) * a(t)|^2 dt, \quad (2.4)$$

где $E_6 = \frac{\log_2 M_C}{2E_C}$ – средняя энергия бита символов канального созвездия,

$E_C = \sigma_C^2 = \mathbf{E}\{|C_k|^2\}$ – средний квадрат амплитуды точек сигнального созвездия.

Из формулы (2.4) следует, что нормированный квадрат евклидова расстояния зависит только от разности $C_k^{(1)} - C_k^{(2)}$. Для удобного описания в дальнейшем будем обозначать нормированные ошибочные символы в таком виде:

$$\xi_k = \sqrt{\frac{\log_2 M_C}{2\sigma_C^2}} (C_k^{(1)} - C_k^{(2)}), \quad (2.5)$$

В табл. 2.1 представлены значения нормированных ошибочных символов для сигнальных созвездий 2-РАМ и 4-РАМ

Таблица 2.1. Значения нормированных ошибок для сигнальных созвездий 2-РАМ и 4-РАМ

Созвездие	Возможные C_k	Возможные нормированные ошибки ξ_k
2-РАМ	$\{-1, +1\}$	$\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$
4-РАМ	$\{-3, -1, +1, +3\}$	$\{-\frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\}$

Таким образом, квадрат евклидова расстояния можно переписать в таком виде

$$d^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |(\xi * a)(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_k g_a[n-k] \xi_k^*, \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) следует, что квадрат евклидова расстояния эквивалентен энергии сигнала ошибки:

$$e(t) = (\xi * a)(t) = (\xi * b * \psi)(t), \quad (2.7)$$

Можно доказать, что автокорреляционная функция сигнала ошибки $e(t)$ равна

$$g_e[k] = (e * \tilde{e})(kT) = (g_\xi * g_b * g_\psi)[k], \quad (2.8)$$

С другой стороны, энергия сигнала ошибки равна значению АКФ в момент $kT = 0$, поэтому:

$$d^2(\xi) = g_e[0] = (g_\xi * g_b * g_\psi)[0], \quad (2.9)$$

Если обозначаем $\mu_\xi[k] = (g_\xi * g_\psi)[k]$, с учётом свойства симметрии АКФ любого сигнала, то можно представить (2.9) так:

$$d^2(\xi) = \langle \mu_\xi, g_b \rangle = (\mu_\xi * g_b)[0] = \mu_\xi[0]g_b[0] + 2 \sum_{k=1}^{L-1} \text{Re}\{\mu_\xi^*[k]g_b[k]\}, \quad (2.10)$$

где «Re» – вещественная часть (англ. Real).

В [23] доказано, что верхняя граница Форни для вероятности ошибки $\text{Pr}_{\text{ош}}(E_\delta/N_0)$ равна

$$\text{Pr}_{\text{ош}}(E_\delta / N_0) \leq \sum_{\xi \in \mathbf{\xi}} \omega(\xi) Q \left[\sqrt{\frac{E_\delta}{N_0} d^2(\xi)} \right], \quad (2.11)$$

где $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$; $\mathbf{\xi}$ – множество возможных последовательностей

ошибки, кроме тех, в которых $\xi_k \neq 0$; $\omega(\xi)$ – средняя вероятность появления ошибочной последовательности ξ ; E_b/N_0 – отношение сигнал/шум.

Далее в [23] также доказали, что существуют такие константы K_l и K_u , выполняющие следующее неравенство

$$K_l Q \left(d_{\text{св}} \sqrt{\frac{E_\delta}{N_0}} \right) \leq \text{Pr}_{\text{ош}} \leq K_u Q \left(d_{\text{св}} \sqrt{\frac{E_\delta}{N_0}} \right), \quad (2.12)$$

где $d_{\text{св}}$ – нормированное минимальное евклидово расстояние среди всех возможных, соответствующих различным последовательностям $\xi[k]$, называют свободным евклидовым расстоянием, т.к.

$$d_{\text{св}} = \min_{\xi \in \mathcal{E}} \{d(\xi)\}. \quad (2.13)$$

Из формулы (2.12) следует, что при фиксировании отношения сигнал/шум минимальная вероятность ошибки может быть асимптотически обеспечена с максимальной величиной $d_{\text{св}}$.

Далее рассмотрим ограничение на полосу частот. Понятно, что символы C_k , поступающие на модулятор, выбираются равновероятно из симметричного сигнального созвездия и независимы, тогда можно показать, что энергетический спектр сигнала $x(t)$ имеет вид

$$G_x(f) = \frac{E_c}{T} |F_a(f)|^2, \quad (2.14)$$

где $F_a(f)$ – спектр импульса $a(t)$, вычисленный по формуле

$$F_a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.15)$$

Для вычисления занимаемой полосы частот введём величину концентрации энергии (BEC) сигнала $x(t)$ в полосе частот $[-W/2, W/2]$

$$BEC(W) = \frac{\int_{-W/2}^{W/2} G_x(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df} = \frac{\int_{-W/2}^{W/2} |F_a(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(f)|^2 df}, \quad (2.16)$$

Величину $BEC(W)$ можно рассматривать как энергию сигнала на выходе фильтра с прямоугольной характеристикой полосы частот W , а на вход фильтра поступает сигнал $a(t)$. С таким подходом в [24] доказано, что (2.16) можно переписать в виде скалярного произведения как

$$BCE(W) = \langle \chi_W, \mathbf{g}_b \rangle = \sum_{k=-L+1}^{L-1} \chi_W[k] \mathbf{g}_b[k], \quad (2.17)$$

где $\chi_W[k]$ – импульсная характеристика фильтра, имеющего АЧХ в виде прямоугольника с шириной W , т.е.

$$\chi_W[k] = \int_{-W/2}^{W/2} |\Psi(f)|^2 e^{j2\pi kfT} = \int_{-W/2}^{W/2} T^2 e^{j2\pi kfT} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi kWT)}{\pi k}, & k \neq 0, \\ WT, & k = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Из (2.10) и (2.18) видно, что обе величины квадрата евклидова расстояния $d^2(\xi)$ и концентрации $BEC(W)$ имеют линейную зависимость от АКФ $g_b[k]$, поэтому в оптимизационной задаче вместо самого оптимального импульса b_n будем искать отсчёты АКФ $g_b[k]$. Также в виде ограничения необходимо записать условие существования импульса с искомой АКФ, а именно, энергетический спектр импульса (равный дискретному преобразованию Фурье от АКФ) должен быть положительным во всех точках

$$\langle \rho_f, g_b \rangle = \sum_{k=-L}^L g_b[k] \exp(-j2\pi kfT) \geq 0, \quad (2.19)$$

где $\rho_f = \exp(-j2\pi kfT)$, и условие нормировки энергии импульса, обеспечивающей единственное решение

$$g_a[0] = (g_b * g_\psi)[0] = \langle g_\psi, g_b \rangle = 1, \quad (2.20)$$

Таким образом, исходя из выше упомянутой интерпретации возможно поставить оптимизационную задачу для нахождения отсчётов оптимальной АКФ $g_b[k]$ от оптимального импульса длиной L , позволяющую получить максимальное значение d_{cb}^2 для выбранного типа сигнального созвездия и фиксированной нормированной полосы частот $W_\varepsilon T$, содержащей долю ε энергии сигнала так

$$d_{cb}^2(W) = \max_{x, g_b}(x), \quad (2.21)$$

ограничения:

$$\begin{cases} \langle \mu_\xi, g_b \rangle \geq x, & \text{для всех возможных } \xi \in \mathcal{E}, \\ \langle g_\psi, g_b \rangle = 1, \\ \langle \chi_W, g_b \rangle = \varepsilon, \\ \langle \rho_f, g_b \rangle \geq 0, & \text{для всех } f \in [0, 1), \end{cases} \quad (2.22)$$

Решениями оптимизационной задачи являются отсчёты оптимальной АКФ и максимальное свободное евклидово расстояние. Восстановление отсчётов оптимального импульса из полученной оптимальной АКФ производится при анализе корней полинома $G_b(z)$, который является её z -преобразованием

$$G_b(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_b[k]z^{-k}, \quad (2.23)$$

Полином $G_b(z)$ имеет следующее свойство

$$G_b(z) = G_b(1/z^*), \quad (2.24)$$

т.е. для любого комплексного числа z_0 , являющегося корнем полинома $G_b(z)$, то комплексное число $1/z_0^*$ так же является корнем полинома. Факторизацию полинома $G_b(z)$ можно представить так

$$G_b(z) = B(z)B(1/z^*), \quad (2.25)$$

где $B(z)$ является полиномом, соответствующим z -преобразованию от искомого оптимального импульса b_n . Таким образом, оптимальный импульс находится путём обратного преобразования от $B(z)$.

Недостатком вышесказанной методики нахождения оптимального АКФ является экспоненциальный рост количества ограничений, т.е. вычислительной сложности, с линейным увеличением глубины МСИ (т.е. длины импульса) и с линейным увеличением размера сигнального созвездия. В таких ситуациях решение можно получить путём многократного решения упрощенной задачи, содержащей меньшее количество ограничений.

В системе с использованием модуляции QAM, при приёме можно независимо обрабатывать синфазную и квадратурную составляющие сигнала, что позволяет заметно уменьшить вычислительную сложность алгоритма приёма. Также при этом вместо решения задачи оптимизации импульсов для модуляции QAM становится необходимым решать задачу нахождения оптимальных импульсов для сигнальных созвездий PAM (англ. Pulse Amplitude Modulation, PAM), что также оказывается проще. В [22] представлены примеры решений оптимальных задач для созвездий QAM.

На рис. 2.2 представлены примеры оптимальных импульсов для сигнального созвездия 2-РАМ и соответствующих энергетических спектров.

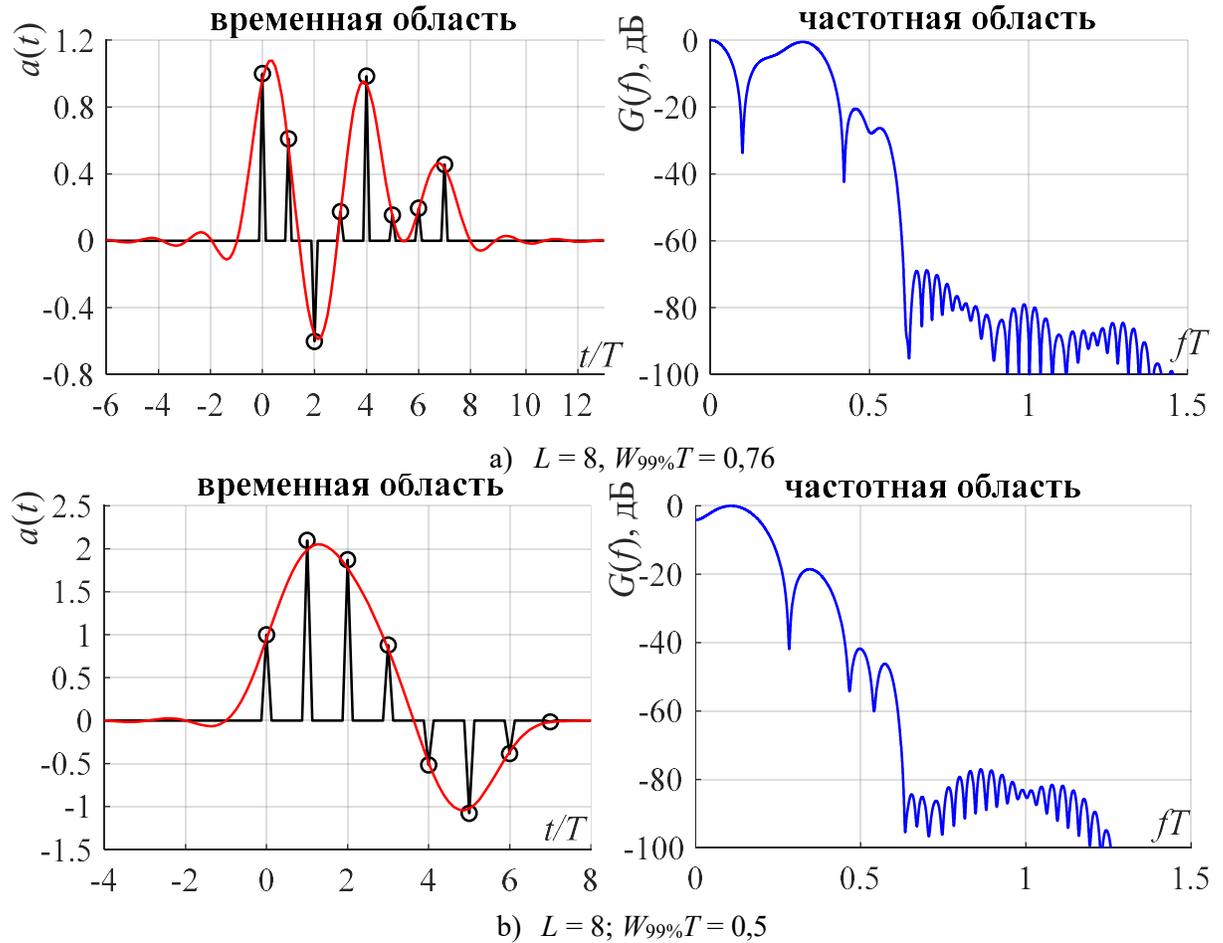


Рис. 2.2. Примеры оптимальных импульсов для сигнального созвездия 2-РАМ

Полученные максимальные значения $d_{\text{св}}^2$ для каждого набора $(W_{99\%}T, L)$ и каждого из созвездий 2-РАМ и 4-РАМ представлены в табл. 2.2.

Для оценки энергетической эффективности сигналов с МСИ, вводим понятие «потери в свободном евклидовом расстоянии» (англ. Free Distance Losses, FDL), рассчитанные по следующей формуле:

$$FDL = 10 \log_{10} \left(\frac{d_{\text{РАМ}}^2}{d_{\text{св}}^2} \right), \quad (2.26)$$

где $d_{\text{РАМ}}^2$ – значения, которые имеют место при использовании ортогональных импульсов; $d_{\text{РАМ}}^2 = 2,0$ и $d_{\text{РАМ}}^2 = 0,8$ для 2-РАМ и 4-РАМ соответственно.

Таблица 2.2. Значения $d_{св}^2$ в зависимости от значений $W_{99\%}T$, L и от типа созвездия

Созвездие 2-РАМ					Созвездие 4-РАМ				
$W_{99\%}T \backslash L$	4	8	12	14	$W_{99\%}T \backslash L$	4	8	12	14
0,76	1,902	2,0	2,0	2,0	0,76	0,761	0,80	0,80	0,80
0,72	1,533	1,770	1,986	2,0	0,72	0,613	0,70	0,794	0,80
0,68	1,345	1,543	1,716	1,758	0,68	0,538	0,617	0,686	0,702
0,64	1,232	1,405	1,513	1,549	0,64	0,438	0,562	0,601	0,612
0,60	1,054	1,280	1,366	1,389	0,60	0,353	0,482	0,537	0,548
0,56	0,934	1,183	1,229	1,274	0,56	0,299	0,381	0,479	0,495
0,52	0,832	0,969	1,121	1,137	0,52	0,230	0,322	0,348	0,380
0,48	-	0,850	0,926	0,980	0,48	-	0,274	0,290	0,312
0,44	-	0,779	0,785	0,807	0,44	-	0,256	0,260	0,261
0,40	-	0,637	0,665	0,709	0,40	-	0,20	0,237	0,242
0,36	-	0,457	0,557	0,572	0,36	-	0,140	0,192	0,190
0,32	-	0,333	0,452	0,461	0,32	-	0,110	0,150	0,161
0,28	-	0,250	0,311	0,340	0,28	-	0,079	0,098	0,112
0,24	-	-	0,206	0,238	0,24	-	-	0,078	0,085
0,20	-	-	0,149	0,152	0,20	-	-	0,060	0,061
0,16	-	-	-	0,090	0,16	-	-	-	0,033

На рис. 2.3 и рис. 2.4 показаны характеристики полученных оптимальных импульсов для созвездий 2-РАМ и 4-РАМ с глубиной МСИ $L = 4; 8; 12; 14$. Из анализа представленных на рис. 2.3 и рис. 2.4 кривых следует, что для обоих типов созвездий наблюдаются одинаковые тенденции: при использовании сигналов с оптимальными импульсами есть возможность уменьшения нормированной полосы частот $W_{99\%}T$ до значения (0,83 для $L = 4$; 0,8 для $L = 8$; 0,76 для $L = 12; 14$) без потерь в свободном евклидовом расстоянии по сравнению с ис-

пользованием ортогональных импульсов. Увеличение глубины МСИ L приводит, во-первых, к уменьшению минимальных возможных значений полосы $W_{99\%}T$, во-вторых, к всё меньшему дополнительному выигрышу (в качестве выигрыша может быть рассмотрено либо уменьшение полосы $W_{99\%}T$ при фиксированном значении FDL , либо уменьшение FDL при фиксированном значении полосы $W_{99\%}T$); более того характеристики для $L = 12$ и для $L = 14$ практически не отличаются.

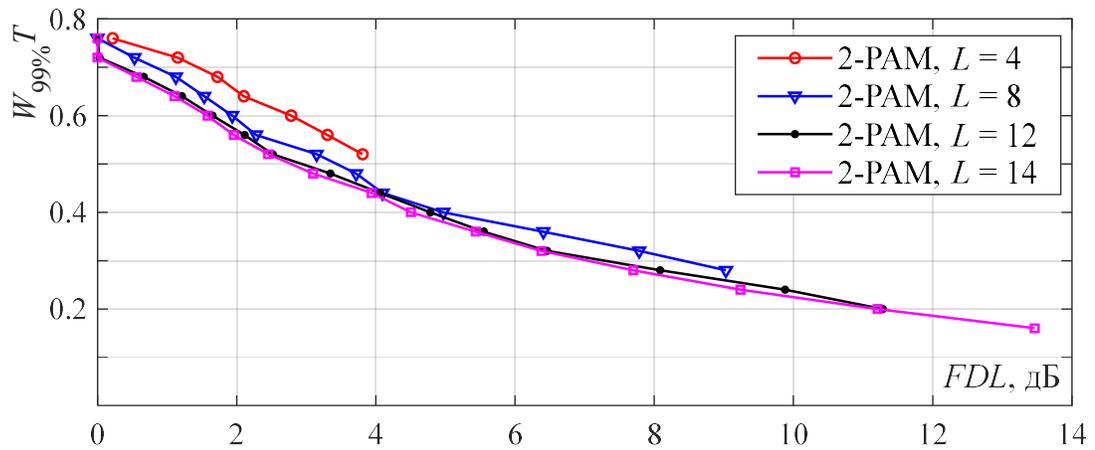


Рис. 2.3. Потери в свободном евклидовом расстоянии в зависимости от нормированной полосы частот для созвездия 2-РАМ

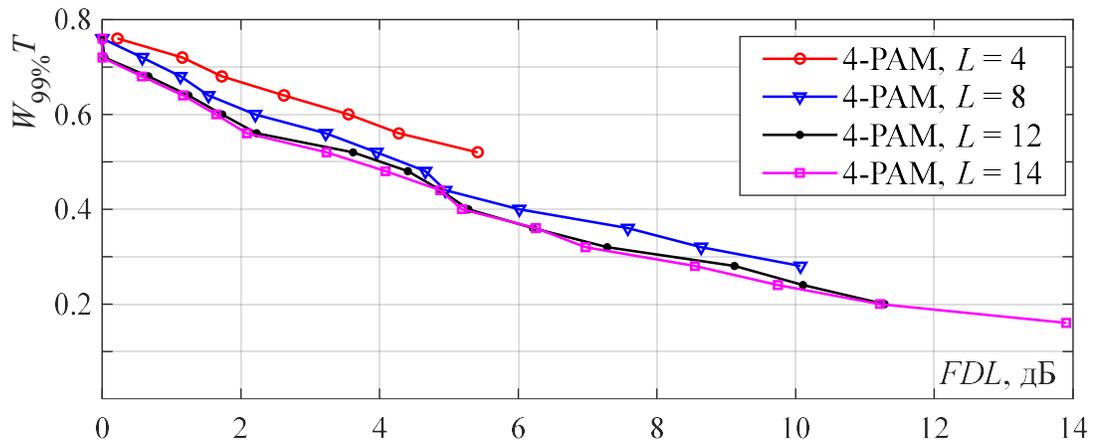


Рис. 2.4. Потери в свободном евклидовом расстоянии в зависимости от нормированной полосы частот для созвездия 4-РАМ

2.2. Нелинейные задачи

Как описано в предыдущем разделе, в качестве оптимизационной задачи рассматриваются отсчёты импульса $a(t)$ и сигнал, длительность импульса которых превосходит длительность T передачи одного символа канального алфавита в целое число L . В этом случае удобно представить такой одночастотный сигнал с МСИ в виде суммы L одночастотных сигналов – компонент, передаваемых на одной частоте одновременно. Формула l -й компоненты многокомпонентного сигнала может быть представлена в виде [25]:

$$x_{L,K}^{(l)}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{\sqrt{L}} C_k^{(l)} a\left(\frac{t - \Delta t_l - kLT}{L}\right), \quad (2.27)$$

$$-LT/2 \leq t \leq -LT/2 + KLT + \max\{\Delta t_l\},$$

где $a(t)$ – финитный импульс на интервале $[-T/2, T/2]$; K – число канальных символов, передаваемых в n -й компоненте; T – период следования канальных символов в многокомпонентном сигнале; Δt_l – величина задержки начала первого по порядку следования тактового интервала l -й компоненты относительно момента времени $t = -LT/2$; $C_l^{(k)} = A_l^{(k)} \exp(j\varphi_l^{(k)})$ – k -й символ по порядку следования символов канального алфавита l -й компоненты, выбранный из сигнального созвездия с размером M_C и $A_l^{(k)}$, $\varphi_l^{(k)}$ – амплитуда и фаза соответственно; константа $1/\sqrt{L}$ обеспечивает независимость энергии импульса от количества компонент – это будет необходимо при решении оптимизационной задачи. Тогда многокомпонентный сигнал, состоящий из L компонент, представляется суммой своих компонент [25]

$$x_{L,K}(t) = \sum_{l=1}^L x_{L,K}^{(l)}(t), \quad (2.28)$$

На рис. 2.6 (а) представлены синфазные низкочастотные составляющие двух компонент ($L = 2$) $x_{2,5}^{(1)}(t)$ и $x_{2,5}^{(2)}(t)$ для случая сигнального созвездия 4-PM в каждой компоненте и усечённого sinc-импульса $a(t) = A_0 \sin(2\pi t/T)/(2\pi t/T)$ (рис. 2.5) на интервале $[-T/2, T/2]$, при этом $\Delta t_1 = 0$, $\Delta t_2 = T$. Каждая компонента

переносит 5 символов канального алфавита. На рис. 2.6 (б) представлена синфазная низкочастотная составляющая суммарного двухкомпонентного сигнала $x_{2,5}(t) = x_{2,5}^{(1)}(t) + x_{2,5}^{(2)}(t)$. Все сигналы нормированы относительно своих максимальных значений.

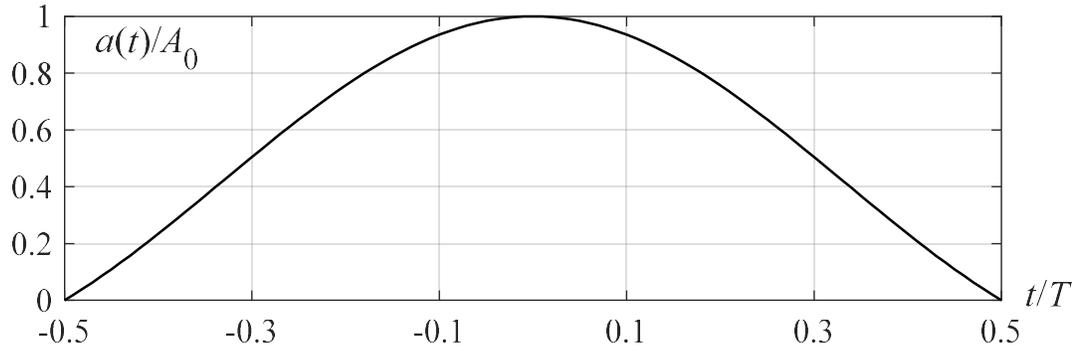


Рис. 2.5. Усечённый sinc-импульс $\sin(x)/x$

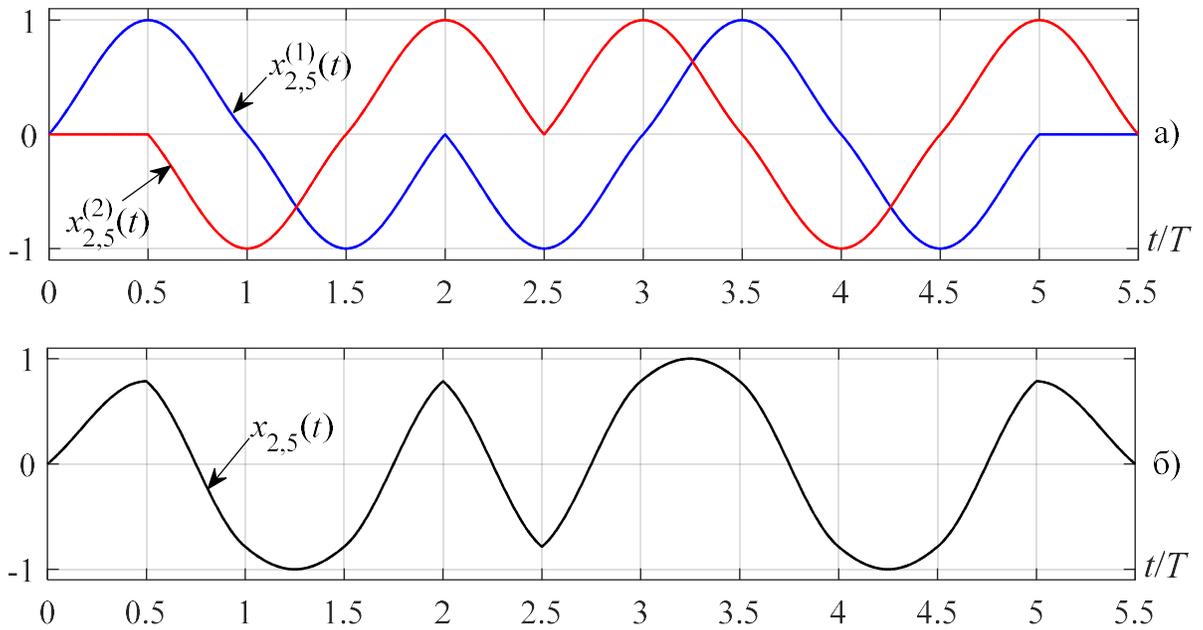


Рис. 2.6. Пример синфазных низкочастотных составляющих двух компонент (а) и двухкомпонентного сигнала (б) для sinc-импульсов $a(t) = A_0 \sin(2\pi t/T)/(2\pi t/T)$

Если каждая компонента многокомпонентного сигнала передается на одной частоте, то формула (2.27) может быть переписана в таком виде [25]

$$x_{L,K}^{(l)}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{\sqrt{L}} C_k^l a\left(\frac{t - \Delta t_l - kLT}{L}\right) \exp(j2\pi \Delta f_l t), \quad (2.29)$$

где Δf_l – частота отстройки l -й компоненты.

В случае частоты отстройки l -й компоненты $\Delta f_l = (1 - L/2)/(LT)$ и сдвига начал тактовых интервалов разных компонент $\Delta t_l = 0$, импульс $a(t)$ имеет вид как представлен в (1.2), а многокомпонентный сигнал совпадает с сигналом OFDM. Таким образом можно считать, что OFDM является частным случаем многокомпонентного сигнала.

В дальнейшем при рассмотрении оптимизационной задачи, многокомпонентный сигнал является одночастотным с частотой отстройки для любой компоненты $\Delta f_l = 0$ и равномерным шагом сдвига компонент $\Delta t_l = (l - 1)T$.

Согласно с [25], энергетический спектр многокомпонентных сигналов представляется в таком виде

$$G(f) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{KLT + (L - 1)T} \mathbf{E} \left\{ \left| \sum_{l=1}^L S_{L,K}^{(l)}(f) \right|^2 \right\}, \quad (2.30)$$

где $S_{L,K}^{(l)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{L,K}^{(l)}(t) \exp(-j2\pi ft) dt$ – спектр усечённой K -элементной реализации l -й компоненты L -компонентного сигнала.

Энергетический спектр многокомпонентных сигналов определяется лишь видом импульса $a(t)$, числом компонент и постоянным коэффициентом Z , зависящим только от формы сигнальных созвездий компонент:

$$G(f) = \frac{NZ}{T} |F_a(Lf)|^2, \quad (2.31)$$

где

$$\sqrt{L} F_a(Lf) = \int_{-LT/2}^{LT/2} \frac{1}{\sqrt{L}} a(t/L) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad (2.32)$$

есть спектр импульса $a(t/L)/\sqrt{L}$ для L -компонентного сигнала и

$$Z = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M A_m^2, \quad (2.33)$$

Пик-фактор многокомпонентных сигналов определяется отношением пиковой мощности к средней [25]

$$P = \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{ср}}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\max \left\{ |x_{L,K}^2(t)| \right\}}{\mathbf{E} \left\{ \frac{1}{KLT + (L-1)T} \int_{-LT/2}^{-LT/2+KLT+(L-1)T} |x_{L,K}^2(t)| dt \right\}}, \quad (2.34)$$

где поиск максимума в числителе производится по всем возможным реализациям $x_{L,K}(t)$ и для всех моментов времени t , а усреднение в знаменателе – по всем возможным реализациям $x_{L,K}(t)$. Пиковая мощность вычисляется в соответствии с формулой [25]

$$P_{\text{п}} = \max \left\{ |x_{L,K}^2(t)| \right\} = \max \left\{ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \sum_{j=0}^L C^{(i)} C^{*(j)} a \left(\frac{t - \Delta t_i}{L} \right) a^* \left(\frac{t - \Delta t_j}{L} \right) \right\}, \quad (2.35)$$

где поиск максимума производится при варьировании не только значения $t \in [(LT - T)/2, LT/2]$, но и значений $C^{(i)}, C^{(j)}$.

Для определения степени МСИ в многокомпонентных сигналах, введём в рассмотрение коэффициенты парциальной и групповой корреляции. Коэффициент парциальной корреляции (англ. Partial Correlation Coefficient) $KP_{q,p}^{(i,j)}$ – это значение нормированного коэффициента корреляции сигнала q -го тактового интервала i -й компоненты и сигнала p -го тактового интервала j -й компоненты [25]

$$KP_{q,p}^{(i,j)} = \frac{2}{E_a} \int_{-LT/2}^{-LT/2+KLT+(L-1)T} \left\{ C_q^{(i)} a_i^{(q)}(t, L) \right\} \left\{ C_p^{*(j)} a_j^{(p)}(t, L) \right\} dt, \quad (2.36)$$

где E_a – энергия импульса $a(t)$; $a_i^{(q)}(t, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} a \left(\frac{t - \Delta t_i - kLT}{L} \right)$.

Отметим, что коэффициент парциальной корреляции характеризует степень интерференции между отдельными компонентами многокомпонентного сигнала. Однако, важной характеристикой является степень интерференции между одной компонентой и всеми остальными. Максимальный коэффициент групповой корреляции (англ. Maximum Group Correlation Coefficient) MGC :

$$MGC = \max(GC_q^i), \quad (2.37)$$

где $GC_q^{(i)}$ – значение коэффициента групповой корреляции сигнала q -го тактового интервала i -й компоненты со всеми остальными компонентами

$$GC_q^{(i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \sum_{p=0}^{K-1} PC_{q,p}^{(i,j)}, \quad (2.38)$$

Аналогично сигналам с частичным откликом с известным значением коэффициентов парциальной корреляции для любой последовательности ошибочных символов многокомпонентного сигнала $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{L-1})$ квадрат евклидова расстояния вычисляется так

$$d^2(\xi) = g_\xi[0] + 2 \sum_{k=1}^{L-1} \operatorname{Re} \left\{ g_\xi^*[k] PC_{1,1}^{(1,k+1)} / E_a \right\}, \quad (2.39)$$

где $g_\xi[k]$ – АКФ последовательности ошибочных символов.

Более подробные описания, связанные с энергетическим спектром, пик-фактором, и корреляционными свойствами многокомпонентных сигналов представлены в [25].

В данной работе рассмотрим оптимальные задачи для многокомпонентных сигналов в связи с нахождением оптимальных импульсов $a(t)$, критериями которых являются концентрация энергии в заданной полосе частот или внеполосные излучения. Понятно, что аналитическое решение невозможно, поэтому предлагалось искать оптимальную форму импульса $a(t)$ в виде усеченного ряда Фурье численным методом.

$$a(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{l=1}^{L-1} \left(c_l \cos\left(\frac{2\pi}{T} lt\right) + s_l \sin\left(\frac{2\pi}{T} lt\right) \right), \quad (2.40)$$

где $(2L - 1)$ – число учитываемых членов разложения в усечённого ряда Фурье, т.е. число искомым коэффициентов. В этом случае необходимо произвести преобразование рассмотренных выше характеристик с МСИ. Энергия импульса вычислена согласно формуле

$$E_a = \frac{T}{2} \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{l=1}^{L-1} (c_l^2 + s_l^2) \right), \quad (2.41)$$

Тогда возможна постановка оптимизационной задачи для нахождения конечного оптимального импульса по критерию максимизации концентрации энергии сигнала в заданной полосе частот. Это значит при выбранных значениях

полосы частот W отыскиваются импульсы, которые обеспечивают максимальную концентрацию энергии:

$$BEC(W) = \frac{1}{P_{cp}} \int_{-W/2}^{W/2} G(f, a(t)) df, \quad (2.42)$$

при наличии дополнительных ограничений на

- уровень МСИ, т.е. максимальный коэффициент групповой корреляции κ

$$MGC \leq \kappa, \quad (2.43)$$

- квадрат свободного евклидова расстояния d_{cb}^2

$$d^2(\xi) \geq d_{cb}^2, \quad (2.44)$$

- Пик-фактор ρ

$$P \leq \rho, \quad (2.45)$$

Для получения результата без зависимости от значения T в качестве параметра необходимо рассматривать безразмерную величину WT . Однако для многокомпонентных сигналов еще удобнее будет перейти к безразмерной величине LWT .

Для обеспечения единственности решения необходимо ввести ограничение энергии:

$$E_a = 1, \quad (2.46)$$

На рис. 2.7 представлены примеры оптимальных многокомпонентных импульсов с ограничением пик-фактора, на рис. 2.8 – с ограничением свободного евклидова расстояния, а на рис. 2.9 – с ограничением максимального значения максимального коэффициента групповой корреляции MGC , во всех случаях количество компонентов $L = 8$. Из рис. 2.7 можно видеть, что снижение значения пик-фактора приводит к фактическому уменьшению количества компонент L . Например, при $\rho = 4,8$ фактическое количество компонент $L = 3$, т.к. $a(t) \approx 0$ при $|t| > 0,3$; а при $\rho \leq 4$ сигналы превращаются в двухкомпонентные. При стремлении значения ρ к 2, форма импульса стремительно становится прямоугольной.

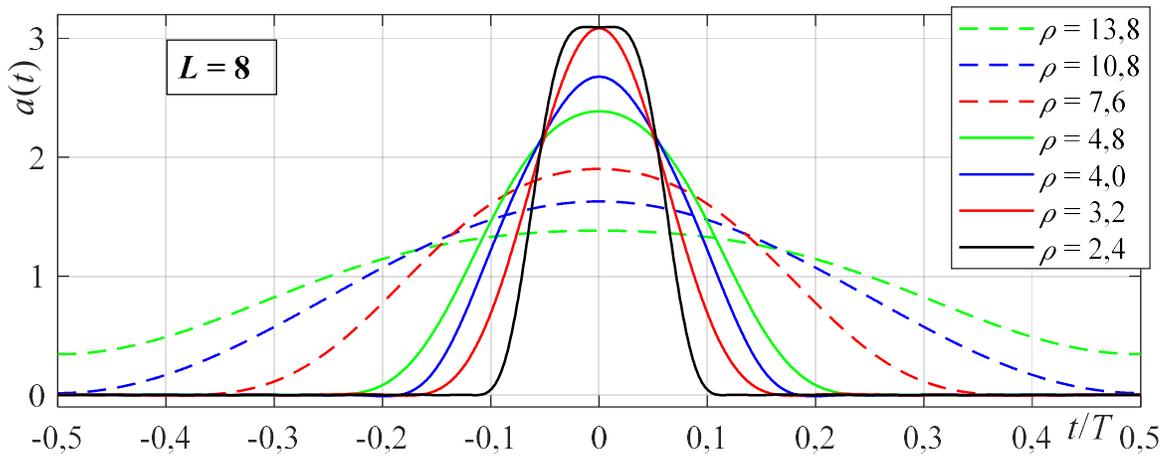


Рис. 2.7. Примеры импульсов в зависимости от значения пик-фактора для $L = 8$

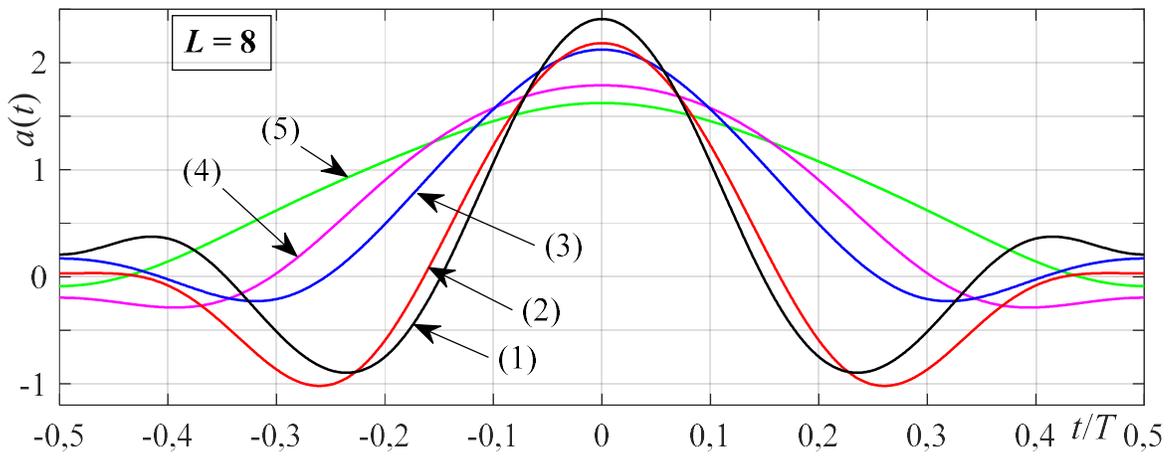


Рис. 2.8. Примеры импульсов в зависимости от значения d^2_{cb} для $L = 8$: (1) – (5) соответствуют $d^2_{cb} = 2,0; 1,6; 1,2; 0,8; 0,4$.

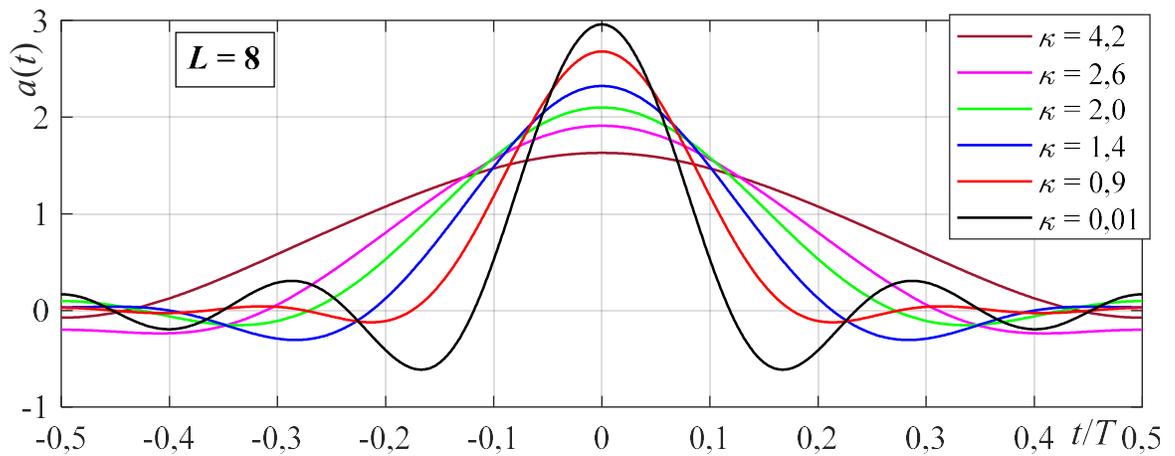


Рис 2.9. Примеры импульсов в зависимости от значения MGC для $L = 8$

На рис. 2.10 изображены энергетические спектры восьмикомпонентных сигналов при ограничении на квадрат свободного евклидова расстояния $d_{\text{св}}^2 = 2; 1,2; 0,2$, форма импульса которых представлены на рис. 2.8. Из анализа рисунка видно, что уменьшение значения $d_{\text{св}}^2$ приводит, во-первых, к уменьшению нормированной полосы частот, во-вторых, к снижению уровней внеполосных излучений.

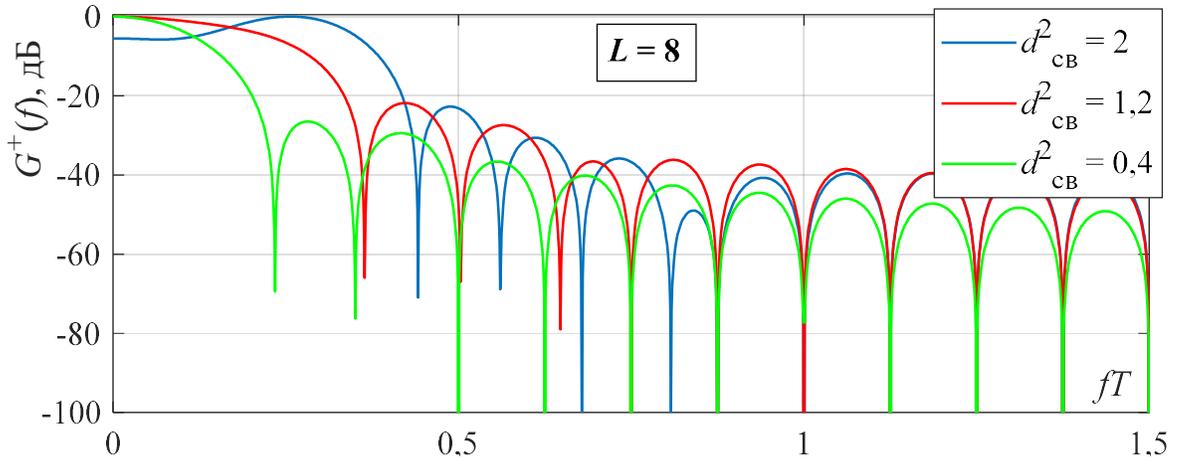


Рис. 2.10. Энергетические спектры многокомпонентных сигналов для $L = 8$ при ограничении $d_{\text{св}}^2 = 2; 1,2; 0,2$.

Выводы по главе 2

В данной главе рассмотрены методы синтеза оптимального импульса для сигналов с частичным откликом, и также для многокомпонентных сигналов. Для сигналов с частичным откликом была разработана оптимизационная задача с критерием максимизации квадрата свободного евклидова расстояния. Были рассмотрены дополнительные ограничения – нужная концентрация энергии сигналов в заданной полосе частот, единичная энергия импульса и также условие существования импульса с искомой АКФ. Решением оптимизационной задачи являются отсчёты АКФ. Затем производится восстановление оптимального импульса с помощью анализа полинома, который является z-преобразованием АКФ. Анализ полученных результатов показал, что при использовании сигналов

с оптимальными импульсами есть возможность уменьшения нормированной полосы частот $W_{99\%}T$ без потерь в свободном евклидовом расстоянии по сравнению с использованием ортогональных импульсов. Увеличение глубины МСИ L приводит, во-первых, к уменьшению минимальных возможных значений полосы $W_{99\%}T$, во-вторых, к всё меньшему дополнительному выигрышу, более того характеристики для $L = 12$ и для $L = 14$ практически не отличаются. Для многокомпонентных сигналов была рассмотрена оптимизационная задача с критерием возможной минимальной полосы частот. Были рассмотрены дополнительные ограничения: свободное евклидово расстояние, пик-фактор, коэффициент групповой корреляции GP .

Результаты синтеза оптимальных финитных импульсов для многокомпонентных сигналов, синтеза оптимальных импульсов для сигналов PRS, а также результаты расчёта кривых помехоустойчивости для сигналов с оптимальными импульсами представлены в следующих публикациях.

1. Gorlov, A. Root-raised cosine versus optimal finite pulses for Faster-than-Nyquist generation / A. Gelgor, Van Phe Nguyen // Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and systems. – 2016. Springer International Publishing. – pp 628-640.

2. Горлов, А.И. Использование оптимальных финитных импульсов как способ наилучшего введения управляемой межсимвольной интерференции / Гельгор А.Л, Ван Фе Нгуен // Радиотехника. – 2016. – №12, – С. 112-120.

3. Гельгор, А.Л. Сравнение эффективности сигналов Faster-than-Nyquist и оптимальных многокомпонентных сигналов / Горлов А.И, Ван Фе Нгуен // 19-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2017», Т1, с. 101-106, Москва, 2017 г.

4. Van Phe Nguyen. An intentional introduction of ISI combined with signal constellation size increase for extra gain in bandwidth efficiency / A. Gorlov, A. Gelgor // Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. – 2017. Springer International Publishing. – pp 644-652.

5. Нгуен Ван Фе. Достижение максимальной спектральной эффективности путём одновременного увеличения размера сигнального созвездия и введения управляемой межсимвольной интерференции / Горлов А.И, Гельгор А.Л // Радиотехника. – 2018. – №1, – С. 42-48.

6. Нгуен Ван Фе. Повышение спектральной эффективности сигналов с управляемой МСИ путём увеличения размера сигнального созвездия / Горлов А.И, Гельгор А.Л // 20-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2018», Т1, с. 101-106, Москва, 2018 г.

Глава 3. Алгоритмы приема сигналов с МСИ

В этой главе рассмотрены алгоритмы приёма сигналов с МСИ. При использовании импульса a_l , заданного L дискретными отсчётами, каждый отсчёт x_k формируемого сигнала представляет собой линейную комбинацию переданного символа, соответствующего текущему тактовому интервалу, и $L - 1$ предыдущих символов

$$x_k = C_k a_0 + \sum_{l=1}^{L-1} C_k a_l, \quad (3.1)$$

Таким образом, на каждом тактовом интервале выходной отсчёт сигнала x_k зависит от текущего символа C_k , а также от $L - 1$ предыдущих символов C_{k-1} , C_{k-2} , ..., C_{k-L+1} . Если сигнал проходит через канал с аддитивным гауссовским белым шумом, то каждый отсчёт принятого сигнала можно записать так

$$y_k = \mu x_k + n_k, \quad (3.2)$$

где μ – коэффициент затухания сигнала в канале; n_k – отсчёт аддитивного гауссовского белого шума.

3.1. Алгоритм Витерби

Алгоритм Витерби [26], реализующий оптимальный приём по критерию максимального правдоподобия ансамбля символов C_k (англ. Maximum Likelihood Sequence Estimation – MLSE), был предложен в 1967 году для декодирования свёрточных кодов. Формирование сигнала на нескольких тактовых интервалах, выраженное по формуле (3.1), удобно интерпретируется с привлечением сдвигового L -элементного регистра FIFO (англ. First In First Out), эквивалентного процедуре формирования свёрточных кодов. Пример такого формирователя представлен на рис. 3.1. Из анализа рисунка видно, что отсчёт сигнала x_k в момент kT определяется текущим переданным символом C_k и текущим состоянием регистра. Всего возможно $N_S = M_C^{L-1}$ состояний регистра с номерами $i = 0, \dots, M_C^{L-1}$. Для удобства состояние регистра на тактовом интервале kT будем обозначать

$S_k^{(i)}$, соответствующее переданному символу C_k и формируемому отсчёту сигнала x_k .

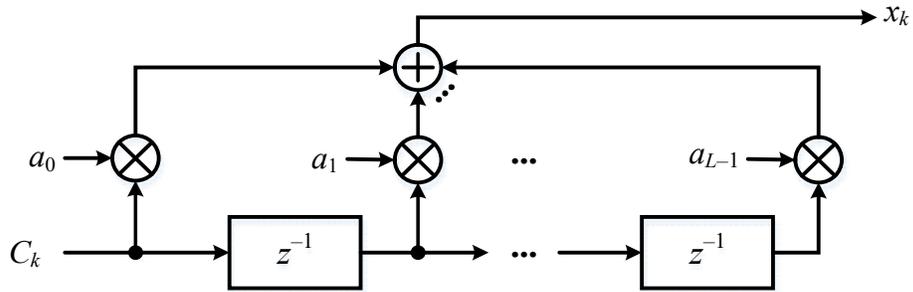


Рис. 3.1. Структурная диаграмма сдвигового L -элементного регистра FIFO (z^{-1} – задержка на тактовый интервал T)

Поведение регистра удобно описать решёткой состояния, которая содержит два столбца $2M_C^{L-1}$ узлов: левый для текущего состояния регистра на текущем тактовом времени kT , правый для последующего $(k+1)T$. Из каждого текущего узла выходят M_C рёбер, и в каждое состояние на последующем тактовом интервале входят столько же рёбер. На рис. 3.2 представлен пример решётки для $L = 3$ и $M_C = 2$. В этом примере количество узлов в каждом столбце равно 4, а возможные модуляционные $C = \{0, 1\}$.

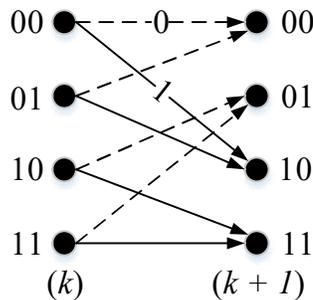


Рис. 3.2. Решётка состояния регистра для $L = 3$, $M_C = 2$

Для удобного представления процесса формирования сигнала предлагаем решётчатую диаграмму, пример которой представлен на рис. 3.3. Эта диаграмма соответствует примеру на рис. 3.2. Регистр первоначально находился в определённом состоянии (обычно в нулевом состоянии (00), как в этом примере). Далее на вход регистра поступила последовательность модуляционных символов (0, 1,

0, 1, 1, ...). Путь из сплошных жирных стрелок соответствует поступившей последовательности модуляционных символов, остальные пути в решётчатой диаграмме соответствуют всем возможным последовательностям. Обратим внимание, что при поступлении на вход регистра последовательности K символов, количество возможных путей в решётчатой диаграмме вычисляется по закону $(K + L - 1)M_C^{L-1}$.

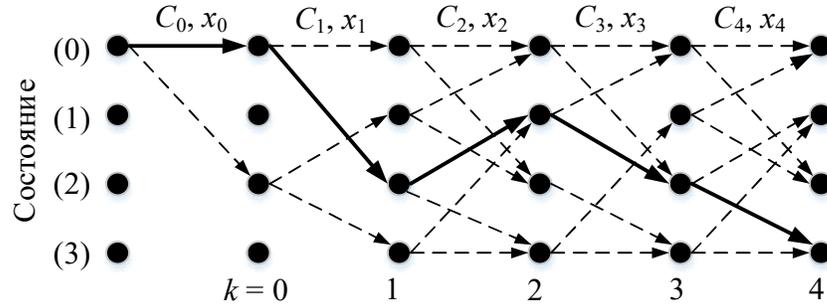


Рис. 3.3. Решётчатая диаграмма для $L = 3, M_C = 2$.

На основе последовательности принятых отсчётов y_k , которые представляют собой зашумленные значения x_k , для каждого пути в решётке может быть вычислена метрика – евклидово расстояние между принятой и эталонной последовательностями. Алгоритм Витерби позволяет вычислить оценки \tilde{C}_k для передаваемых символов по критерию минимального евклидова расстояния между последовательностями

$$\min_n \left(\sum_{k=0}^{K+L-2} (x_k^{(n)} - y_k)^2 \right), \quad (3.3)$$

где n – индекс пути в решётке. $n = 0, 1, \dots, (K - 1)M_C^{L-1}$.

Как отмечено выше, увеличение длины последовательности переданных символов приводит к увеличению количества путей в решётке. Но некоторыми из них можно пренебречь при декодировании. На рис. 3.4 представлено дерево переходов состояний в решётке для первых L тактовых интервалов, соответствующее примеру на рис. 3.3. Из рисунка видно, что на тактовом интервале $k = 2T$, в решётке существуют 8 путей. При этом для каждого состояния, необходимо сохранить только один путь с наилучшей метрикой, называемый выжившей. На

рис. 3.4, пути отмеченные красным цветом удалены из памяти. Таким образом, количество сохраняемых путей с тактового времени $k \geq (L - 1)T$ равно количеству состояний в решётке.

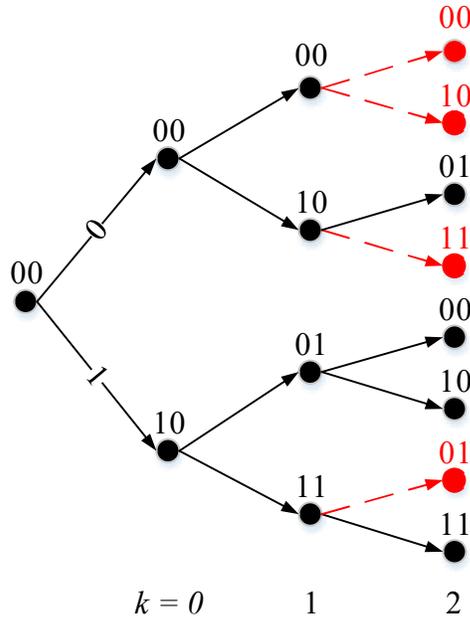


Рис 3.4. Дерево переходов состояний для $L = 3$, $M_C = 2$

Вычислительная сложность алгоритмов Витерби растёт экспоненциально с ростом количества отсчётов импульса L как $O((L - 1)M_C^{L-1})$. Таким образом, уже при небольших значениях L для размера созвездия $M_C > 2$ практическая реализация алгоритма Витерби может привести к большим вычислительным затратам.

3.2. Алгоритм BCJR

Алгоритм BCJR получил своё название по первым буквам фамилий авторов (Bahl, Cocke, Jelinek, Raviv). Он впервые был предложен в 1974 году для декодирования последовательностей, кодированных свёрточным кодом [27]. Данный алгоритм основан на теории анализа марковских последовательностей, и в качестве критерия используется критерий максимума апостериорной вероятности MAP (англ. Maximum A-posteriori Probability) каждого символа C_k .

Свяжем переходы регистра из i -ого состояния в j -е на последовательных тактовых интервалах условными вероятностями

$$p_k(j/i) = \Pr\{S_k = j | S_{k-1} = i\}, \quad (3.4)$$

также с помощью условной последовательности опишем появления тех или иных форм сигнала

$$q_k(x|i, j) = \Pr\{x_k = x | S_{k-1} = j, S_k = i\}, \quad (3.5)$$

Фактически мы описали марковский источник. При формировании сигнала марковский источник стартует из некоего состояния, формирует последовательность отсчетов сигнала $\mathbf{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_{K-1}\}$ и заканчивает также в этом состоянии. Формирующий сигнал \mathbf{x} поступает в канал связи АБГШ, где он преобразуется в сигнал $\mathbf{Y} = \{y_0, y_1, \dots, y_{K-1}\}$.

На рис. 3.5 представлен пример решётчатой диаграммы формирования сигналов. Для простоты берём $L = 3$, соответствующее количеству возможных состояний регистра $N_s = 2^{L-1} = 4$, которые нумеруются с нуля до четырёх. Модуляционный символ принимает значения 0 или 1. В решётке, верхнее ребро, уходящее из любого состояния, соответствует переданному символу $C_k = 0$, а нижнее ребро – $C_k = 1$. Переданные символы $\mathbf{C} = \{C_0, \dots, C_4, C_5 = 0, C_6 = 0\}$ соответствуют формирующим отсчётам сигнала $\mathbf{X} = \{x_0, \dots, x_6\}$. Терминальные символы $C_5 = 0, C_6 = 0$ обеспечивают, чтобы регистр имел нулевое состояние при окончании передачи, как и в начале.

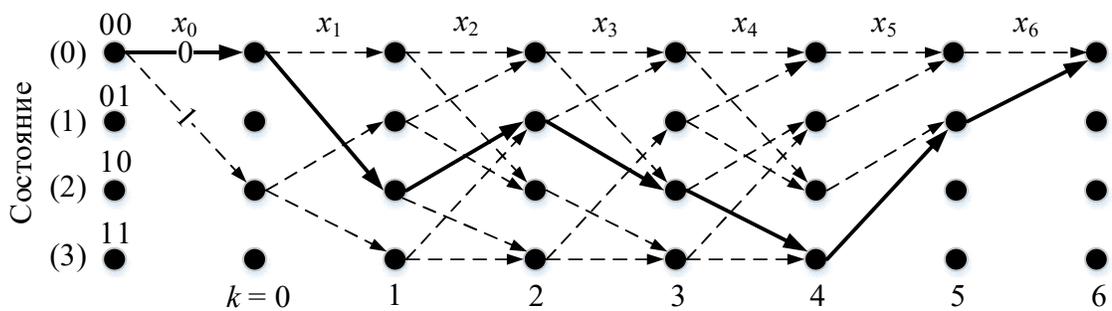


Рис. 3.5. Решётчатая диаграмма формирования сигналов

В алгоритме BCJR требуется путём анализа принятого сигнала \mathbf{y} оценить апостериорные вероятности состояний регистра

$$\Pr\{S_k = j | \mathbf{Y}\} = \Pr\{S_k = j; \mathbf{Y}\} / \Pr\{\mathbf{Y}\}, \quad (3.6)$$

Апостериорные вероятности переходов между последовательными состояниями регистра

$$\Pr\{S_{k-1} = i; S_k = j | \mathbf{Y}\} = \Pr\{S_{k-1} = i; S_k = j; \mathbf{Y}\} / \Pr\{\mathbf{Y}\}, \quad (3.7)$$

Для удобства введём некоторые обозначения:

$$\alpha_k(i) = \Pr\{S_k = i; \mathbf{Y}_0^k\},$$

$$\beta_k(j) = \Pr\{\mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} | S_k = j\},$$

$$\gamma_k(i, j) = \Pr\{S_k = j; y_k | S_{k-1} = i\},$$

где $\mathbf{Y}_0^k = [y_0, y_1, \dots, y_k]^T$ – массив-столбец первых k отсчётов принятого сигнала; $\mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} = [y_k, \dots, y_{K-1}]^T$ – массив-столбец последних $K - k$ отсчётов принятого сигнала.

Каждая апостериорная вероятность i -го состояния на тактовом интервале kT вычисляется в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \lambda_k(j) &= \Pr\{S_k = j; \mathbf{Y}\} = \Pr\{S_k = j; \mathbf{Y}_0^k; \mathbf{Y}_{k+1}^{K-1}\} \\ &= \Pr\{S_k = j; \mathbf{Y}_0^k\} \Pr\{\mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} | S_k = j; \mathbf{Y}_0^k\} \end{aligned}$$

Из свойств марковского источника следует, что состояние S_k известно, тогда значения сигнала на входе демодулятора в следующих тактовых интервалах \mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} не зависят от значений сигнала на предыдущих тактовых интервалах \mathbf{Y}_0^k . Иначе говоря,

$$\Pr\{\mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} | S_k = j; \mathbf{Y}_0^k\} = \Pr\{\mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} | S_k = j\}$$

Следовательно, окончательно для $\lambda_k(j)$ получаем

$$\lambda_k(j) = \Pr\{S_k = j; \mathbf{Y}_0^k\} \Pr\{\mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} | S_k = j\} = \alpha_k(j) \beta_k(j), \quad (3.8)$$

и каждая апостериорная вероятность перехода от i -го состояния на тактовом интервале $(k-1)T$ в j -е состояние на тактовом интервале kT вычисляется следующим образом

$$\begin{aligned}
\sigma_k(i, j) &= \Pr\{S_{k-1} = i; S_k = j; \mathbf{Y}\} \\
&= \Pr\{S_{k-1} = i; S_k = j; \mathbf{Y}_0^{k-1}; y_k; \mathbf{Y}_{k+1}^{K-1}\} \\
&= \Pr\{S_{k-1} = i; \mathbf{Y}_0^{k-1}\} \Pr\{S_k = j; y_k; \mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} \mid S_{k-1} = i; \mathbf{Y}_0^{k-1}\} \\
&= \Pr\{S_{k-1} = i; \mathbf{Y}_0^{k-1}\} \Pr\{S_k = j; y_k \mid S_{k-1} = i\} \Pr\{\mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} \mid S_k = j; y_k; S_{k-1} = i\}
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\sigma_k(i, j) = \alpha_{k-1}(i) \gamma_k(i, j) \beta_k(j), \quad (3.9)$$

Итак, удалось выразить искомые значения $\lambda_k(j)$ и $\sigma_k(i, j)$ через переменные $\alpha_{k-1}(i)$, $\beta_k(j)$ и $\gamma_k(i, j)$. Значение $\alpha_{k-1}(i)$ является внутренним параметром алгоритма и вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\alpha_{k-1}(i) &= \sum_l \Pr\{S_{k-2} = l; S_{k-1} = i; \mathbf{Y}_0^{k-1}\} \\
&= \sum_l \Pr\{S_{k-2} = l; S_{k-1} = i; \mathbf{Y}_0^{k-2}; y_{k-1}\} \\
&= \sum_l \Pr\{S_{k-2} = l; \mathbf{Y}_0^{k-2}\} \Pr\{S_{k-1} = i; y_{k-1} \mid S_{k-2} = l; \mathbf{Y}_0^{k-2}\}
\end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\alpha_{k-1}(i) = \sum_l \alpha_{k-2}(l) \gamma_{k-1}(l, i), \quad (3.10)$$

где суммирование производится по всем таким состояниям l , из которых возможен переход в состояние i (сумма по красным ребрам на рис. 3.6). Очевидно, что значение α вычисляется по рекурсии, которая называется прямой. Пример такой прямой рекурсии представлен на рис. 3.6.

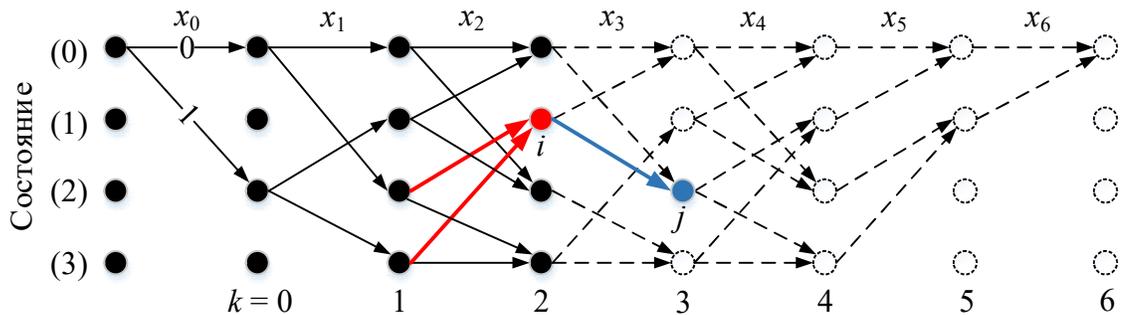


Рис. 3.6. Прямая рекурсия алгоритма BCJR

При $k = 0$, значения α известны, т.к. регистр стартует из нулевого состояния, значит

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1, \\ \alpha_0(l) = 0, \text{ при } l \neq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Таким образом, (3.10) является рекуррентным правилом вычисления значений α , а (3.11) – инициализация такой рекурсии.

Проделаем аналогичные преобразования для $\beta_k(j)$, имеем

$$\begin{aligned} \beta_k(j) &= \Pr\{\mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} | S_k = j\} \\ &= \sum_l \Pr\{S_{k+1} = l; \mathbf{Y}_{k+1}^{K-1} | S_k = j\} \\ &= \sum_l \Pr\{S_{k+1} = l; y_{k+1}; \mathbf{Y}_{k+2}^{K-1} | S_k = j\} \\ &= \sum_l \Pr\{S_{k+1} = l; y_{k+1}; S_k = j\} \Pr\{\mathbf{Y}_{k+2}^{K-1} | S_{k+1} = l; y_{k+1}; S_k = j\} \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\beta_k(j) = \sum_l \gamma_{k+1}(j, l) \beta_{k+1}(l), \quad (3.12)$$

где суммирование проводится по всем состояниям l , в которые возможен переход из состояния j (сумма по красным ребрам на рис. 3.7). Процесс вычисления значений β называется обратной рекурсией, пример которой представлен на рис. 3.7.

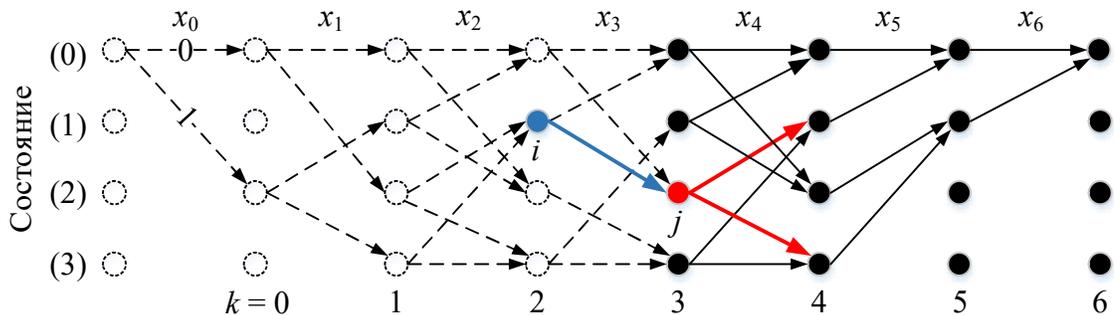


Рис. 3.7. Обратная рекурсия алгоритма BCJR.

При $k = K$ значения β известны, т.к. регистр заканчивается в нулевом состоянии. Начальное условие для рекурсии (3.12) можно представить, как

$$\begin{cases} \beta_K(0) = 1, \\ \beta_K(l) = 0, \text{ при } l \neq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Для каждого перехода из состояния i в состояние j значения γ вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned} \gamma_k(i, j) &= \Pr\{S_k = j; y_k | S_{k-1} = i\} \\ &= \sum_x \Pr\{x_k = x; S_k = j; y_k | S_{k-1} = i\} \\ &= \sum_x \Pr\{y_k | x_k = x; \cancel{S_k = j}; \cancel{S_{k-1} = i}\} \Pr\{x_k = x; S_k = j | S_{k-1} = i\} \\ &= \sum_x \Pr\{y_k | x_k = x\} \Pr\{x_k = x; S_k = j | S_{k-1} = i\} \\ &= \sum_x \Pr\{y_k | x_k = x\} \Pr\{x_k = x | S_k = j; S_{k-1} = i\} \Pr\{S_k = j | S_{k-1} = i\} \end{aligned}$$

можно записать форму для $\gamma_k(i, j)$ в сокращенном виде

$$\gamma_k(i, j) = \sum_x R(y_k, x) q_k(x | i, j) p_k(j | i), \quad (3.14)$$

где $R(y_k, x) = \Pr\{y_k | x_k = x\}$.

Суммирование в (3.14) ведётся по всем возможным номерам форм формируемого сигнала. $\Pr\{S_k = j | S_{k-1} = i\}$ – является априорной вероятностью перехода между состояниями и определяется решёткой. Вероятность $q_k(x | i, j)$ является априорной и характеризует источник информации. $\Pr\{y_k | x_k = x\}$ – является условной вероятностью приёма символа y_k при условии передачи символа x_k , также называемая вероятностью перехода в канале. Символ x_k формируется на тактовом интервале kT при поступлении на вход регистра модуляционного символа S_k . В действительности $\Pr\{y_k | x_k = x\}$ заменяется значением плотности вероятностей для гауссовского распределения:

$$\Pr\{y_k | x_k = x\} = \Pr\{n_k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{|y_k - x_k|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.15)$$

где σ^2 – дисперсия аддитивного гауссовского шума.

Теперь можно описать процедуру вычисления значений апостериорных вероятностей $\lambda_k(j)$ и $\sigma_k(i, j)$

Шаг 1: инициализация значений $\alpha_0(l)$ и $\beta_k(l)$ согласно (3.11) и (3.13).

Шаг 2: с получением каждого очередного сигнала y_k для каждого тактового интервала kT необходимо вычислять очередные N_S^2 значений $\gamma_k(i, j)$ согласно (3.11) и N_S значений $\alpha_k(j)$ согласно (3.10) (прямой проход). Все результаты необходимо сохранять.

Шаг 3: После получения всего сигнала y необходимо вычислить все значения $\beta_k(i, j)$ согласно (3.12) (обратной проход) – по N_S значений для каждого тактового интервала kT . Далее, используя (3.8) и (3.9) вычисляются все значения $\lambda_k(j)$ и $\sigma_k(i, j)$ соответственно.

Обратимся теперь к вопросу вычисления апостериорных вероятностей модуляционных символов или логарифмов отношения вероятностей – LLR (англ. Log-Likelihood Ratio). Из рис. 3.5 следует, что переход между состояниями регистра полностью определяет модуляционный символ. Так, если на тактовом интервале k из каждого состояния выходит верхний переход (верхнее ребро), это значит, что модуляционный символ номер k равен 0, в противном случае – 1. Следовательно, для вычисления вероятности того, что модуляционный символ номер k равен 0 необходимо сложить вероятности верхнего перехода из всех состояний на тактовом интервале kT . Таким образом, значение LLR для модуляционного бита номер k – LLR_k – может быть вычислено с применением значений $\sigma_k(i, j)$ которые, в свою очередь, получают перемножением значений $\alpha_k(j)$, $\beta_k(j)$ и $\gamma_k(i, j)$ согласно (3.9)

$$LLR_k = \log\left(\frac{\Pr(C_k = 1)}{\Pr(C_k = 0)}\right) = \log\left(\frac{\sum_{(i,j) \in \mathbb{C}(C_k=1)} \sigma_k(i, j)}{\sum_{(i,j) \in \mathbb{C}(C_k=0)} \sigma_k(i, j)}\right), \quad (3.16)$$

Заметим, что алгоритм VCSJR является оптимальным в целом из-за того, что на выходе алгоритма имеются мягкие решения. Недостатком данного алгоритма является вычислительная сложность, т.к. необходимо выполнять большое количество вычислений: экспоненты в формуле (3.15), логарифма в формуле (3.16) и также умножения. Для уменьшения вычислительной сложности, на практике обычно используется приближенный метод вычисления логарифма по формуле

$$\log\left(\sum_i \exp(x_i)\right) \approx \max(x_i), \quad (3.17)$$

Вводим обозначения

$$A_k(i) = \log(\alpha_k(i)); \quad \Gamma_k(i, j) = \log(\gamma_k(i, j)), \quad (3.18)$$

тогда значение $\alpha_k(i)$ в логарифмическом масштабе может быть вычислено как

$$\alpha_k(i) = \sum_l \exp(A_{k-1}(l) + \Gamma_k(l, i)) \quad (3.19)$$

Используя приближенную формулу в (3.17), значения $A_k(i)$ вычисляются так

$$A_k(i) = \log\left(\sum_l \exp(A_{k-1}(l) + \Gamma_k(l, i))\right) \approx \max_l (A_{k-1}(l) + \Gamma_k(l, i)). \quad (3.20)$$

На рис. 3.8 представлена структурная схема вычисления $A_k(i)$.

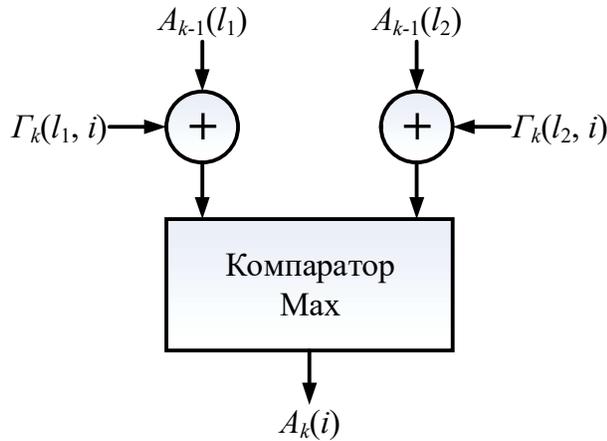


Рис. 3.8. Структурная схема вычисления Max-Log алгоритма

Аналогично, если обозначаем $B_k(j) = \log(\beta_k(j))$, то значение $\beta_k(j)$ в логарифмическом масштабе вычисляется по следующей формуле

$$B_k(j) = \sum_l \exp(B_{k+1}(l) + \Gamma_{k+1}(k, l)), \quad (3.21)$$

Тогда приближенное значение $B_k(i)$ вычисляется так

$$B_k(i) = \log\left(\sum_l \exp(B_{k+1}(l) + \Gamma_{k+1}(k, l))\right) \approx \max_l (B_{k+1}(l) + \Gamma_{k+1}(l, i)). \quad (3.22)$$

Таким образом, формулу для вычисления логарифма отношения вероятностей LLR в (3.16) можно переписать так

$$LLR_k = \log \left(\frac{\sum_{(i,j) \in \mathbb{C}(C_k=1)} \sigma_k(i,j)}{\sum_{(i,j) \in \mathbb{C}(C_k=0)} \sigma_k(i,j)} \right) = \log \left(\frac{\sum_{(i,j) \in \mathbb{C}(C_k=1)} \exp(A_k(i) + \Gamma_k(i,j) + B_k(j))}{\sum_{(i,j) \in \mathbb{C}(C_k=0)} \exp(A_k(i) + \Gamma_k(i,j) + B_k(j))} \right)$$

с учётом (3.17) следует, что:

$$LLR_k \approx \max_{(i,j) \in \mathbb{C}(C_k=1)} (A_k(i) + \Gamma_k(i,j) + B_k(j)) - \max_{(i,j) \in \mathbb{C}(C_k=0)} (A_k(i) + \Gamma_k(i,j) + B_k(j)), \quad (3.23)$$

Рассмотренный алгоритм, получивший название Max-Log-BCJR, позволяет заменить операцию умножения сложением, а экспоненту и логарифм простым нахождением максимума.

3.3. Сферичный алгоритм

Отсчёты принятого сигнала могут быть записаны в матричном виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{C}, \quad (3.24)$$

где:

• $\mathbf{Y} = [y_0, y_1, \dots, y_{L+K-2}]^T$ – вектор формирующего сигнала

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ a_{L-1} & a_{L-2} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{L-1} & \dots & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{L-1} & a_{-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{L-1} & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix} \text{ – формирующая}$$

матрица с размерами $(K + L - 1) * K$.

• $\mathbf{C} = [C_0, C_1, \dots, C_{K-1}]^T$ – вектор переданных символов.

Очевидно, что формирующий сигнал получается выбором конечного числа точек из K -мерной решётки в евклидовом пространстве \mathbf{Z}^K . Процедура максимально правдоподобного декодирования эквивалентна нахождению ближайшей

точки решетки к точке принятого сигнала. Такое нахождение эквивалентно минимизации следующей метрики:

$$\min_{\hat{\mathbf{c}} \in \mathbf{Z}^K} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{c}}\|^2, \quad (3.25)$$

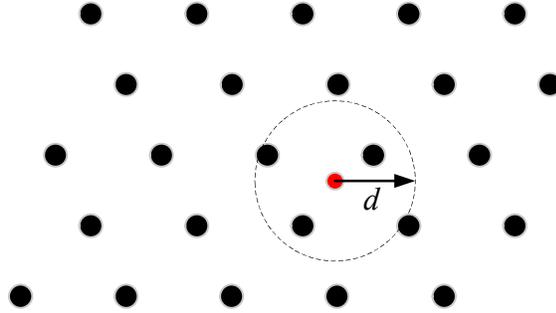


Рис. 3.9. Идея сферичного алгоритма

Сферичный алгоритм (англ. Sphere Algorithm) реализует критерий максимального правдоподобия оценки всей последовательности переданных символов [28]. Реализация данного алгоритма сводится к проверке точек решётки, которые находятся внутри сферы с заданным радиусом d и центром в точке принятого сигнала для уменьшения сложности декодирования. Геометрическое представление данного алгоритма изображено на рис. 3.9. Точка решётки находится внутри сферы если удовлетворяет следующему условию

$$d^2 \geq \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{c}}\|^2, \quad (3.26)$$

Для упрощения вычисления, предлагали использовать следующее QR – разложение

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad (3.27)$$

где:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,1} & \dots & r_{0,K-1} \\ 0 & r_{1,1} & \dots & r_{1,K-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{K-1,K-1} \end{bmatrix} \text{ – верхняя треугольная матрица с размером } K \times K,$$

• $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2]$ – ортогональная матрица с размером $(K + L - 1) * (K + L - 1)$;
 \mathbf{Q}_1 – матрица с размером $(K + L - 1) * K$, \mathbf{Q}_2 – матрица с размером $(K + L - 1) * (L - 1)$.

Из (3.26) получается

$$d^2 \geq \left\| \mathbf{Y} - [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2] \mathbf{R} \hat{\mathbf{C}} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^* \\ \mathbf{Q}_2^* \end{bmatrix} \mathbf{Y} - \mathbf{R} \hat{\mathbf{C}} \right\|^2 = \left\| \mathbf{Q}_1^* \mathbf{Y} - \mathbf{R} \hat{\mathbf{C}} \right\|^2 + \left\| \mathbf{Q}_2^* \mathbf{Y} \right\|^2, \quad (3.28)$$

где $(\cdot)^*$ – эрмитово-сопряженная матрица.

$$d^2 - \left\| \mathbf{Q}_2^* \mathbf{Y} \right\|^2 \geq \left\| \mathbf{Q}_1^* \mathbf{Y} - \mathbf{R} \hat{\mathbf{C}} \right\|^2, \quad (3.29)$$

Обозначим $\mathbf{z} = \mathbf{Q}_1^* \mathbf{Y}$ и $d'^2 = d^2 - \left\| \mathbf{Q}_2^* \mathbf{Y} \right\|^2$. Тогда неравенство (3.29) может быть представлено в таком виде

$$d'^2 \geq \sum_{i=0}^{K-1} \left(z_i - \sum_{j=i}^{K-1} r_{i,j} C_j \right)^2, \quad (3.30)$$

где $r_{i,j}$ – элемент матрицы \mathbf{R} с индексом (i, j) .

Напомним, что матрица \mathbf{R} является верхней треугольной. Поэтому, правая часть неравенства (3.30) может быть записана следующим образом

$$d'^2 \geq (z_{K-1} - r_{K-1,K-1} C_{K-1})^2 + (z_{K-2} - r_{K-2,K-1} C_{K-1} - r_{K-2,K-2} C_{K-2})^2 + \dots, \quad (3.31)$$

Заметим, что первое слагаемое этого неравенства зависит только от C_{K-1} , второе слагаемое зависит от $\{C_{K-1}, C_{K-2}\}$ и так далее. Таким образом, необходимым условием, чтобы точки решётки находились внутри сферы с радиусом d , является

$$d'^2 \geq (z_{K-1} - r_{K-1,K-1} C_{K-1})^2$$

Отсюда, получаем

$$\frac{\lceil -d' + z_{K-1} \rceil}{r_{K-1,K-1}} \leq C_{K-1} \leq \left\lfloor \frac{d' + z_{K-1}}{r_{K-1,K-1}} \right\rfloor, \quad (3.32)$$

где $\lceil \cdot \rceil, \lfloor \cdot \rfloor$ – округление вверх, вниз (соответственно) до ближайшего элемента решётки.

Для каждого значения C_{K-1} , которое удовлетворяет условию (3.32), обозначаем $d'_{K-2} = d'^2 - (z_{K-1} - r_{K-1,K-1})^2$ и $z_{K-2,K-1} = z_{K-2} - r_{K-2,K-1}C_{K-1}$. Неравенство (3.31) приводит к условию для C_{K-2}

$$\left[\frac{-d'_{K-2} + z_{K-2,K-1}}{r_{K-2,K-2}} \right] \leq C_{K-2} \leq \left[\frac{d'_{K-2} + z_{K-2,K-1}}{r_{K-2,K-2}} \right], \quad (3.33)$$

Разумный выбор d позволяет значительно ускорить декодирование благодаря необходимости проверки малого числа точек решётки. Однако, если выбирается слишком маленькое значение d , то в сфере может не оказаться ни одной точки решётки. Практически значение d выбирают по тому или иному алгоритму на основании значения отношения сигнал/шум. Если при этом в сфере не находится ни одна точка, то значение d увеличивается и процесс декодирования повторяется. Анализ вычислительной сложности сферичного алгоритма представлен в [29], где также предложен алгоритм выбора начального значения d .

3.4. Подоптимальный алгоритм

Как сказано выше, при увеличении глубины МСИ (т.е. при увеличении L) и/или увеличении размера сигнального созвездия M_C , количество состояний в решётке увеличивается по закону M_C^{L-1} , что приводит к значительному увеличению вычислительной сложности алгоритма Витерби и ВСJR. Для уменьшения количества вычислений предлагали использовать подоптимальные алгоритмы – М-Витерби [30], М-ВСJR [31].

М-Витерби алгоритм

Суть М-Витерби алгоритма состоит в том, что на каждом шаге в памяти алгоритма сохраняются только M состояний с наименьшими метриками, в то время как в алгоритме Витерби количество сохраняемых путей равно количеству состояний в решётке [30]. На рис. 3.10 представлена основная идея М-Витерби алгоритма.

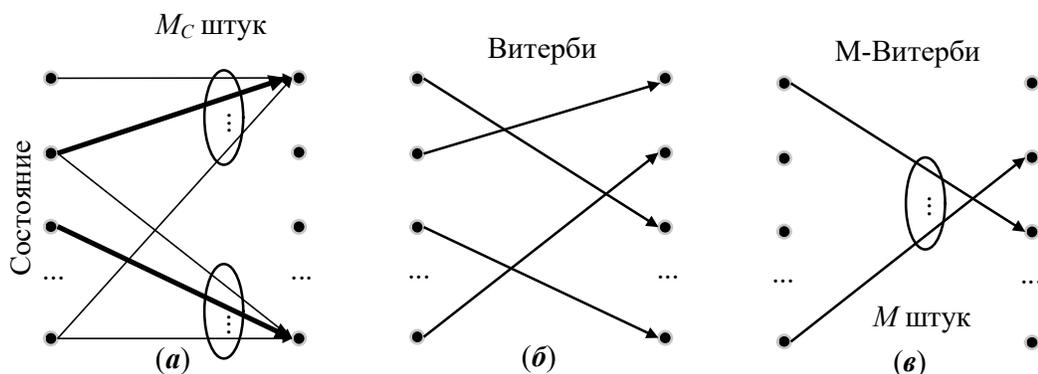


Рис. 3.10. М-Витерби алгоритм

В процессе работы алгоритма Витерби, для каждого последующего состояния рассчитываются метрики путей, которые сходятся в это состояние, количество таких путей равно размерности сигнального созвездия т.е. M_C , как представлено на рис. 3.10 (а). Для каждого состояния сохраняется только один путь с лучшей метрикой, выделенный жирным. Такой путь называют выжившим. В традиционном алгоритме Витерби количество путей в памяти всегда равно количеству состояний M_C (рис. 3.10 (б)). В алгоритме М-Витерби сохраняются только M путей (рис. 3.10 (в)), имеющих лучшие метрики. В результате, такой алгоритм требует меньший объем памяти и имеет меньшую сложность, так как на следующем шаге будут рассматриваться только переходы из M состояний.

М-ВСJR алгоритм

В [31–32] предложили модифицированный алгоритм ВСJR, в котором рассчитываются и сохраняются не все пути решётки, а только M из всех возможных. Такой подход получил название «М-ВСJR». Как сказано в параграфе 3.2, в прямом проходе производится расчёт $\alpha_k(i)$ для всех состояний, а в обратном проходе – $\beta_k(i)$, где: i – индекс состояния, k – индекс тактового интервала. В алгоритме М-ВСJR предлагается сохранять только M путей на каждом шаге прямой рекурсии, имеющих наибольшие значения $\alpha_k(i)$. В обратной рекурсии, вычисления $\beta_k(i)$ производятся по двумя способам: первый – по путям, выжившим в прямой рекурсии, а второй – в независимости от прямой рекурсии, т.е. на каждом шаге в памяти сохраняются M путей с наибольшими значениями $\beta_k(i)$.

На рис. 3.11 представлена решётчатая диаграмма алгоритма M-BCJR, $M = 2$ для $L = 3$ и $M_C = 2$. Из рисунка видно, что количество сохраняемых путей в памяти равно двум. Недостатком первого способа является, что старт вычисления в обратной рекурсии начинается только после совершения вычисления в прямой рекурсии. Однако в обратной рекурсии также необходимо выделять память для сохранения выживших путей и также метрик.

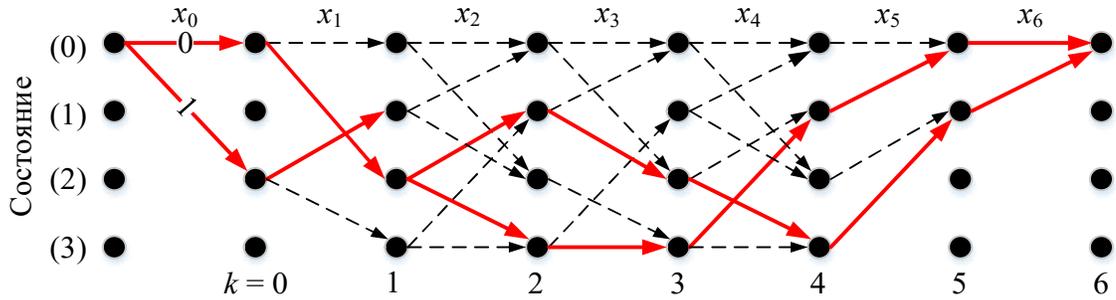


Рис. 3.11. Решётчатая диаграмма для вычисления α в прямом проходе для алгоритма M-BCJR

В втором подходе, расчёт $\alpha_k(i), \beta_k(i)$ происходит одновременно и независимо друг от друга, при этом не требуется сохранения выживших путей.

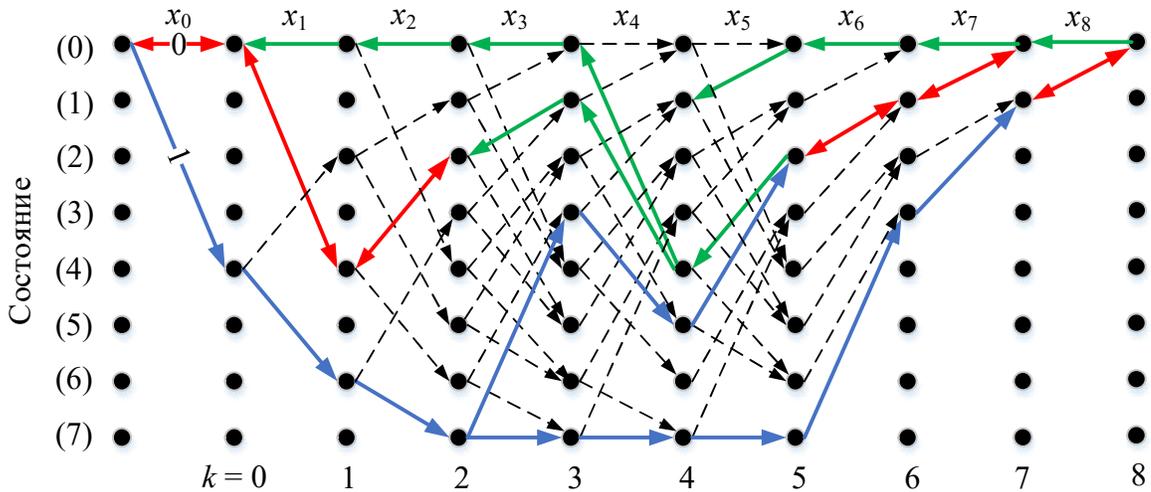


Рис. 3.12. Решётчатая диаграмма для $L = 5, M_C = 2$.

Исследование показало, что независимое вычисление в прямой и обратной рекурсиях приводит к ухудшению помехоустойчивости по сравнению с первым способом. На рис. 3.12 представлена решётчатая диаграмма для вычисления $\alpha_k(i)$ и $\beta_k(i)$ в независимости друг от друга. Отмеченные синие пути соответствуют

прямому проходу, зелёные пути соответствуют обратному проходу. Отмеченные красные ребра с двунаправленными стрелками означают существование перехода между сохраняемыми состояниями в прямом и обратном проходах. На таких тактовых интервалах возможно вычислять вероятность переданных символов. На тактовых интервалах $2T$, $3T$, $4T$ на этом рисунке видно, что не существует перехода между состояниями. При таких ситуациях переданному символу присвоится некое определённое значение, что приводит к увеличению ошибочной вероятности приёма. Исследование показало, что проигрыш в этом случае не менее 10 дБ по сравнению с первым способом.

Таблица 3.1

Алгоритм	Вычислительная сложность обработки одного такта
Витерби	$O((N + L - 1)N_s)$
BCJR	$O(2(N + L - 1)N_s)$
М-Витерби	$O((N + L - 1)M)$
М-BCJR	$O(2(N + L - 1)M)$

В табл. 3.1 представлена вычислительная сложность обработки одного такта решётки описанными выше алгоритмами, кроме сферического алгоритма. Сферический алгоритм сразу был исключён из рассмотрения по той причине, что он не эффективен в случае обработки длинных последовательностей, т.е. большого числа переданных символов, а именно такой случай является стандартным в современных системах связи. Из анализа этой таблицы следует, что алгоритмы Витерби и BCJR оказываются многократно более вычислительно затратными, чем их подоптимальные версии, поэтому предлагается исследовать возможность применения именно подоптимальных алгоритмов. В случае если подоптимальные алгоритмы смогут обеспечить результаты, близкие к оптимальным алгоритмам, выбор в пользу подоптимальных версий будет однозначным. Из двух вариантов М-Витерби и М-BCJR предлагается сделать выбор в пользу М-BCJR, так как хотя он обладает вдвое большей вычислительной сложностью, тем не менее,

он формирует мягкие решения о модуляционных символах, что повышает эффективность работы декодера помехоустойчивого кода и, следовательно, повышает энергетическую эффективность передачи информации.

Выводы по главе 3

Введение МСИ приводит к необходимости использовать сложный алгоритм приёма, например, алгоритм Витерби, ВСJR или сферичного декодирования. Алгоритмы Витерби и сферичного декодирования оптимальны по критерию максимума правдоподобия для ансамбля символов. С другой стороны, алгоритм ВСJR оптимален по критерию максимума апостериорной вероятности каждого символа. Вычислительная сложность алгоритмов Витерби и ВСJR возрастает экспоненциально с увеличением глубины МСИ и размера сигнального созвездия, поэтому их неэффективно использовать в сигналах с глубокой длиной МСИ и/или с большим сигнальным созвездием. В противоположность этому, сферичный алгоритм не зависит ни от размера сигнального созвездия, ни от глубины МСИ, но зависит от длины кадра по полиномиальному закону. Но из-за неэффективности использования сферичного алгоритма в случае обработки длинных последовательностей в дальнейшем не будем его использовать. Для уменьшения вычислительной сложности приёма предлагается использование алгоритма М-ВСJR, который формирует мягкие решения о модуляционных символах.

Результаты реализации подоптимальных алгоритмов М-Витерби и М-ВСJR и оценки их эффективности по отношению к оптимальным алгоритмам Витерби и ВСJR были представлены в следующих публикациях.

1. Нгуен Ван Фе. Сравнение эффективности М-алгоритма и алгоритма Витерби при приёме сигналов с частичным откликом / Горлов А.И, Гельгор А.Л, Попов Е.А // 18-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2016», Т1, с. 78-83, Москва, 2016 г.

Глава 4. SEFDM-сигналы с модифицированными импульсами

Как сказано в разделе 1.2, идея формирования сигналов SEFDM заключается в сближении поднесущих, форма которых имеет sinc-вид $\sin(x)/x$. Отметим, что sinc-импульс является крайним случаем семейства RRC-импульсов следующего вида

$$a_{RRC}(f, \beta) = \frac{\sin\{(1-\beta)\pi fT\} + \cos\{(1+\beta)\pi fT\}4\beta fT}{\sqrt{1/T} \{1 - (4\beta fT)^2\} \pi fT}, \quad (4.1)$$

где T – тактовый интервал; β – коэффициент сглаживания. Поэтому существует идея вместо sinc-импульса использовать RRC-импульс в качестве формы поднесущей.

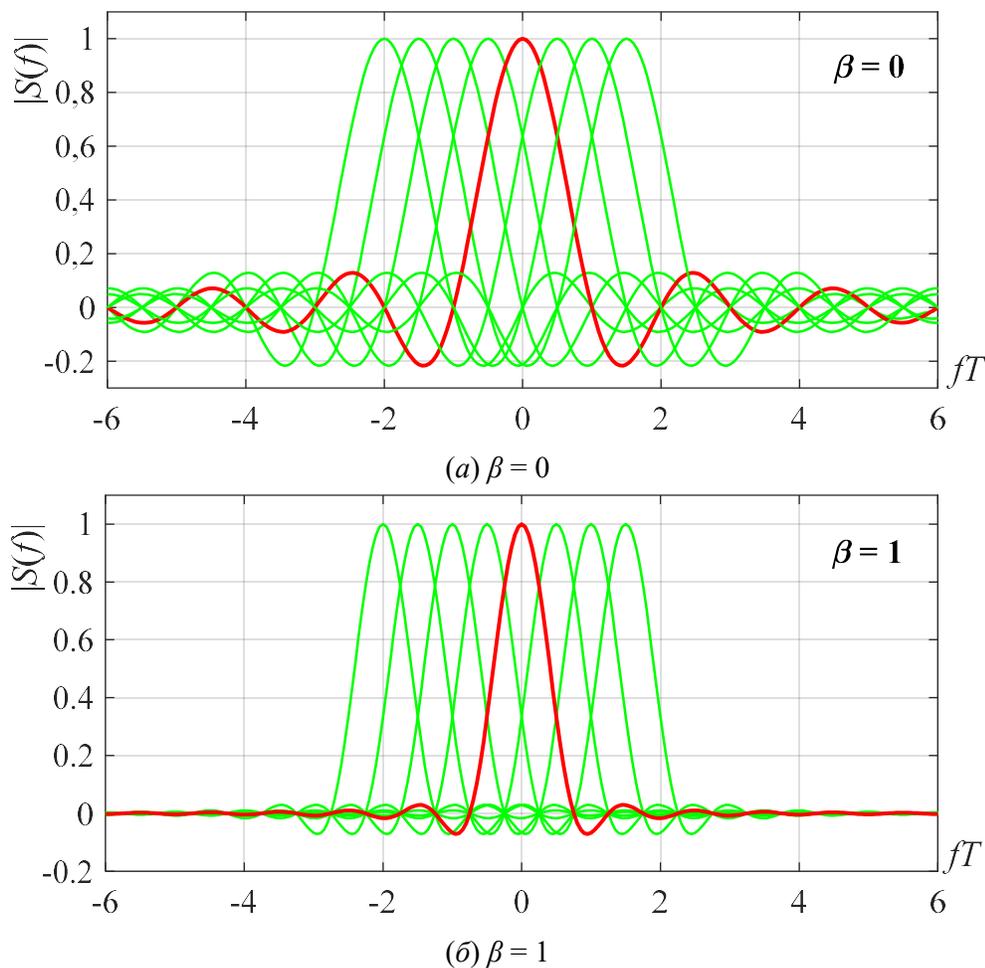


Рис. 4.1. Спектр поднесущих сигналов SEFDM при $\alpha = 0,5$

На рис. 4.1 представлено сравнение спектра поднесущих сигналов SEFDM с коэффициентом уплотнения поднесущих $\alpha = 0,5$ и с используемой формой поднесущих: (а) – sinc-вида при $\beta = 0$, (б) RRC-вида при $\beta = 1$. Из анализа этого рисунка можно видеть, что сигнал SEFDM с формой поднесущих RRC-вида обеспечивает низкий уровень МСИ по сравнению со случаем sinc-вида. Для различения будем называть сигналы SEFDM с формой поднесущих sinc-вида – sinc-SEFDM, а с формой поднесущих RRC-вида – RRC-SEFDM.

4.1. RRC-SEFDM

В данной разделе будем рассматривать метод формирования и обработки предлагаемых сигналов RRC-SEFDM. Комплексная огибающая сигналов RRC-SEFDM записывается следующим образом

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=N/2}^{N/2-1} C_k^{(n)} a(t - k(1 + \beta)T) \exp(j2\pi n \Delta f (t - k(1 + \beta)T)), \quad (4.2)$$

где $a(t)$ – финитный импульс следующего вида

$$a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{T}{2}(1 - \beta), \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi}{\beta T} \left(|t| - \frac{T}{2}(1 - \beta) \right) \right) \right]}, & \frac{T}{2}(1 - \beta) \leq |t| \leq \frac{T}{2}(1 + \beta), \\ 0, & \frac{T}{2}(1 + \beta) < |t|. \end{cases} \quad (4.3)$$

и $0 \leq \beta \leq 1$ – коэффициент сглаживания; $(1 + \beta)T$ – длительность символа RRC-SEFDM; N – количество поднесущих частот; $C_k^{(n)}$ – модуляционный символ n -ой поднесущей k -го SEFDM-символа; $\Delta f = \alpha/T$ – частотный разнос между соседними поднесущими частотами; α – коэффициент частотного уплотнения поднесущих частот, $\alpha \in (0, 1]$. Заметим, что для сигнала OFDM $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и длительность символа равна T . При $\beta = 0$ сигналы RRC-SEFDM соответствуют традиционным сигналам SEFDM, которые далее будем называть sinc-SEFDM. Спектральный импульс, соответствующий временному импульсу $a(t)$, имеет следующий вид

$$a_{RRC}(f, \beta) = \frac{\sin\{(1 - \beta)\pi fT\} + \cos\{(1 + \beta)\pi fT\}4\beta fT}{\sqrt{T}\{1 - (4\beta fT)^2\}\pi fT}.$$

Сначала рассмотрим метод формирования сигналов RRC-SEFDM без частотного уплотнения, т.е. фактически, определим сигналы OFDM с RRC-импульсами (RRC-OFDM). Далее рассмотрим особенности частотного уплотнения поднесущих, т.е. переход к сигналам RRC-SEFDM.

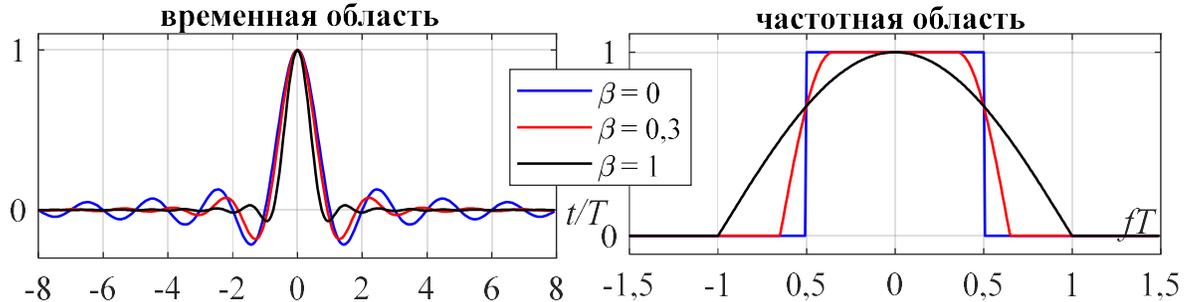


Рис. 4.2. RRC-импульсы

На рис. 4.2 изображена форма исходных RRC-импульсов во временной области и соответствующие им спектры в частотной области. Как видно из этого рисунка, спектр sinc-импульса имеет прямоугольный вид с шириной полосы $1/T$. Таким образом, согласно теореме Котельникова, при дискретизации sinc-импульса достаточно рассматривать один отсчёт $K = 1$ на тактовый интервал T . Учитывая дуальность времени и частоты для преобразования Фурье, получаем, что для прямоугольного импульса спектр имеет вид sinc-импульса и при дискретизации спектра достаточно рассматривать одно значение частоты на длительности спектрального «тактового интервала» (англ. Spectral Time Interval – STI) $T_f = 1/T$. Именно так и делается при формировании сигналов OFDM (sinc-OFDM): ДПФ от N_{FFT} отсчётов во временной области, следующих с интервалом T/N_{FFT} , определяет N_{FFT} отсчётов в частотной области, следующих с интервалом $1/T$ (рис. 4.3).

Ширина полосы спектра RRC-импульсов для $\beta > 0$ больше, чем $1/T$, поэтому необходимо увеличивать значение K для выполнения теоремы Котельникова.

При цифровой обработке удобно, чтобы K было целым, тогда $K = 2$ – минимальное значение, подходящее для всех значений $\beta > 0$. Следовательно, для использования RRC-импульсов в качестве формы спектров поднесущих в сигналах RRC-OFDM, необходимо вдвое увеличить количество спектральных отсчётов при вычислении ДПФ, сохранив при этом фиксированной частоту дискретизации сигнала $F_s = N_{FFT}/T$. Это означает, что необходимо вдвое увеличить длительность сигнала во временной области (рис. 4.4).

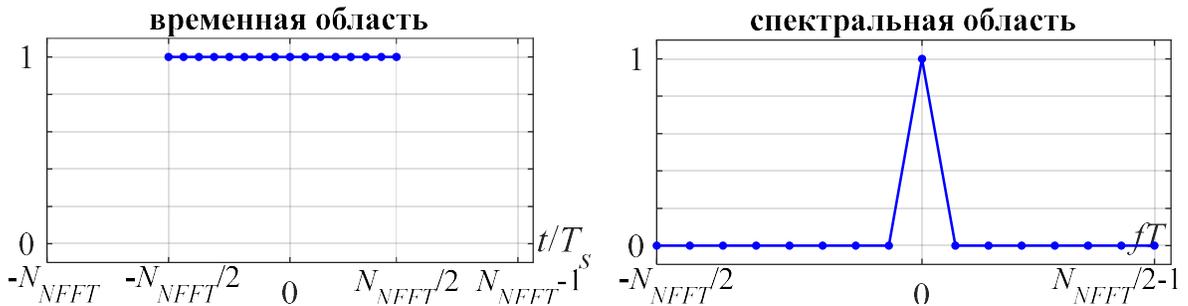


Рис. 4.3. RRC-импульсы в частотной области (справа) и соответствующие им импульсы во временной области (слева); $K = 1$ для $\beta = 0$

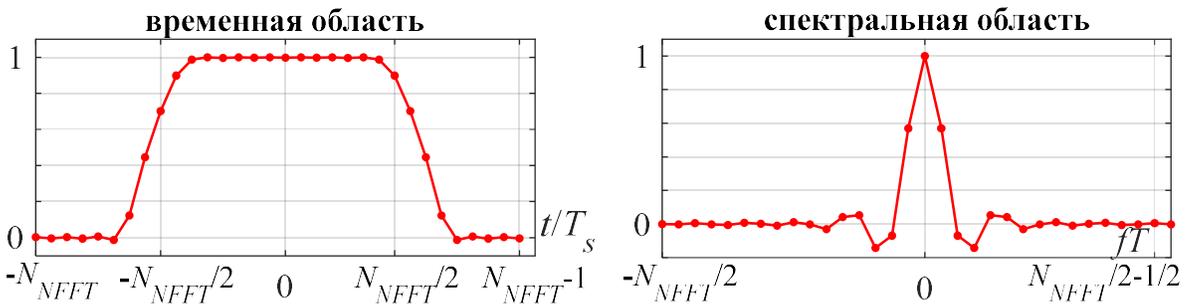


Рис. 4.4. RRC-импульсы в частотной области (справа) и соответствующие им импульсы во временной области (слева); $K = 2$ для $\beta = 0,3$

Из рис. 4.4 следует, что значения удлинённого во временной области импульса на краях близки к нулю и, следовательно, их можно не передавать. т.е. обнулять при формировании и вставлять нулевые значения при приёме. С одной стороны, такой подход обеспечит увеличение спектральной эффективности, однако, с другой стороны, это приведёт к искажению спектрального импульса, и, следовательно, увеличению МСИ, что приводит к потере энергетической эффективности. Для $K = 2$ будем обозначать количество отбрасываемых с каждой стороны отсчётов N_{ZS} (англ. Number of Zeroed Samples), где $0 \leq N_{ZS} \leq N_{FFT}/2$. Если

выбрать $K > 2$, то первые и последние $(K - 2)N_{FFT}/2$ отсчётов во временной области нужно всегда отбрасывать, так как их появление обусловлено только передискретизацией в частотной области.

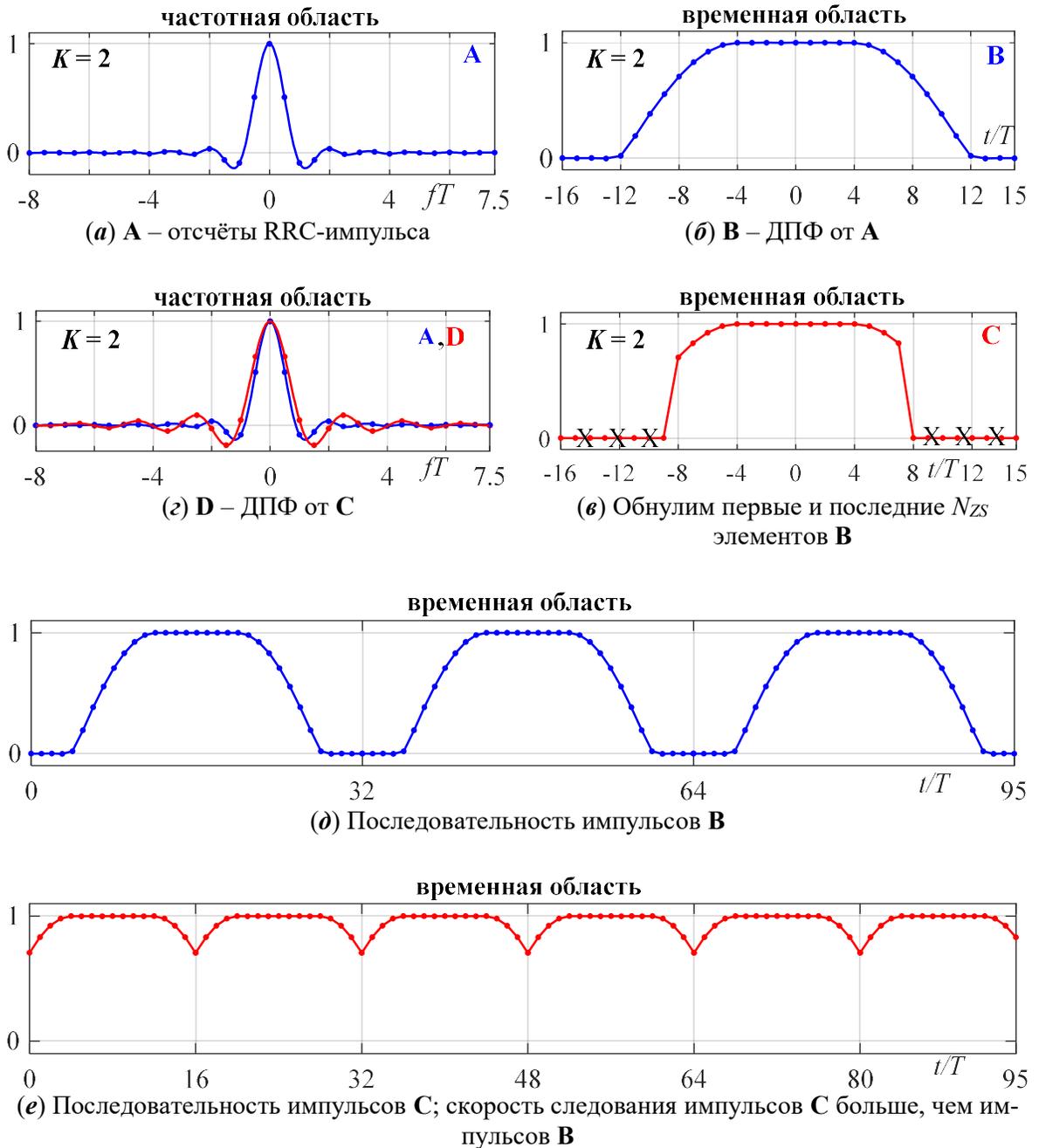


Рис. 4.5 Иллюстрация повышения спектральной эффективности

На рис. 4.5 представлена иллюстрация повышения спектральной эффективности при $N_{FFT} = 16$, $K = 2$, $\beta = 0,5$: (а) форма исходного спектрального RRC-

импульса **A**; (б) временной импульс **B**, соответствующий импульсу **A**; (в) временной импульс **C**, полученный в результате обнуления первых и последних N_{ZS} элементов импульса **B**; (г) спектральный импульс **D**, соответствующий импульсу **C**, и исходный спектральный импульс **A**; (д) последовательность импульсов **B**; (е) последовательность импульсов **C**. Из сравнения (д) и (е) следует, что скорость следования импульсов **C** больше, чем импульсов **B**.

Алгоритм формирования и обработки сигналов RRC-OFDM состоит из следующих этапов:

Предварительные вычисления:

- Шаг 1: сформируем вектор-столбец **A** размером N_{FFT} , в котором расположены отсчёты RRC-импульса $a_{RRC}(nT - KN_{FFT}T/2, \beta)$, $n = 0, 1, \dots, KN_{FFT} - 1$.

- Шаг 2: выполним ДОПФ размером KN_{FFT} от импульса **A**; результат запишем в массив-столбец **B** – импульс во временной области, соответствующий RRC-импульсу в частотной области.

- Шаг 3: обнулیم первые и последние $(K - 2)N_{FFT}/2 + N_{ZS}$ значений массива-столбца **B**, результат запишем в массив **C**.

- Шаг 4: выполним ДПФ размером KN_{FFT} от массива **C**, результат запишем в массив **D** – спектральный импульс, соответствующий импульсу **C**.

Обнуление первых и последних $(K - 2)N_{FFT}/2 + N_{ZS}$ значений массива-столбца **B** приводит к тому, что массив **D** содержит искажённые отсчёты RRC-импульса. При фиксированном N_{ZS} искажения тем больше, чем больше β .

Формирование символа RRC-OFDM:

- Шаг 1: в массив-столбец **E** размером KN_{FFT} с равномерным шагом K (что соответствует частотному разносу $1/T$) записываются N значений передаваемых модуляционных символов. Например, если N чётное, то можно использовать позиции $n = KN_{FFT}/2 - KN/2, KN_{FFT}/2 - KN/2 + K, \dots, KN_{FFT}/2 - KN/2 + (N - 1)K$, в остальных позициях массива **E** должны быть нули.

- Шаг 2: $\mathbf{G} = \mathbf{E} * \mathbf{D}$ – фильтрация последовательности модуляционных символов, «*» – циклическая свёртка, которая может быть выполнена эффективно с помощью БПФ.

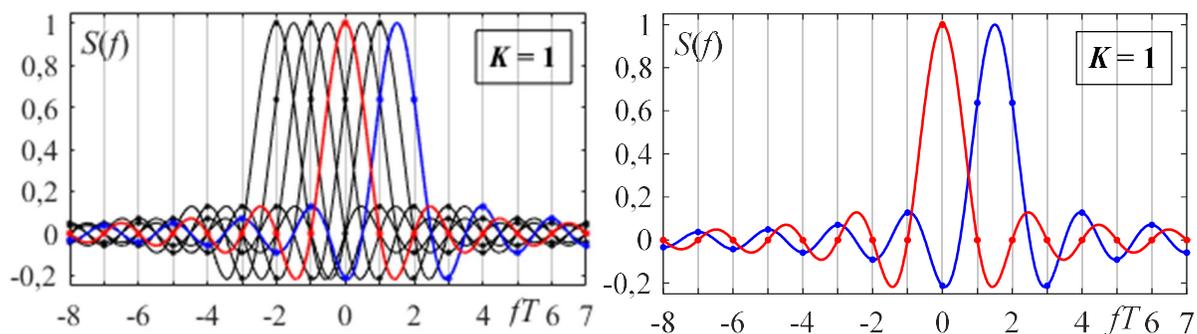
- Шаг 3: $\mathbf{H} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}$ – символ RRC-OFDM, состоящий из KN_{FFT} отсчётов.
- Шаг 4: первые и последние $(K - 2)N_{FFT}/2 + N_{ZS}$ значений массива \mathbf{H} не передаются.

Приём RRC-OFDM (после выполнения процедуры эквалайзинга):

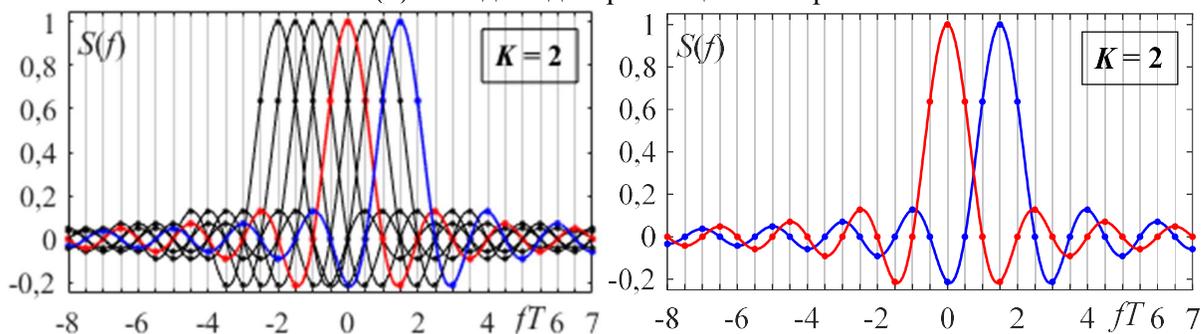
- Шаг 1: \mathbf{R} – значения элементов массива \mathbf{H} , прошедших через канал связи и эквалайзер.
- Шаг 2: к массиву \mathbf{R} добавляются $(K - 2)N_{FFT}/2 + N_{ZS}$ нулевых значений в начало и в конец, образуя массив \mathbf{H} .
- Шаг 3: $\mathbf{G} = \mathbf{FH}$ – оценка спектра символа RRC-OFDM.
- Шаг 4: $\mathbf{E} = \mathbf{G}*\mathbf{D}$ – согласованная фильтрация; если N_{ZS} выбрано таким, что \mathbf{D} почти не отличается от \mathbf{A} , то в позициях n будет устранена МСИ и можно производить независимую демодуляцию каждой информационной поднесущей.

Итак, алгоритмы формирования и приёма сигналов RRC-OFDM аналогичны алгоритмам обработки одночастотных сигналов, но реализуются в спектральной области, переход в которую, как и для sinc-OFDM, осуществляется с помощью ДПФ.

Теперь перейдём к сигналам RRC-SEFDM. Для этого надо сблизить соседние поднесущие, т.е. уменьшить длину STI до значения α/T . При формировании массива \mathbf{E} сближение поднесущих эквивалентно изменению шага с K до αK . Если αK не целое, то позиции некоторых модуляционных символов в массиве \mathbf{E} также окажутся не целыми и, следовательно, придётся изменять алгоритм формирования сигнала. На рис. 4.6 представлены спектры поднесущих сигналов SEFDM для $\alpha = 0,5$: (а) – исходная дискретизация спектра, т.е. коэффициент передискретизации $K = 1$ и $\alpha K = 0,5$, как для сигнала OFDM, (б) – удвоенная дискретизация спектра при $K = 2$ и $\alpha K = 1$. Из рисунка (а) следует, что для двух выделенных синим и красным поднесущих дискретизация оказывается не одинаковой. А на рисунке (б) очевидно, что дискретизация спектров поднесущих совпадает.



(а) Исходная дискретизация спектра



(б) Удвоенная дискретизация спектра

Рис. 4.6. Спектры поднесущих сигналов SEFDM для $\alpha = 0,5$

Для сохранения алгоритма предлагается выбирать такие K , чтобы αK было целым. Также целое αK будет удобно для реализации алгоритма приёма. В табл. 4.1 приведены требуемые минимальные значения K для различных значений α при $\beta > 0$; дополнительно учитывается, что, по-прежнему, должно выполняться условие $K \geq 2$. Если $\beta = 0$, то единственное отличие от табл. 4.1 будет при $\alpha = 1$, для которого $K = 1$.

Таблица 4.1. Зависимость значений K от значений α

α	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,25
K	2	10	5	10	5	2	4

Итак, формирование сигналов RRC-SEFDM отличается от формирования сигналов RRC-OFDM только изменением шага при расстановке модуляционных символов в массиве \mathbf{E} и увеличением значения K . Структурная схема модема для передачи данных с применением сигналов RRC-SEFDM представлена на рис. 4.7. В передатчике поток модуляционных символов от последовательно-параллельного преобразователя \mathbf{S} поступает на блок добавления нулей, которые

добавляются в начале, в конце и также между элементами. Результат с выхода блока добавления нулей поэлементно перемножается с временным импульсом, что является вычислительно эффективной реализацией модуляции в частотной области. Полученный поток поступает в блок ОДПФ с размером KN_{FFT} . Из полученного сигнала во временной области отбрасываются крайние элементы, что соответствует усечению импульса.

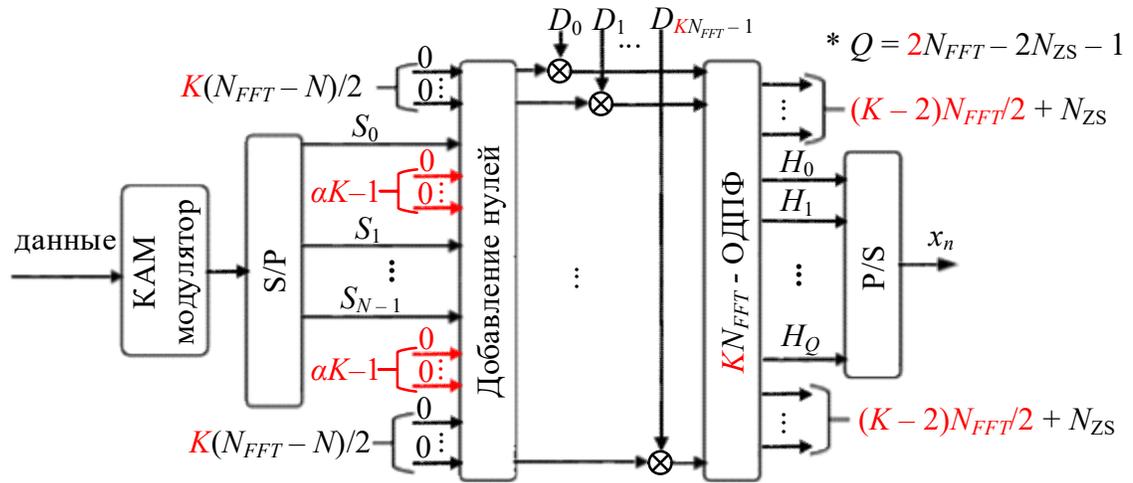


Рис. 4.7. Структурная схема передатчика сигналов RRC-SEFDM

На рис. 4.8 изображена структурная схема приёмника сигналов RRC-SEFDM. В целом порядок действий является обратным по отношению к передатчику. Последовательность отсчётов принятого сигнала от канала \mathbf{R} после эквалайзера поступает в последовательно-параллельный преобразователь. Поток с выхода последовательно-параллельного преобразователя поступает в блок ДПФ с размером KN_{FFT} . Из полученного потока спектральных отсчётов отбрасываются крайние элементы, что соответствует защитному интервалу от соседних каналов. Результат с выхода параллельно-последовательного преобразователя поступает в демодулятор, в котором производится обработка спектральных отсчётов с помощью алгоритмов Витерби, ВСJR, и их подоптимальных версий М-Витерби и М-ВСJR.

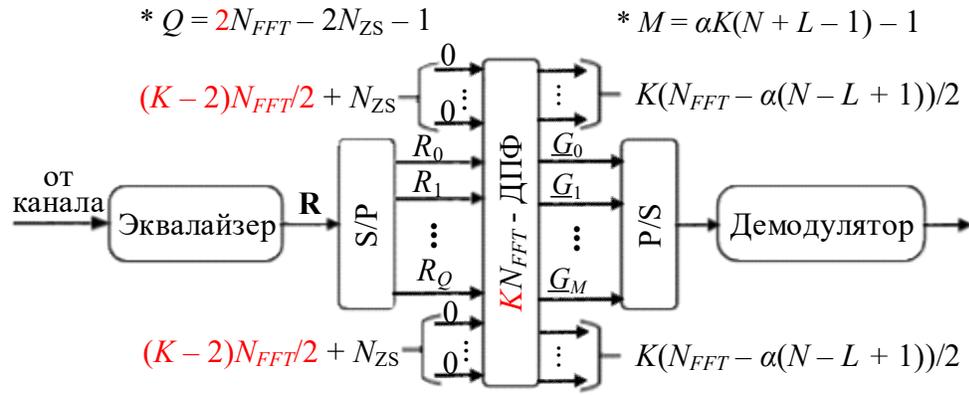


Рис. 4.8. Структурная схема приёмника сигналов RRC-SEFDM

Предположим, что количество ненулевых отсчётов в \mathbf{D} равно $L_{RRC}\alpha K$, т.е. L_{RRC} – длина искажённого RRC-импульса, выраженная в единицах длительности STI. Тогда формирование спектра (т.е. значений массива \mathbf{G}) аналогично кодированию свёрточным кодом с длиной кодового ограничения $L_{RRC} - 1$; при этом в «регистр кодера» вместо бит подаются части модулированных импульсов, и результирующий спектр получается путём сложения всех составляющих регистра. В этой связи мы предлагаем использовать для приёма сигналов RRC-SEFDM алгоритм, аналогичный алгоритму BCJR, успешно используемому для декодирования свёрточных кодов. Отличие заключается в том, что вместо временных отсчётов сигнала обрабатываются спектральные отсчёты (значения массива \mathbf{G}) и вместо хемминговой метрики используется евклидова метрика – вычисляется евклидово расстояние между принятыми на одном STI отсчётами спектра и эталонными формами спектра. Вычислительная сложность алгоритма Витерби зависит от количества учитываемых состояний или, что тоже самое, от учитываемой при приёме длины импульса $L_{VD} \leq L_{RRC}$, выраженной в единицах STI. Теоретически RRC-импульсы нефинитны, поэтому $L_{VD} < L_{RRC}$, и получается, что предлагаемый алгоритм всегда будет подоптимальным. Однако фактически значения RRC-импульса быстро убывают при удалении от максимального значения и для $L^{(0)}_{VD} \leq L_{VD} \leq L_{RRC}$ эффективность подоптимального алгоритма почти не отличается от оптимального. Очевидно, чем больше значение β , тем меньше значение

$L^{(0)}_{\text{VD}}$. Наличие защитных интервалов в спектральной области обеспечивает известную инициализацию и терминацию, что улучшает помехоустойчивость алгоритма приёма.

4.2. PR-SEFDM

Другим подходом для формирования многочастотных сигналов с неортогональными поднесущих является использование оптимальных импульсов, полученных в разделе 2.1, в качестве формы поднесущих. Такие сигналы будем называть PR-SEFDM. Идея формирования сигналов PR-SEFDM заключается в том, что спектр сигналов SEFDM рассматривается как сигнал с линейной модуляцией, поэтому для повышения помехоустойчивости возможно воспользоваться идеями, изложенными в [22] для синтеза оптимальных импульсов сигналов с частичным откликом. При этом необходимо воспринимать нормированную полосу частот $W_\varepsilon T$, содержащую долю ε мощности, как нормированную длительность импульса T_ε/T , в которой сосредоточена ε доля энергии сигнала, где T – длительность SEFDM символа.

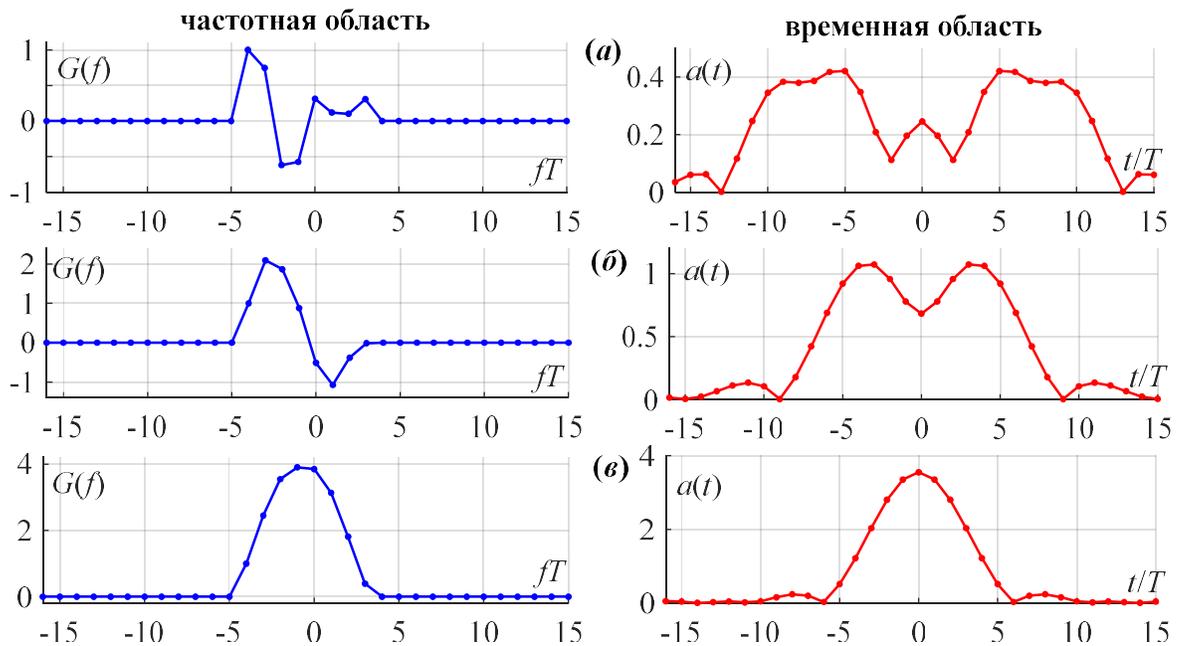


Рис. 4.9. Примеры оптимальных спектральных импульсов и соответствующих им временных импульсов

Комплексная огибающая сигналов PR-SEFDM записывается так:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=N/2}^{N/2-1} C_k^{(n)} a(t - kT) \exp(j2\pi n \Delta f (t - kT)), \quad (4.4)$$

где $\Delta f = 1/T$ – разность между поднесущими, $a(t)$ – спектр оптимального финитного импульса. На рис. 4.9 представлены примеры полученных оптимальных спектральных импульсов (синие кривые - слева) и соответствующих им временных импульсов (красные кривые - справа) при $L = 8$: (а) для $T_{99\%}/T = 0,75$, (б) для $T_{99\%}/T = 0,5$, (в) для $T_{99\%}/T = 0,3$.

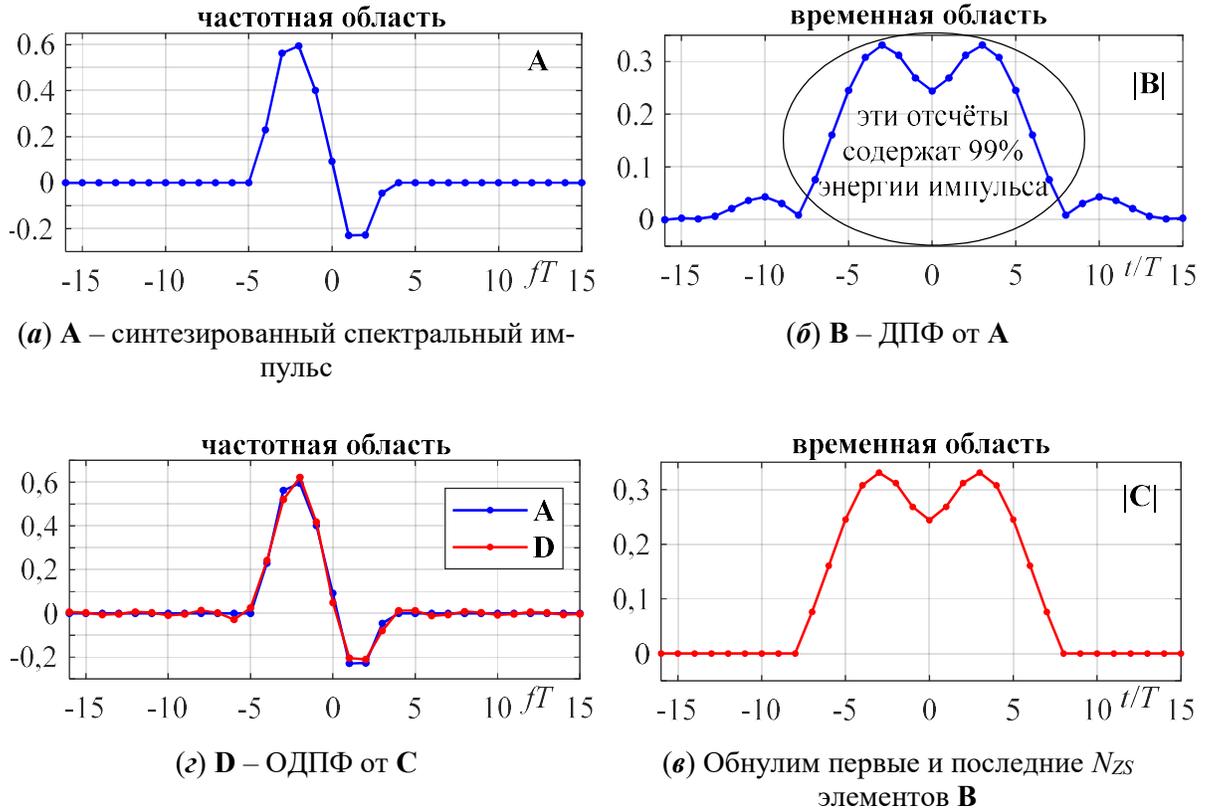


Рис. 4.10 Иллюстрация повышения спектральной эффективности

Отличительной особенностью предлагаемых оптимальных импульсов является то, что значение нормированной длительности для всех них оказывается меньше 1. Это значит, что в отличие от RRC-импульсов, рассмотренных выше, не требуется передискретизация спектра и сближение поднесущих, т.е. размер преобразования Фурье остаётся неизменным. В отличие от сигналов RRC-SEFDM, исходная длительность символа PR-SEFDM равна длительности сим-

вола OFDM. Увеличение спектральной эффективности получается путём усечения N_{ZS} первых и последних отсчётов символа. На рис. 4.10 для $N_{FFT} = 32$ представлен пример преобразования оптимального спектрального импульса с целью повышения спектральной эффективности без введения интерференции между соседними символами PR-SEFDM. Как следует из этого рисунка, если выполнять усечение временного импульса по критерию концентрации энергии импульса, то исходный и полученный спектральные импульсы почти не отличаются, что означает отсутствие дополнительных энергетических потерь.

Алгоритм формирования и приёма сигналов PR-SEFDM состоит из следующих этапов:

Предварительные вычисления:

- Шаг 1: в вектор-столбец \mathbf{A} размером N_{FFT} записываются $(N_{FFT} - L)/2$ нулевых элементов в начале, далее L отсчётов оптимального импульса, затем снова $(N_{FFT} - L)/2$ нулевых элементов в конце.

- Шаг 2: вычислением ОДПФ от массива \mathbf{A} , получается импульс во временной области \mathbf{B} , соответствующий оптимальному импульсу в частотной области.

- Шаг 3: первые N_{ZS} и последние $N_{ZS} - 1$ элементов массива \mathbf{B} обнуляются, образуя массив \mathbf{C} .

- Шаг 4: $\mathbf{D} = \mathbf{F}\mathbf{C}$ – спектральный импульс, соответствующий импульсу \mathbf{C} .

Массив \mathbf{D} содержит отсчёты оптимального импульса, искажённого занулением $(2N_{ZS} - 1)$ отсчётов во временной области.

Формирование символов PR-SEFDM:

- Шаг 1: в массив-столбец \mathbf{E} размером N_{FFT} записываются N значений передаваемых модуляционных символов. Например, если N и N_{FFT} чётные, то можно расставить $(N_{FFT} - N)/2$ нулей по краям и N символов в середине.

- Шаг 2: $\mathbf{G} = \mathbf{E} * \mathbf{D}$ – фильтрация последовательности модуляционных символов, «*» – циклическая свёртка, которая может быть выполнена эффективно с помощью БПФ.

- Шаг 3: $\mathbf{H} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}$ – символ PR-OFDM, состоящий из N_{FFT} отсчётов.

- Шаг 4: первые N_{ZS} и последние $N_{ZS} - 1$ значений массива \mathbf{H} не передаются.

Прём PR-SEFDM (после выполнения процедуры эквалайзинга):

- Шаг 1: \mathbf{R} – значения элементов массива \mathbf{H} , прошедших через канал связи и эквалайзер.
- Шаг 2: к массиву \mathbf{R} добавляются N_{ZS} нулевых значений в начало и $N_{ZS} - 1$ нулевых значений в конец, образуя массив \mathbf{H} .
- Шаг 3: $\mathbf{G} = \mathbf{FH}$ – оценка спектра символа PR-SEFDM.
- Шаг 4: демодуляция значений \mathbf{G} .

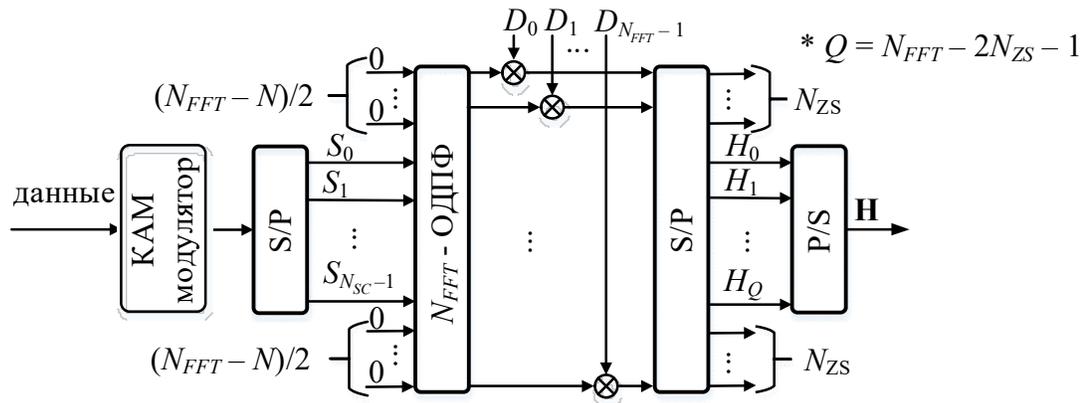


Рис. 4.11. Структурная схема передатчика сигналов PR-SEFDM

На рис. 4.11 и рис. 4.12 представлены структурная схема передатчика и приёмника сигналов PR-SEFDM соответственно. В отличие от передатчика сигналов RRC-SEFDM, в передатчике сигналов PR-SEFDM нули добавляются только в начале и в конце. Вставка нулей между модуляционными символами не требуется, так как для сигналов PR-SEFDM передискретизация не выполняется – $K = 1$.

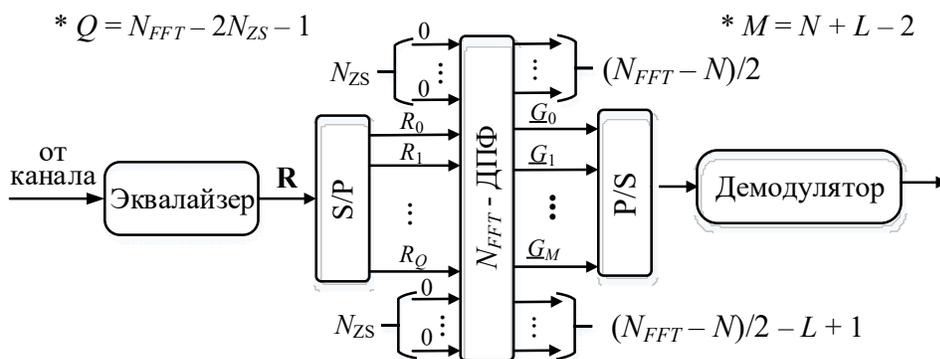
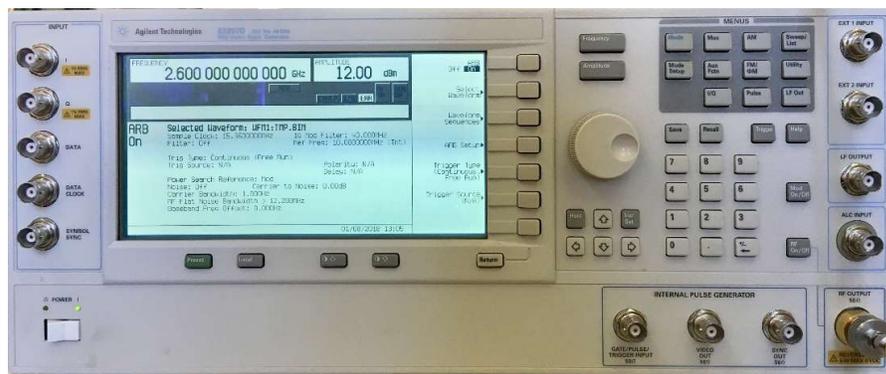


Рис. 4.12. Структурная схема приёмника сигналов PR-SEFDM

4.3. Практический выигрыш от использования сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM

В данной работе были рассмотрены спектральные свойства сигналов OFDM, sinc-SEFDM, RRC-SEFDM и PR-SEFDM со случайными последовательностями символов QPSK с помощью векторного генератора Agilent E8267D и спектроанализатора Agilent N9342C. На рис. 4.13 изображен внешний вид векторного генератора: (а) – вид спереди, (б) – вид сзади, а на рис. 4.14 – спектроанализатора.



(а)



(б)

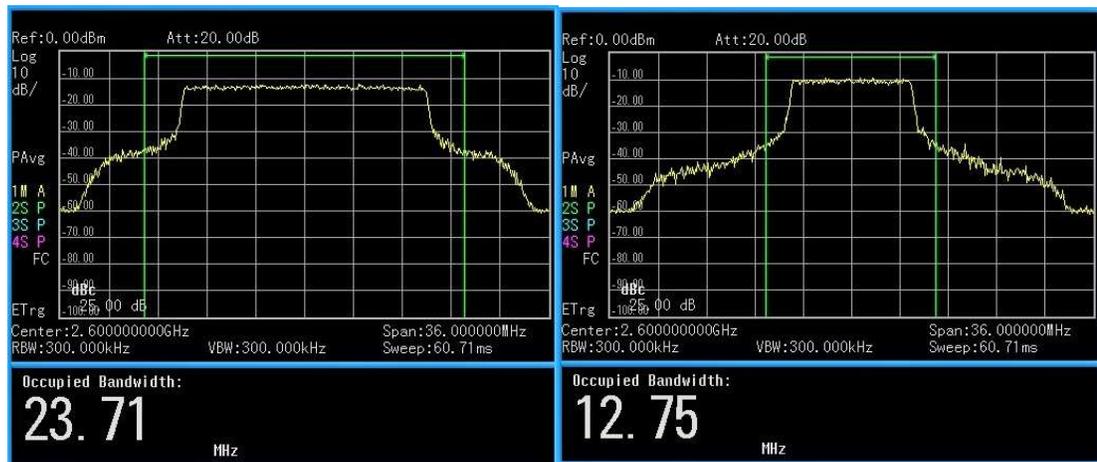
Рис. 4.13. Векторный генератор Agilent E8267D

Были рассмотрены параметры модуляции: несущая частота 2,6 ГГц, соответствующая частоте сетей LTE оператора МТС; частота дискретизации 30,72 МГц; количество поднесущих 1200 (по стандарту LTE).



Рис. 4.14. Спектроанализатор Agilent N9342C

Полученные оценки энергетических спектров изображены на рис. 4.15: (а) – для сигнала OFDM, (б) – для сигнала sinc-SEFDM при $\alpha = 0,5$ и $\beta = 0$, (в) – для сигнала RRC-SEFDM при $\alpha = 0,5$ и $\beta = 1$, (г) – для сигнала PR-SEFDM при нормированной длине импульса $T_e T = 0,75$, $\varepsilon = 0,99$. На рисунках представлены измеренные значения полосы частот, вычисленные по критерию концентрации 99% мощности сигнала. Из рис. 4.15 можно видеть, что, во-первых, переход от сигналов OFDM к сигналам sinc-SEFDM при $\alpha = 0,5$ приводит к сужению полосы частот в 1,86 раза, что близко к теоретическому значению 2, достигаемому для $N_{SC} \rightarrow \infty$. Во-вторых, полоса частот сигналов RRC-SEFDM оказывается меньше, чем для сигналов sinc-SEFDM при $\alpha = 0,5$, $\beta = 0$, также снижается и уровень внеполосных излучений. В-третьих, ширина полосы частот для сигналов PR-SEFDM оказывается меньше, чем для сигналов OFDM. Из рис. 4.15 следует, что ширина полосы частот сигналов PR-SEFDM выше, чем для сигналов RRC-SEFDM. Однако благодаря тому, что длина PR-SEFDM-символа меньше, чем длина RRC-SEFDM-символа, спектральная эффективность сигналов PR-SEFDM оказывается выше.



(a)

(b)



(c)

(d)

Рис. 4.15. Оценки энергетических спектров

Выводы по главе 4

В данной главе описаны методы формирования и обработки новых типов сигналов SEFDM, называемых сигналами RRC-SEFDM и сигналами PR-SEFDM. Преимуществом сигналов RRC-SEFDM является низкий уровень внеполосного излучения, в нем используется спектральный RRC-импульс с более низким уровнем МСИ. Обработка сигналов RRC-SEFDM требует увеличения частоты дискретизации в частотной области, эквивалентной увеличению длины символа-SEFDM во временной области, что приводит к увеличению размера ДПФ. С другой стороны, сигналам PR-SEFDM не требуется передискретизация, соответственно сохраняется такой же размер ДПФ, как в случае с сигналами OFDM. При

передаче сигналов PR-SEFDM происходит усечение переданных символов, что приводит к ожидаемому выигрышу в спектральной эффективности по сравнению с сигналами OFDM. Из-за наличия МСИ не удаётся использовать простой поэлементный алгоритм приёма, а требуется использовать алгоритмы с более высокой вычислительной сложностью, например, алгоритмы Витерби, ВСJR, и их подоптимальные версии.

Методика формирования сигналов RRC-SEFDM и сигналов PR-SEFDM, а также методика их обработки в спектральной области были представлены в следующих публикациях.

1. Gelgor, A. The design and performance of SEFDM with the Sinc-to-RRC modification of subcarriers spectrums / A. Gorlov, Van Phe Nguyen // *Advanced Technologies for Communications (ATC)*, 2016 IEEE International Conference on. pp. 65-69.

2. Gelgor, A. Performance analysis of SEFDM with optimal subcarriers spectrum shapes / A. Gorlov, Van Phe Nguyen // *Black Sea Conference on Communications and Networking (BlackSeaCom)*, 2017 IEEE International. pp. 1-5.

3. Гельгор, А.Л. Повышение эффективности SEFDM путём замены спектральных sinc-импульсов на RRC-импульсы / Горлов А.И, Ван Фе Нгуен // *Радиотехника*. – 2016. – №12, – С. 105-111.

4. Гельгор, А.Л. Повышение эффективности сигналов SEFDM путём использования RRC-импульсов в качестве формы спектра поднесущих / Горлов А.И, Ван Фе Нгуен // 19-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2017», Т1, с. 101-106, Москва, 2017 г.

5. Гельгор, А.Л. Повышение спектральной и энергетической эффективности сигналов SEFDM путём использования оптимальных импульсов в качестве формы спектров поднесущих / Горлов А.И, Ван Фе Нгуен // *Радиотехника*. – 2017. – №1, – С. 49-56.

Глава 5. Анализ эффективности сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM

5.1. Описание модели

В данной работе были исследованы значения спектральных эффективностей и удельных энергетических затрат для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM, полученных на основе OFDM с размером ДПФ $N_{FFT} = 2048$ и количеством поднесущих $N = 1200$, что соответствует стандарту LTE, на каждой поднесущей рассматривались сигнальные созвездия QPSK, 16-QAM. Все поднесущие использовались для передачи полезных данных.

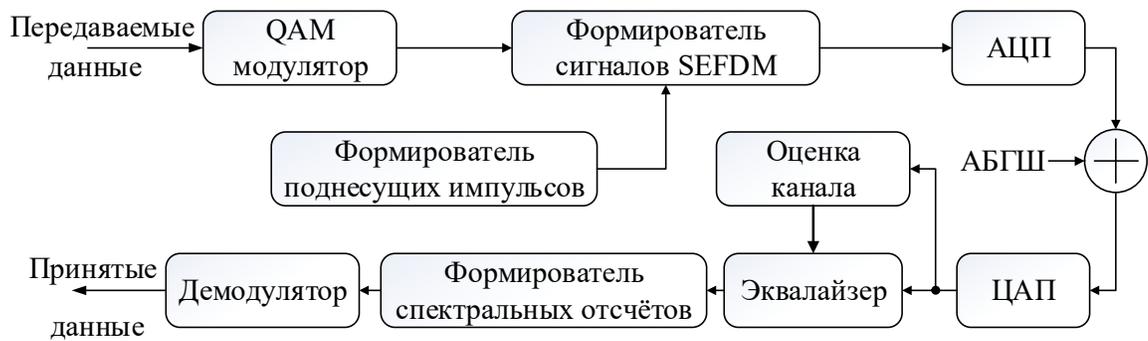


Рис. 5.1. Структурная схема имитационной модели

Для оценки помехоустойчивости приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM в среде MATLAB была реализована имитационная модель, структурная схема которой представлена на рис. 5.1. Оценивались потенциальные возможности предлагаемых сигналов, поэтому временная и частотная синхронизации считались идеальными. При моделировании рассматривался однолучевой канал с АБГШ и идеальной оценкой характеристик канала. Конечно, на практике сигналы SEFDM предполагается использовать в многолучевых каналах, однако, в данной работе рассматривается принципиальная возможность использования новой методики формирования и обработки сигналов SEFDM, поэтому вопросы многолучёвости не учитываются. При приёме, для сигналов с QPSK использовались алгоритм BCJR и подоптимальный алгоритм M-BCJR, для сигналов с 16-

QAM использовался только алгоритм M-BCJR. В качестве удельных энергетических затрат рассматривалось значение отношения энергии, затрачиваемой для передачи одного бита полезной информации, к спектральной плотности мощности белого шума:

$$\beta_E = h^2 = \frac{E_{\text{бит}}}{N_0}, \quad (5.1)$$

Выбирались такие значения отношения сигнал/шум, при которых обеспечивается значение битовой ошибки BER = 10⁻⁴. Спектральные эффективности вычислялись так:

$$\gamma = \frac{R}{W_{99\%}}, \quad (5.2)$$

где $W_{99\%}$ – ширина полосы частот, содержащей 99% мощности сигнала, а R – скорость подачи информации в канал.

- **Параметры для RRC-SEFDM сигналов**

Значения α и соответствующие им значения количества поднесущих N представлены в табл. 5.1.

Таблица. 5.1. Зависимость значений N от значений α

α	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
N	1200	1332	1500	1714	2000	2400

Для каждого значения α рассматривались следующие значения β : 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1. В каждом случае рассматривались все возможные значения N_{ZS} – от 0 до $N_{\text{FFT}}/2$ с шагом 16. Скорость подачи информации в канал в зависимости от размера сигнального созвездия M_C и с учётом длины символа OFDM вычисляется так

$$R = \log_2(M_C) \left(T \frac{2N_{\text{FFT}} - 2N_{\text{ZS}}}{N_{\text{FFT}}} \right)^{-1} = 0,5 \log_2(M_C) \left(T \left(1 - \frac{N_{\text{ZS}}}{N_{\text{FFT}}} \right) \right)^{-1}, \quad (5.3)$$

Дополнительное исследование доказало, что значение $W_{99\%}$ практически не зависит от β и N_{ZS} и равно α/T . Тогда значение спектральной эффективности можно вычислять по следующей формуле:

$$\gamma = \frac{R}{W_{99\%}} = \left(\alpha \left(1 - \frac{N_{ZS}}{N_{FFT}} \right) \right)^{-1}, \quad (5.4)$$

• **Параметры для PR-SEFDM сигналов**

Для сигналов PR-SRFDM были рассмотрены два возможных значения коэффициента концентрации мощности сигнала ε , содержащейся в длительности T_ε , равные 0,99 и 0,999. С целью сохранения вычислительной сложности алгоритма BCJR, использованного для приёма сигналов RRC-SEFDM с использованием сигнального созвездия QPSK, были найдены оптимальные импульсы с глубиной МСИ $L = 8$. При использовании подоптимального алгоритма M-BCJR, были дополнительно найдены оптимальные импульсы при $L = 12$. Значение $N_{FFT}T_\varepsilon/T$ равно количеству отсчётов импульса во временной области, содержащих долю ε мощности сигнала, поэтому, значение T_ε/T выбиралось таким, чтобы $N_{FFT}T_\varepsilon/T$ было целым числом. Рассматривались значения N_{ZS} от 0 до $N_{FFT} / 2 - \lfloor N_{FFT}T_\varepsilon / T / 2 \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ – значение ближайшего к x со стороны нуля целого. В табл. 5.2 представлены используемые параметры.

Таблица 5.2

Номер схемы	1	2
Сигнальное созвездие	QPSK	16-QAM
Скорость подачи	1 бит / T	3 бит / T
Диапазон значений $T_\varepsilon T$, $\varepsilon = 99,9$	0,32250 ... 0,82813 ($L = 8$)	
	0,29688 ... 0,82813 ($L = 12$)	
Диапазон максимальных рассматриваемых значений N_{SZ}	176 ... 694 ($L = 8$)	
	176 ... 720 ($L = 12$)	

В ходе моделирования производилось построение кривых помехоустойчивости. Шаг по оси h^2 был равен 0,1 дБ. Для каждой точки накапливалось не менее

1000 битовых ошибок и 500 блоковых ошибок (один блок – один символ SEFDM сигнала). Путём линейной интерполяции определялось значение h^2 , соответствующее $BER = 10^{-4}$; это значение использовалось в качестве значения удельных энергетических затрат β_E .

5.2. Оценка эффективности сигналов RRC-SEFDM

В этом разделе представлены полученные результаты моделирования сигналов RRC-SEFDM с использованием сигнального созвездия QPSK, а в приёмной стороне был использован оптимальный алгоритм BCJR. На рис. 5.2 изображены кривые помехоустойчивости для сигналов sinc-SEFDM со значениями $\alpha = 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5$. Из анализа рисунка следует, что уменьшение коэффициента сближения поднесущих α , что эквивалентно увеличению уровня МСИ, приводит к дополнительным затратам. Следовательно, чем меньше значение α , тем больше дополнительных затрат требуется для получения вероятности битовой ошибки 10^{-4} .

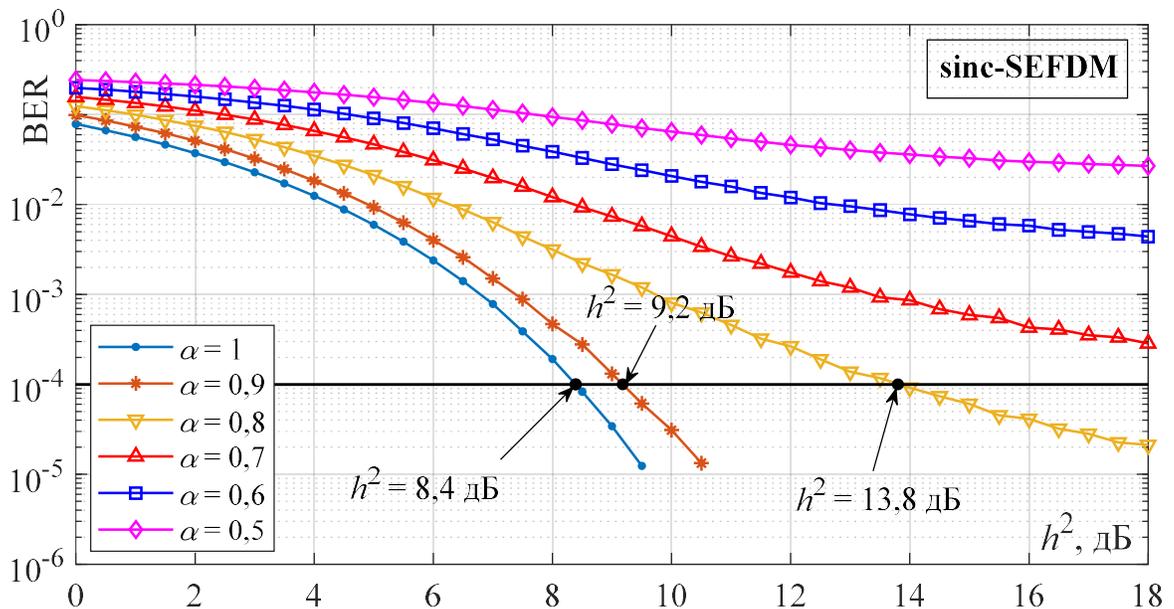


Рис. 5.2. кривые помехоустойчивости для сигналов sinc-SEFDM

В результате моделирования было получено огромное число кривых помехоустойчивости и соответствующих им пар значений спектральных эффективно-

стей и удельных энергетических затрат (γ, h^2). На рис. 5.3 красная кривая соответствует точкам с максимальной спектральной эффективностью сигналов RRC-SEFDM для $\beta > 0$; синяя кривая соответствует точкам с максимальной спектральной эффективностью традиционных сигналов sinc-SEFDM ($\beta = 0, N_{ZS} = 1024$). Крайняя левая точка синей кривой ($\gamma = 2, h^2 = 8,4$) ($\alpha = 1$) соответствует традиционному сигналу OFDM с нулевой МСИ, поэтому использовался простой поэлементный алгоритм приёма вместо алгоритма BCJR.

Из анализа рисунка следует, что переход от $\beta = 0$ к $\beta > 0$ позволяет получить значительный выигрыш. Например, при переходе от сигналов sinc-SEFDM с $\alpha = 0,8$ к сигналам RRC-SEFDM можно получить энергетический выигрыш 3,3 дБ при сохранении спектральной эффективности, либо увеличивать спектральную эффективность на 35% при сохранении удельных энергетических затрат.

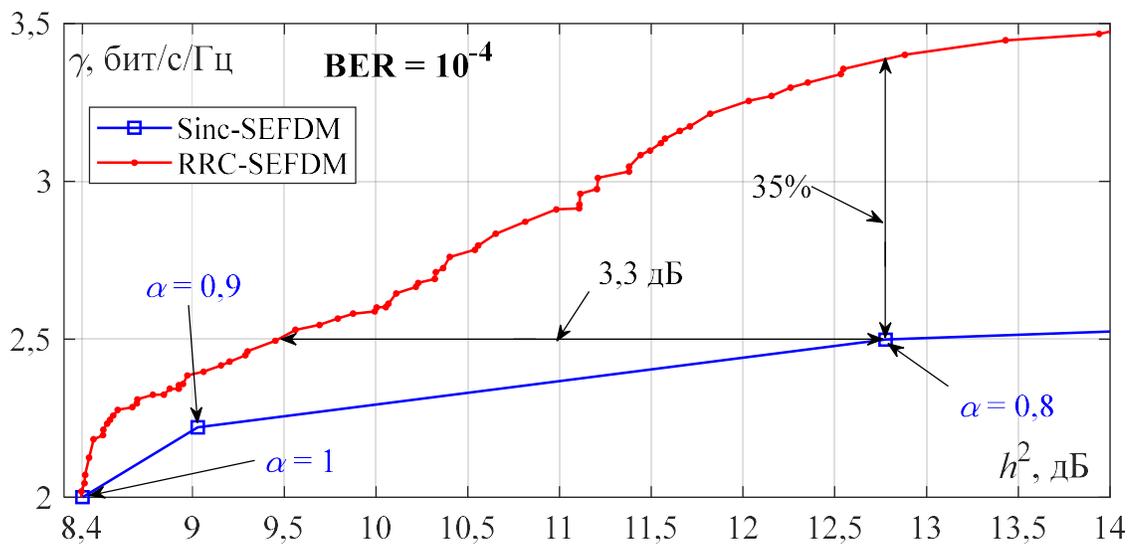


Рис. 5.3. Сравнение для сигналов RRC-SEFDM для $\beta > 0$ и sinc-SEFDM

Анализ параметров точек красной кривой сигналов RRC-SEFDM показал, что, как и в случае RRC-FTN, наименьшие удельные затраты достигаются при выборе значения β около 0,5, однако универсальный способ определения лучших комбинаций β, α и N_{ZS} не прослеживается. На практике для заданного значения спектральной эффективности γ необходимо путём имитационного моделирования определять комбинацию β, α и N_{ZS} , обеспечивающую минимальное значение

h^2 , или, наоборот, для заданного значения h^2 , определять комбинацию, обеспечивающую максимальное значение γ .

Проигрыш сигналов sinc-SEFDM объясняется тем, что значения sinc-импульса спадают медленнее, чем для всех других RRC-импульсов. Следовательно, $\beta = 0$ соответствует максимальной глубине и уровню МСИ, а значит, и максимальному значению $L^{(0)}_{VD}$. Таким образом, при фиксированной глубине интерференции, учитываемой в алгоритме приёма ($L_{VD} = 8$), sinc-импульс будет показывать худший результат. На первый взгляд, из этого следует, что $\beta = 1$ должно обеспечивать лучшие результаты. Однако это не так, потому что увеличение β приводит к требованию уменьшения N_{zs} (чтобы не исказить RRC-импульс и не увеличивать, таким образом, глубину и уровень МСИ), и значит, к увеличению γ .

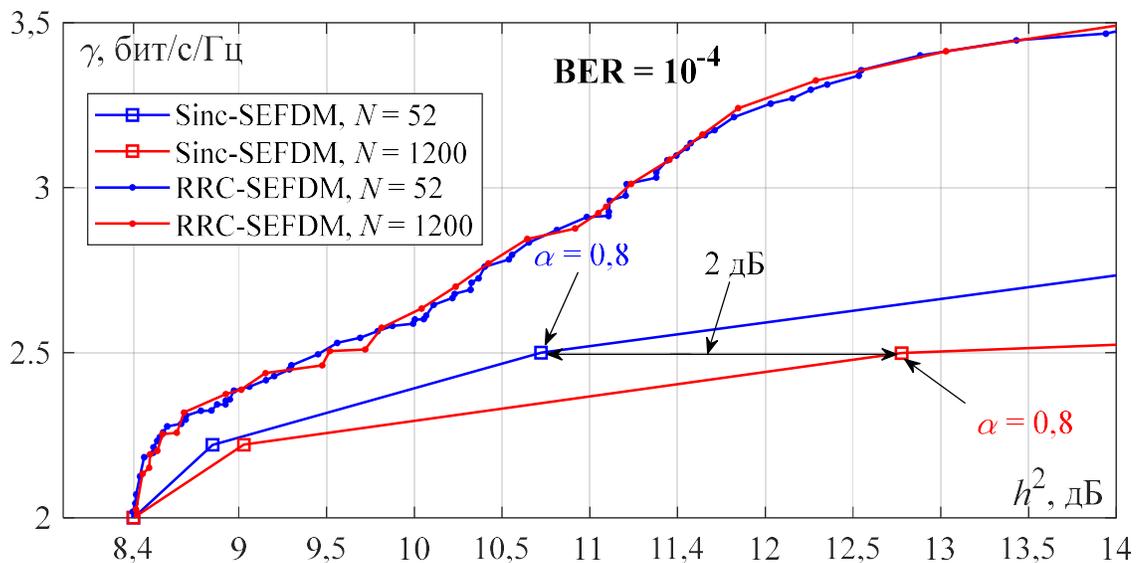


Рис. 5.4. Сравнение для сигналов RRC-SEFDM и Sinc-SEFDM для $N = 64, 1200$

Для исследования влияния количества поднесущих на спектральную эффективность дополнительно рассматривался случай $N_{FFT} = 64, N = 52$, что соответствует стандарту Wifi. На рис. 5.4 красные линии соответствуют сигналам с количеством поднесущих $N = 1200$, синие линии соответствуют сигналам с $N = 52$. Из этого рисунка можно видеть, что увеличение количества поднесущих от 52

до 1200 практически не приводит к изменению максимальных спектральных эффективностей сигналов RRC-SEFDM, но приводит к ухудшению спектральных эффективностей сигналов sinc-SEFDM. По-видимому, ухудшение спектральной эффективности при увеличении количества поднесущих N объясняется тем, что фактическая длина спектрального sinc-импульса, содержащая 99% концентрацию энергии сигнала, велика, что приводит к высокой степени МСИ.

5.3. Оценка эффективности сигналов PR-SEFDM

Для оценки спектральных эффективностей сигналов PR-SEFDM был использован оптимальный алгоритм BCJR для демодуляции сигналов с созвездием QPSK. На рис. 5.5 представлены зависимости максимальных значений спектральных эффективностей от значений удельных энергетических затрат для сигналов PR-SEFDM с параметрами концентрации мощности сигнала ε равными 0,95; 0,99; 0,999. Из рисунка видно, для $\varepsilon = 0,95$ сигналы PR-SEFDM имеют худшие спектральные эффективности, а при $\varepsilon = 0,99$ обеспечивают примерно одинаковые показатели максимальных спектральных эффективностей по сравнению с вариантом $\varepsilon = 0,999$. Однако, вариант $\varepsilon = 0,999$ обеспечивает спектральную эффективность более близкую к потенциальной спектральной эффективности. По-видимому, плохие результаты для $\varepsilon = 0,95$ объясняются тем, что импульс во временной области должен быть как можно более компактным, чтобы можно было обнулить как можно большее число элементов без появления сильных искажений в спектральной области; а в случае $\varepsilon = 0,95$ заметная часть импульса находится за пределами $N_{FFT}T_\varepsilon/T$ центральных отсчётов и процедура обнуления крайних элементов приводит к появлению большой дополнительной МСИ в спектральной области. Похожесть результатов для $\varepsilon = 0,99$ и $\varepsilon = 0,999$, вероятно объясняется тем, что для получения выигрыша от увеличения ε , т.е. в данном случае от использования значения $\varepsilon = 0,999$, необходимо переходить к большим значениям N_{FFT} , для которых удастся зафиксировать более резкий спад импульса во временной области для $\varepsilon = 0,999$ по отношению к $\varepsilon = 0,99$.

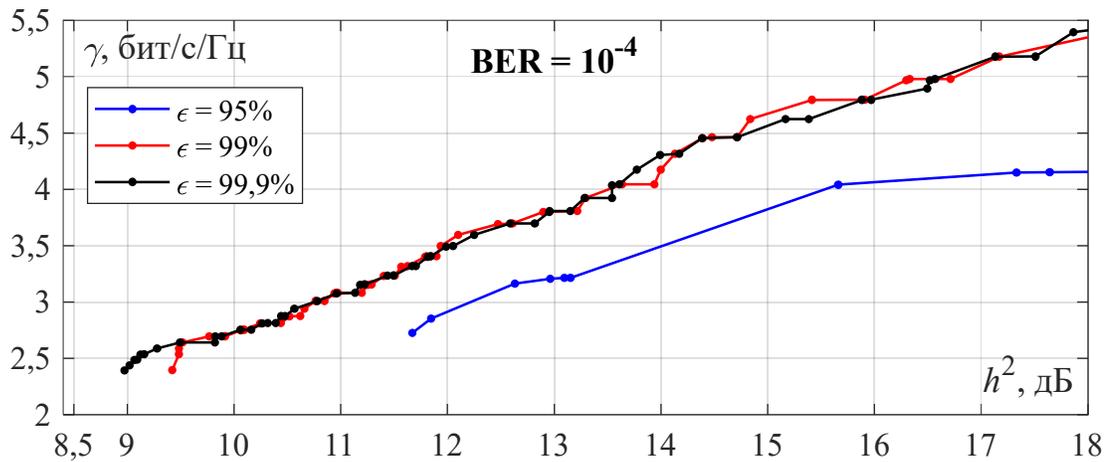


Рис. 5.5. Максимальные спектральные эффективности PR-SEFDM для $\epsilon = 0,95; 0,99; 0,999$

На рис. 5.6 изображено сравнение кривой максимальных спектральных эффективностей PR-SEFDM для $\epsilon = 0,999$ с полученными результатами для сигналов RRC-SEFDM и sinc-SEFDM в разделе 5.2, а также со спектральными эффективностями OFDM для сигнальных созвездий QPSK, 16-QAM, 64-QAM. Из анализа рисунка следует, что в области $h^2 < 11,5$ дБ и $\gamma < 3$ спектральные эффективности и удельные энергетические затраты предлагаемых PR-SEFDM и RRC-SEFDM сигналов практически одинаковы. Однако при увеличении значений γ спектральные эффективности PR-SEFDM становятся заметно больше, чем для RRC-SEFDM.

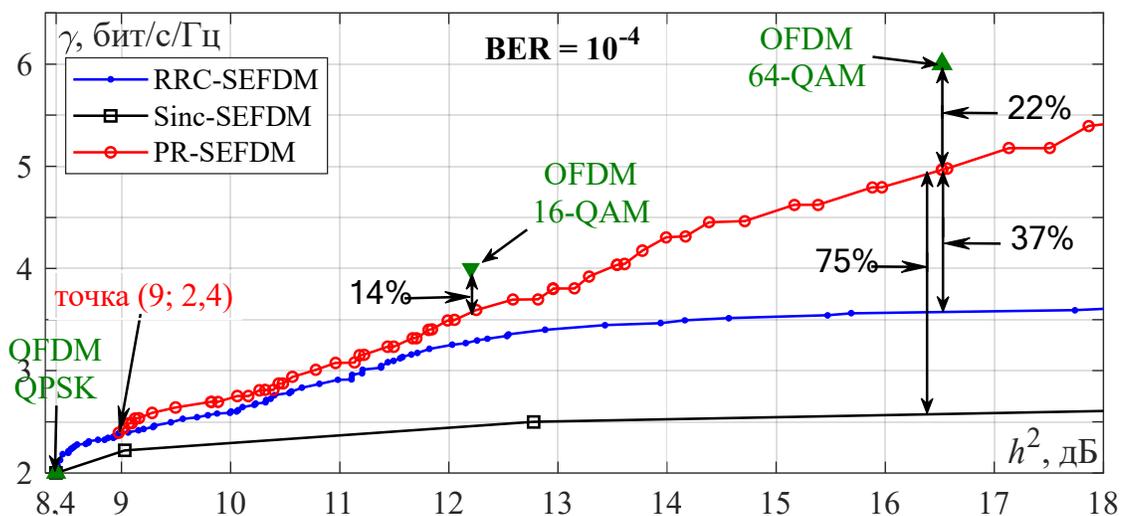


Рис. 5.6. Максимальные спектральные эффективности для sinc-SEFDM, RRC-SEFDM, PR-SEFDM

В целом, из сравнения кривых спектральных эффективностей RRC-SEFDM и PR-SEFDM следует, что PR-SEFDM сигналы всегда обеспечивают наибольшие спектральные эффективности при фиксированных энергетических затратах по отношению к RRC-SEFDM. При увеличении значений γ удельные энергетические затраты сигналов PR-SEFDM становятся значительно меньше, чем для сигналов RRC-SEFDM. Оба варианта заметно выигрывают по отношению к случаю sinc-SEFDM. Глубина интерференции в обоих случаях выбрана одинаковой $L = 8$, тем не менее, в случае использования сигналов RRC-SEFDM требуется передискретизация спектра от 2 до 10 раз, что приводит к линейному увеличению вычислительной сложности алгоритма приёма в такое же число раз. Для сигналов PR-SEFDM передискретизация не требуется и, таким образом, схожие или лучшие результаты достигаются при меньшей вычислительной сложности алгоритмов приёма, и, соответственно, следует признать сигналы PR-SEFDM более предпочтительными для использования.

Отметим, что при сравнении PR-SEFDM сигналов по отношению к сигналам OFDM с сигнальным созвездием QPSK имеется возможность увеличения спектральной эффективности на 20% при дополнительных энергетических потерях всего в 1,1 дБ, что, конечно, является хорошим результатом. С другой стороны, если производить сравнение с сигналами OFDM с сигнальными созвездиями 16-QAM и 64-QAM, то даже лучшие сигналы PR-SEFDM проигрывают им в удельных спектральных затратах 14% и 22% соответственно. Возможно, для обеспечения выигрыша PR-SEFDM необходимо использовать большее значение L , однако это приведёт к существенному увеличению сложности алгоритма демодуляции. Также можно перейти к использованию созвездий больших порядков в сигналах SEFDM, но это также увеличит сложность алгоритма демодуляции. Таким образом, можно предположить, что сигналы SEFDM с QPSK смогут найти применение только в качестве замены сигналов OFDM также с QPSK.

5.4. Оценка эффективности сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM с использованием алгоритма M-BCJR

На рис. 5.7 представлено сравнение для сигналов PR-SEFDM с параметрами $\varepsilon = 0,99$ и $0,999$. Все кривые получены для приёма сигналов SEFDM с глубиной МСИ равной 8 при использовании алгоритма M-BCJR, $M = 16$. Из анализа рисунка следует, что для созвездия QPSK, при $\varepsilon = 0,99$ сигналы PR-SEFDM обеспечивают примерно одинаковые значения максимальных спектральных эффективностей по сравнению с сигналами при $\varepsilon = 0,999$. С другой стороны, при переходе от сигнального созвездия QPSK на 16-QAM существует значительное отличие – именно при $\varepsilon = 0,999$ сигналы PR-SEFDM дают существенный выигрыш в показателе спектральной эффективности. Такой результат объясняется тем, что сигнальное созвездие имеет маленькое значение свободного эвклидова расстояния (равно 0,8), поэтому сигналы PR-SEFDM с этим созвездием более чувствительны к МСИ, появляющейся при усечении N_{SZ} отсчётов временного импульса. Дополнительное сравнение с результатами, полученными для сигналов PR-SEFDM с длиной МСИ $L = 8$ и созвездием QPSK, показывает, что подоптимальный алгоритм M-BCJR обеспечивает примерно одинаковое качество приёма по сравнению с оптимальным алгоритмом BCJR.

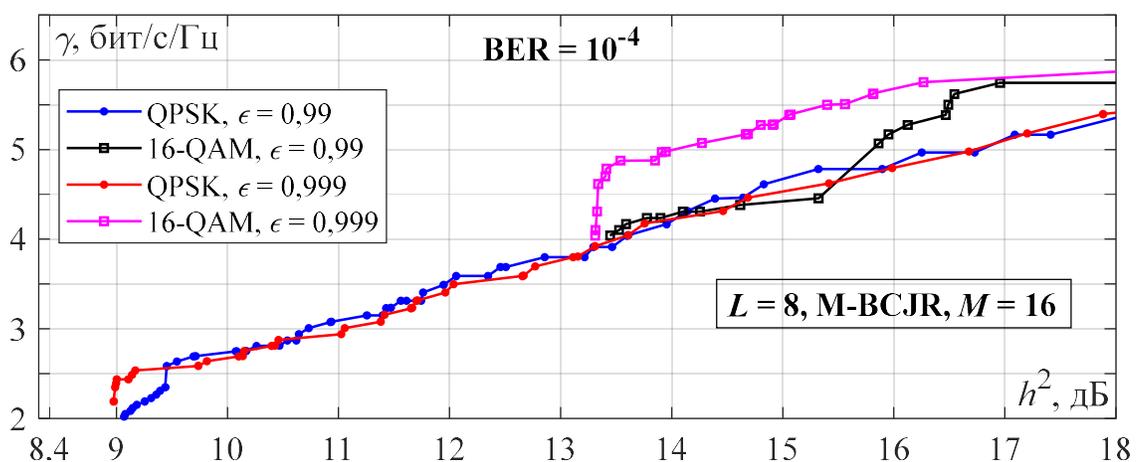


Рис. 5.7. Сравнение сигналов PR-SEFDM с параметрами $\varepsilon = 0,99$ и $0,999$ при использовании алгоритма приёма M-BCJR и $M = 16$

На рис. 5.8 представлено сравнение сигналов PR-SEFDM с длиной МСИ равной 12 при использовании алгоритма приёма М-ВСJR при $M = 4, 8, 16$. Из этого рисунка можно видеть, что алгоритм М-ВСJR при $M = 4$ обеспечивает худшие спектральные эффективности. При $M = 8, 16$ качество приёма примерно одинаково при отношении сигнал/шум меньше 15 дБ и 15,5 дБ для сигнальных созвездий QPSK и 16-QAM соответственно. Эта область соответствует низкой глубине МСИ. Это объясняется тем, что при низкой глубине МСИ энергия спектрального импульса концентрирована в коротком интервале, что способствует эффективной работе алгоритма М-ВСJR.

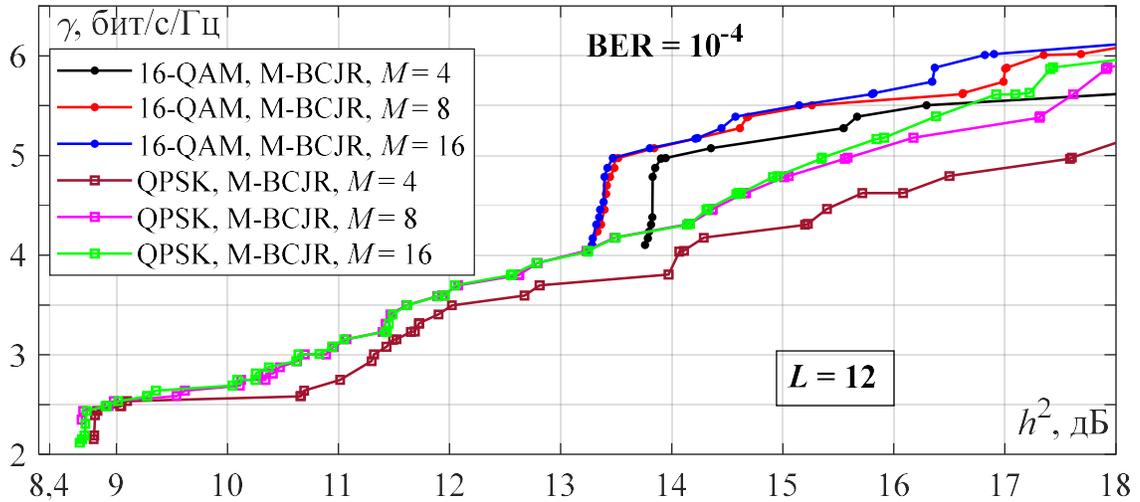


Рис. 5.8. Сравнение для сигналов PR-SEFDM с параметрами $\varepsilon = 0,999$ и сигналов RRC-SEFDM при использовании алгоритма приёма М-ВСJR и $M = 16$

На рис. 5.9 представлено сравнение сигналов PR-SEFDM с параметром $\varepsilon = 0,999$ и сигналов RRC-SEFDM при использовании алгоритма приёма М-ВСJR, $M = 16$. Анализ рисунка показывает, что при использовании алгоритма приёма М-ВСJR, $M = 16$, во-первых, предложенные сигналы PR-SEFDM с оптимальными спектральными импульсами обеспечивают выигрыш в спектральной эффективности по отношению к сигналам sinc-SEFDM и сигналам RRC-SEFDM. Во-вторых, максимальное увеличение спектральной эффективности возможно только при одновременном увеличении размера сигнального созвездия и при

введении МСИ. В-третьих, для сигналов PR-SEFDM при использовании алгоритма M-BCJR и $M = 16$ удаётся достигнуть 25% выигрыша в спектральной эффективности по отношению к сигналам OFDM с сигнальными созвездиями QPSK и 16-QAM при незначительном проигрыше в 0,6 и 1,3 дБ соответственно.

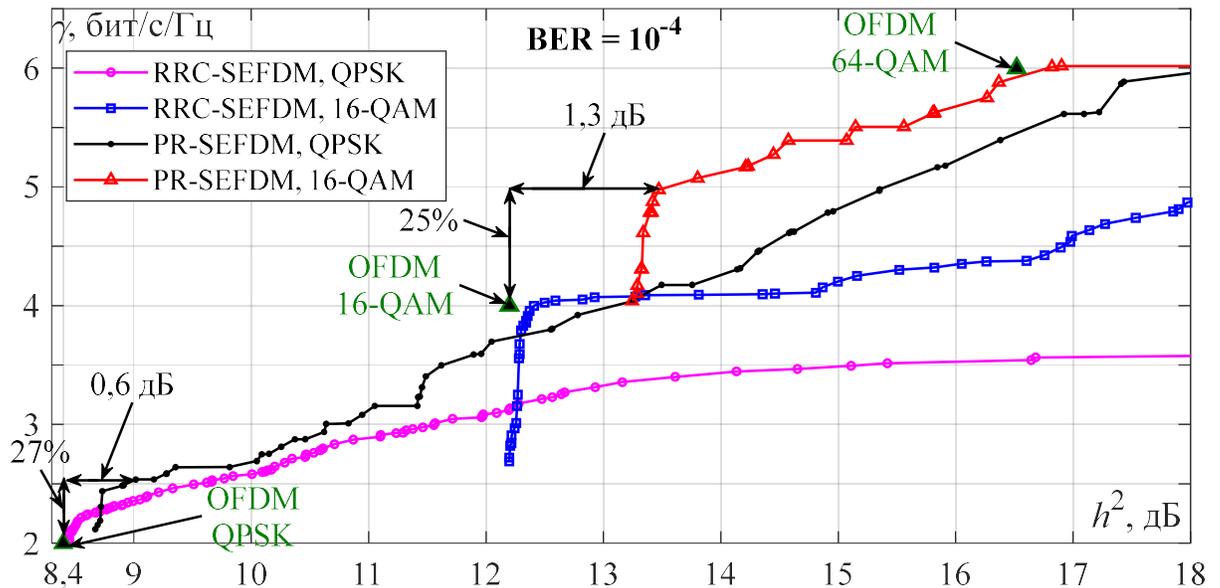


Рис. 5.9. Сравнение сигналов PR-SEFDM с параметром $\epsilon = 0,999$ и сигналов RRC-SEFDM при использовании алгоритма приёма M-BCJR, $M = 16$

Выводы по главе 5

В данной главе продемонстрированы преимущества применения сигналов SEFDM с использованием оптимальных спектральных импульсов в качестве формы спектра поднесущих. Полученные результаты исследования показали, что, во-первых, предложенные сигналы PR-SEFDM с оптимальными спектральными импульсами обеспечивают выигрыш в спектральной эффективности по отношению к сигналам sinc-SEFDM и сигналам RRC-SEFDM. Во-вторых, максимальное увеличение спектральной эффективности возможно только при одновременном увеличении размера сигнального созвездия и при введении МСИ. В-третьих, для сигналов PR-SEFDM при использовании алгоритма M-BCJR и $M = 16$ удаётся достигнуть 25% выигрыша в спектральной эффективности по отношению к сигналам OFDM с сигнальными созвездиями QPSK и 16-QAM при незначительном энергетическом проигрыше в 0,6 и 1,3 дБ соответственно.

Результаты расчёта и сравнения спектральной эффективности и удельных энергетических затрат сигналов RRC-SEFDM и сигналов PR-SEFDM по отношению к сигналам OFDM, а также результаты исследования эффективности совместного введения МСИ и повышения размера сигнального созвездия представлены в следующих публикациях.

1. Нгуен Ван Фе. Сравнение эффективности М-алгоритма и алгоритма Витерби при приёме сигналов с частичным откликом / Горлов А.И, Гельгор А.Л, Попов Е.А // 18-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2016», Т1, с. 78–83, Москва, 2016 г.

2. Van Phe Nguyen. An intentional introduction of ISI combined with signal constellation size increase for extra gain in bandwidth efficiency / A. Gorlov, A. Gelgor // International conference NEW2AN 2017: Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems pp 644-652.

3. Нгуен Ван Фе. Достижение максимальной спектральной эффективности путём одновременного увеличения размера сигнального созвездия и введения управляемой межсимвольной интерференции / Горлов А.И, Гельгор А.Л // Радиотехника. – 2018. – №1, – С. 42-48.

4. Нгуен Ван Фе. Повышение спектральной эффективности сигналов с управляемой МСИ путём увеличения размера сигнального созвездия / Горлов А.И, Гельгор А.Л // 20-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA-2018», Т1, с. 101–106, Москва, 2018 г.

Заключение

- Впервые предложены многочастотные спектрально-эффективные сигналы RRC-SEFDM и PR-SEFDM, объединяющие в себе идеи формирования сигналов OFDM и FTN.

- Для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM предложена методика их формирования и обработки в спектральной области аналогично случаю сигналов OFDM.

- При формировании и обработке сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM используются блоки прямого и обратного ДПФ аналогично случаю сигналов OFDM.

- При формировании сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM свёртка в частотной области вычислительно эффективно реализуется поэлементным перемножением во временной области.

- Сигналы RRC-SEFDM по отношению к сигналам OFDM и SEFDM обеспечивают меньший уровень внеполосных излучений, однако требуют применения блока ДПФ большей размерности.

- Для формирования и обработки сигналов PR-SEFDM требуются блоки ДПФ той же размерности, что и для сигналов OFDM.

- Для сигналов PR-SEFDM предложена методика синтеза спектральных импульсов оптимальных по критерию минимизации энергетических потерь при фиксированной спектральной эффективности.

- Показано, что при фиксированных удельных энергетически затратах увеличение длины спектрального импульса для сигналов PR-SEFDM приводит к увеличению спектральной эффективности, однако увеличение тем меньше, чем больше значение длины.

- Предложена структурная схема модема для передачи и приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM.

- Показано, что значения спектральной эффективности и удельных энергетических затрат при передаче данных сигналами RRC-SEFDM и PR-SEFDM существенно зависят от глубины учитываемой в приёмнике МСИ. Так для учитываемой глубины $L = 8$ сигналы RRC-SEFDM и PR-SEFDM хотя обеспечивают выигрыш по отношению к сигналам SEFDM, тем не менее проигрывают сигналам OFDM.

- Для вычислительно-эффективного приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM предложено использовать алгоритм M-BCJR, являющийся подоптимальной версией алгоритма BCJR. Для сигналов RRC-SEFDM дополнительно предложено использовать в приёмнике усечённый импульс.

- Показано, что при фиксированной вычислительной сложности алгоритма приёма для сигналов PR-SEFDM применение подоптимального алгоритма приёма M-BCJR обеспечивает меньшие потери по отношению к оптимальному приёму, чем для сигналов RRC-SEFDM.

- Для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM впервые показано, что максимальное увеличение спектральной эффективности передачи информации возможно только при одновременном введении МСИ и увеличении размера сигнального созвездия. Так сигналы с управляемой МСИ и сигнальным созвездием 16-QAM обеспечивают лучшие характеристики спектральной эффективности и удельных энергетических затрат, чем сигналы с управляемой МСИ и сигнальным созвездием QPSK.

- Предложенные сигналы PR-SEFDM обеспечивают выигрыш в спектральной эффективности до 27% по отношению к сигналам OFDM с сигнальными созвездиями QPSK и 16-QAM. При этом энергетический проигрыш составляет не более 1,3 дБ и в приёмнике используется алгоритм M-BCJR не более, чем с $M = 16$ выживающими на каждом шаге алгоритма путями.

Научная новизна результатов диссертационной работы

- Впервые предложены многочастотные спектрально-эффективные сигналы RRC-SEFDM и PR-SEFDM, которые благодаря использованию неортогональных

поднесущих позволяют повысить спектральную эффективность передачи информации по отношению к сигналам OFDM.

- Для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM предложена структурная схема модема, в которой аналогично случаю сигналов OFDM используются блоки прямого и обратного ДПФ.

- Впервые для сигналов PR-SEFDM предложена методика синтеза оптимальных спектральных импульсов по критерию максимального евклидова расстояния, при наличии дополнительного ограничения на длительность сигнала, в которой сосредоточена заданная концентрация энергии сигнала.

- Для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM впервые показано, что максимальное увеличение спектральной эффективности передачи информации возможно только при одновременном введении МСИ и увеличении размера сигнального созвездия.

- Показано, что для сигналов PR-SEFDM применение подоптимального алгоритма приёма M-BCJR позволяет снизить вычислительную сложность обработки сигнала при отсутствии энергетических потерь.

Положения, выносимые на защиту

- При фиксированных удельных энергетически затратах увеличение длины спектрального импульса для сигналов PR-SEFDM приводит к повышению спектральной эффективности, однако повышение тем меньше, чем больше значение длины. Так для случая сигнального созвездия QPSK изменение длины спектрального импульса от $L = 8$ до $L = 12$ приводит к повышению спектральной эффективности менее, чем на 1%, в то время как переход от $L = 4$ до $L = 8$ обеспечивает повышение спектральной эффективности на 24%.

- Для сигналов PR-SEFDM использование в алгоритме M-BCJR числа «выживающих» на каждом шаге путей $M = 4$ для созвездия QPSK и $M = 8$ для созвездия 16-QAM обеспечивает сохранение спектральной эффективности и удельных энергетических затрат при уменьшении вычислительной сложности до 512 раз по отношению к оптимальному алгоритму BCJR.

- Для сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM при фиксированных удельных энергетических затратах переход от сигнального созвездия QPSK к сигнальному созвездию 16-QAM обеспечивает выигрыш в спектральной эффективности до 25%.

- По отношению к сигналам OFDM с сигнальными созвездиями QPSK и 16-QAM сигналы PR-SEFDM с такими же созвездиями обеспечивают выигрыш в спектральной эффективности до 27% при энергетическом проигрыше не больше 1,3 дБ.

Теоретическая значимость результатов

Впервые сформулирована и решена задача синтеза оптимальных спектральных импульсов по критерию максимизации свободного евклидова расстояния, при наличии дополнительных ограничений на длительность временного импульса, в которой сосредоточена заданная доля энергии сигнала. Разработана методика формирования и обработки многочастотных сигналов, у которых в качестве формы спектральных импульсов используются оптимальные импульсы или RRC-импульсы.

Практическая значимость

Предложена структурная схема модема для передачи и приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM, которые позволяют повысить спектральную эффективность передачи информации по отношению к сигналам OFDM. Предложена методика формирования и обработки сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM в частотной области, что обеспечивает возможность простой замены использования сигналов OFDM на сигналы RRC-SEFDM и PR-SEFDM. Предложен вычислительно-эффективный подоптимальный алгоритм приёма сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM.

Личный вклад автора в разработку проблемы

Автором предложена методика формирования и обработки многочастотных сигналов с неортогональными поднесущими. Автором предложена методика синтеза оптимальных импульсов для многочастотных сигналов PR-SEFDM по критерию максимального евклидова расстояния, при наличии дополнительного

ограничения на длительность сигнала, в которой сосредоточена заданная концентрация энергии сигнала. Автором предложено использование алгоритма M-BCJR для вычислительно-эффективной демодуляции сигналов RRC-SEFDM и PR-SEFDM.

Апробация результатов

Материалы диссертационного исследования были представлены на конференциях:

1. Цифровая обработка сигналов и её применение, DSPA (г. Москва) в 2016, 2017, 2018 г.;
2. Международная конференция по электронике, связи «IEEE Advanced Technologies for Communication – ATC» (г. Ханой, Вьетнам) в 2016 г.;
3. Международная конференция по проводным и беспроводным сетям и системам нового поколения «NEW2AN» (г. Санкт-Петербург) в 2016, 2017 г.;
4. Международная Черноморская конференция по связи и сетевым технологиям «IEEE BlackSeaCom» (г. Стамбул, Турция) в 2017 г.

Методы исследования. В ходе исследований использовались методы теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, статистической теории радиотехнических систем, вариационного исчисления, методов вычислительной математики и программирования. Имитационное моделирование проводилось в среде MATLAB с использованием вычислительного оборудования суперкомпьютерного центра «Политехнический» (<http://www.scc.spbstu.ru>).

Обоснованность полученных результатов обеспечивается применением апробированного метода численного решения оптимизационных задач, корректностью постановок и решения задач, вводимых ограничений, формулировок и выводов, и подтверждается совпадением полученных результатов с известными для частных случаев.

Достоверность полученных результатов определяется хорошим совпадением частных результатов имитационного моделирования с аналитическими результатами. В частности, значения полученного выигрыша в спектральной эффективности для сигналов PR-SEFDM и RRC-SEFDM по отношению к сигналам OFDM близки к аналогичным результатам, полученным для сигналов FTN и PRS по отношению к сигналам с линейной модуляцией и sinc-импульсами. Кривые помехоустойчивости для подоптимального алгоритма M-BCJR стремятся к кривым помехоустойчивости оптимального алгоритма BCJR при стремлении числа выживающих на каждом такте путей M к максимальному значению.

Список литературы

1. Ghosh, A., Zhang, J., Andrews, J.G., and Muhamed, R. (2010) Fundamentals of LTE, Pearson Education.
2. Ochiai, H. and Imai, H. (2001) On the distribution of the peak-to-average power ratio in OFDM signals. IEEE Trans. Commun., 49 (2), 282 – 289.
3. H. G. Myung, “Introduction to single carrier FDMA,” 15th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2007), Poznan, Poland, Sept. 3 – 7, 2007, pp. 2144 – 2148.
4. Rodrigues, M. and Darwazeh, I. (2003) A spectrally efficient frequency division multiplexing based communications system, in Proceedings of 8th International OFDM Workshop, Hamburg, pp. 48–49.
5. S. Isam and I. Darwazeh, “Simple DSP-IDFT techniques for generating spectrally efficient FDM signals”, IEEE, IET Int. Symp. Commun. Syst., Netw., Digital Signal Process., pp. 20-24, 2010.
6. S. Isam, I. Kanaras and I. Darwazeh, “A truncated SVD approach for fixed complexity spectrally efficient FDM receivers,” Proc. IEEE Wireless Commun. Netw. Conf., pp. 1584-1589, 2011.
7. S. Isam, I. Darwazeh, “Design and performance assessment of fixed complexity spectrally efficient FDM receivers,” Proc. IEEE 73rd Veh. Technol. Conf., pp. 1-5, 2011.
8. T. Xu, I. Darwazeh, “Spectrally efficient FDM: Spectrum saving technique for 5G?” 1st Int. Conf on 5G for Ubiquitous Connectivity (5GU), pp. 273-278, 2014.
9. T. Xu, R. C. Grammenos, and I. Darwazeh, “FPGA implementations of real-time detectors for a spectrally efficient FDM system,” in Telecommunications (ICT), 2013 20th Int. Conf. on, pp. 1-5, 2013.
10. Xu, I. Darwazeh, “Bandwidth Compressed Carrier Aggregation,” in Communication Workshop (ICCW), 2015 IEEE Int. Conf. on, pp. 1107-1112, 2015.

11. J. Huang, Q. Sui, Z. Li, F. Ji, "Experimental Demonstration of 16-QAM DD-SEFDM with Cascaded BPSK Iterative Detection," *IEEE Photonics Journal*, Vol. 8, no. 3, June 2016.
12. Viholainen, A., Bellanger, M., and Huchard, M. (2008) Prototype filter and structure optimization, Tech. Rep., PHYDYAS.
13. Bellanger, M. (2010) FBMC physical layer: a primer, Tech. Rep., PHYDYAS.
14. Schaich, F. and Wild, T. (2014) Waveform contenders for 5G – OFDM vs. FBMC vs. UFMC, in 6th Int. Symp. Commun. Cont. Sig. Proc. (ISCCSP), 2014, IEEE, pp. 457–460.
15. Fettweis, G., Krondorf, M., and Bittner, S. (2009) GFDM - generalized frequency division multiplexing, in Proc. Vehicular Tech. Conf., Barcelona, Spain, pp. 1–4.
16. N. Michailow et al., "Generalized frequency division multiplexing for 5th generation cellular networks", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 62, no. 9, pp. 3045-3061, Sep. 2014.
17. Wunder, G., Jung, P., Kasparick, M., Wild, T., Schaich, F., Chen, Y., Brink, S., Gaspar, I., Michailow, N., Festag, A. et al. (2014) 5GNOW: non-orthogonal, asynchronous waveforms for future mobile applications. *IEEE Commun. Mag.*, 52 (2), 97–105.
18. Wunder, G., Kasparick, M., Brink, S., Schaich, F., Wild, T., Gaspar, I., Ohlmer, E., Krone, S., Michailow, N., Navarro, A. et al. (2013) 5GNOW: Challenging the LTE design paradigms of orthogonality and synchronicity, in Proc. Vehicular Tech. Conf., Dresden, Germany.
19. Vakilian, V., Wild, T., Schaich, F., Ten Brink, S., and Frigon, J.F. (2013) Universal-filtered multi-carrier technique for wireless systems beyond LTE, in *Globecom Workshops*, IEEE, pp. 223–228.
20. J.E. Mazo. Faster-than-Nyquist signaling, *Bell System Technical Journal*, vol. 54, no. 8, pp. 1451-1462, 1975.
21. A.D. Liveris and C. N. Georghiades, "Exploiting faster-than-Nyquist signaling," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 51, no. 9, pp. 1502–1511, 2003.

22. Said and J.B. Anderson. Bandwidth-efficient coded modulation with optimized linear partial-response signaling, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no.2, pp. 701-713, 1988.
23. G. D. Forney, Jr. Correlative level coding and maximum-likelihood decoding, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-17, pp. 586-594, Sept. 1971.
24. A. Said, "Design of optimal signals for bandwidth-efficient linear coded modulation," Ph.D. dissertation; also in *Communication, Information and Voice Processing Report Series, TR94-1*, Electrical, Computer and Systems Dept., Rensselaer Polytech. Inst., Troy, NY, Feb. 1994.
25. Гельгор, А.Л. Преодоление "барьера" Найквиста при использовании одночастотных неортогональных многокомпонентных сигналов / А.Л. Гельгор, А.И. Горлов, Е.А. Попов // *Радиотехника*. – 2015. – № 1. – С. 32-48.
26. Viterbi, A. J. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm / A. J. Viterbi // *Information Theory, IEEE Transactions on*. – 1967. – Vol. 13, Issue: 2. – pp. 260-269.
27. Bahl, L. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (Corresp) / L. Bahl, J. Cocke, F. jelinek, J. Raviv // *Information Theory, IEEE Transaction on*. – 1974. – Vol. 20, Issue: 2. – pp. 284-287.
28. U. Fincke and M. Pohst, "Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis," *Mathematics of computation*, vol. UME 44, number 170, pages 463-471, April. 1985.
29. Babak Hassibi and Haris Vikalo, "On the Sphere-Decoding Algorithm I. Expected Complexity," *IEEE Trans. sig. proc.*, vol. 53, no. 8, 2005.
30. J. B. Anderson, "Limited search trellis decoding of convolutional codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 35, pp. 944-955, Sept. 1989.
31. Frans V., Anderson J. Concatenated decoding with a reduced-search BCJR algorithm // *IEEE Journal on selected Areas in Communications*/ – 1998/ № 16(2). – pp. 186-195.
32. Fragouli C., Seshadri N., and Turin W. Reduced-trellis equalization using the M-BCJR algorithm // *Wirel. Commun. Mob. Comput.* 2001; 1:397–406.

33. Gorlov, A. Root-raised cosine versus optimal finite pulses for Faster-than-Nyquist generator / A. Gelgor, Van Phe Nguyen // Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. – 2016. Springer International publishing. – pp 628-640.
34. Горлов, А.И. Использование оптимальных финитных импульсов как способ наилучшего введения управляемой межсимвольной интерференции / Гельгор А.Л, Ван Фе Нгуен // Радиотехника. – 2016. – №12, – С. 112-120.
35. Van Phe Nguyen. An intentional introduction of ISI combined with signal constellation size increase for extra gain in bandwidth efficiency / A. Gorlov, A. Gelgor // Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. – 2017. Springer International Publishing. – pp 644-652.
36. Нгуен Ван Фе. Достижение максимальной спектральной эффективности путём одновременного увеличения размера сигнального созвездия и введения управляемой межсимвольной интерференции / Горлов А.И, Гельгор А.Л // Радиотехника. – 2018. – №1, – С. 42-48.
37. Gelgor, A. The design and performance of SEFDM with the Sinc-to-RRC modification of subcarriers spectrums / A. Gorlov, Van Phe Nguyen // Advanced Technologies for Communications (ATC), 2016 IEEE International Conference on. pp. 65-69.
38. Gelgor, A. Performance analysis of SEFDM with optimal subcarriers spectrum shapes / A. Gorlov, Van Phe Nguyen // Black Sea Conference on Communications and Networking (BlackSeaCom), 2017 IEEE International. pp. 1-5.
39. Гельгор, А.Л. Повышение эффективности SEFDM путем замены спектральных sinc-импульсов на RRC-импульсы / Горлов А.И, Ван Фе Нгуен // Радиотехника. – 2016. – №12, – С. 105-111.
40. Гельгор, А.Л. Повышение спектральной и энергетической эффективности сигналов SEFDM путём использования оптимальных импульсов в качестве формы спектров поднесущих / Горлов А.И, Ван Фе Нгуен // Радиотехника. – 2017. – №1, – С. 49-56.

Приложение 1

Таблица 1. Параметры спектральных оптимальных импульсов, $L = 8$, 2-РАМ

№	$T_{99\%}/T, d^2_{CB}$	Коэффициенты импульсы $a_0 \dots a_{L-1}$
1	$T_{99\%}/T = 0,75000$ $d^2_{CB} = 2,0$	1,0000000000000000 0,745344354025944 -0,618518755620976 -0,574774404860147 0,312748095471624 0,118799536488077 0,101921445038994 0,306882831867932
2	$T_{99\%}/T = 0,70313$ $d^2_{CB} = 1,6343$	1,0000000000000000 1,02669214814928 -0,505453217487544 -1,04505403624026 -0,168777465445801 0,011479716475690 -0,325768266916060 0,006883221765752
3	$T_{99\%}/T = 0,65625$ $d^2_{CB} = 1,4620$	1,0000000000000000 1,30754153910974 0,180242720966442 -0,873419768228555 -0,332526934198221 -0,0961827458994678 -0,546437635558309 -0,639215451360143
4	$T_{99\%}/T = 0,60938$ $d^2_{CB} = 1,2976$	1,0000000000000000 1,64098763966866 1,16970998298357 -0,0292446096826299 -0,120857827841518 0,182460590882415 0,230320040878019 -0,174902224671229
5	$T_{99\%}/T = 0,56250$ $d^2_{CB} = 1,1907$	1,0000000000000000 1,75106295768292 1,36433040128967 0,179250979993539 -0,243419985147257 0,128600870713811 0,444823632164552 0,0285520587457923

6	$T_{99\%}/T = 0,51563$ $d^2_{CB} = 0.9427$	1,000000000000000 2,30591273417856 2,10401656846422 0,660927487107736 -0,603425021013661 -0,589856916296803 0,291200808608477 0,414807704210795
7	$T_{99\%}/T = 0,46875$ $d^2_{CB} = 0,8326$	1,000000000000000 2,45064721560688 2,58680610102749 1,74550449677091 0,403081401966391 -0,996711551443661 -0,988076404224855 -0,197629062202270
8	$T_{99\%}/T = 0,42188$ $d^2_{CB} = 0,7176$	1,000000000000000 2,03200027793048 2,37984290659445 1,65038053502521 0,554454114692975 -0,676529983806534 -0,816504179258405 -0,289939665866525
9	$T_{99\%}/T = 0,37500$ $d^2_{CB} = 0,5176$	1,000000000000000 1,93974580317096 2,69364940998134 2,39287000564448 1,66892522425765 0,409272748538260 -0,268945008635505 -0,516598912429544
10	$T_{99\%}/T = 0.32813$ $d^2_{CB} = 0,3539$	1,000000000000000 2,00712841058794 2,87621642911951 3,08936828594149 2,57756580083704 1,55760758913212 0,570651794398129 -0,194972118621446

Таблица 2. Параметры спектральных оптимальных импульсов, $L = 8$, 4-РАМ

№	$T_{99\%}/T; d^2_{CB}$	Коэффициенты импульсы $a_0 \dots a_{L-1}$
1	$T_{99\%}/T = 0,75000$ $d^2_{CB} = 0,8$	1,000000000000000 0,729299807467335 -0,616425793263377 -0,547553707069047 0,293311890947092 0,103605861124681 0,098118226946589 0,283231327732209
2	$T_{99\%}/T = 0,70313$ $d^2_{CB} = 0,6537$	1,000000000000000 1,02530619417096 -0,502057932164067 -1,04188529264783 -0,170018285435477 0,011018133374736 -0,327920796719535 0,005563950778320
3	$T_{99\%}/T = 0,65625$ $d^2_{CB} = 0,5848$	1,000000000000000 1,30312527209506 0,180785022973583 -0,870838338156197 -0,332433707129941 -0,0978077024934845 -0,543614990114592 -0,639215557174343
4	$T_{99\%}/T = 0,60938$ $d^2_{CB} = 0,5041$	1,000000000000000 1,59858928594948 0,954301159038108 -0,178474643217725 -0,193430651685042 0,238869112012627 0,209082735596496 -0,209598672997457
5	$T_{99\%}/T = 0,56250$ $d^2_{CB} = 0,3873$	1,000000000000000 1,56977986359248 1,23336205769031 -0,244693330821817 -0,621925934397531 0,0107335313123447 0,725945866155364 0,504523859224504

6	$T_{99\%}/T = 0,51563$ $d^2_{CB} = 0,3153$	1,000000000000000 1,62078648416922 1,71167938865725 0,223400186928252 -0,879183697753535 -1,22149933256205 -0,525507246913300 0,005801659231603
7	$T_{99\%}/T = 0,46875$ $d^2_{CB} = 0,2715$	1,000000000000000 1,62614733406777 2,31637440950838 1,82387989465677 0,540684244788588 -0,551456455242478 -0,729694692800026 -0,689189096045959
8	$T_{99\%}/T = 0,42188$ $d^2_{CB} = 0,2345$	1,000000000000000 1,64438048437159 2,02791710608036 1,58107109196678 0,541982349434605 -0,496353849150899 -0,690536884616150 -0,628191637988798
9	$T_{99\%}/T = 0,37500$ $d^2_{CB} = 0,1554$	1,000000000000000 1,70015062848909 2,36645043256811 2,29479094069190 1,51557377361434 0,532004828553508 -0,053631457573136 -0,482688542355672
10	$T_{99\%}/T = 0,32813$ $d^2_{CB} = 0,1142$	1,000000000000000 1,49901303654555 2,13577975125105 2,31859222755485 2,30304593726324 1,35377203326148 0,865875737873583 0,143402328679835